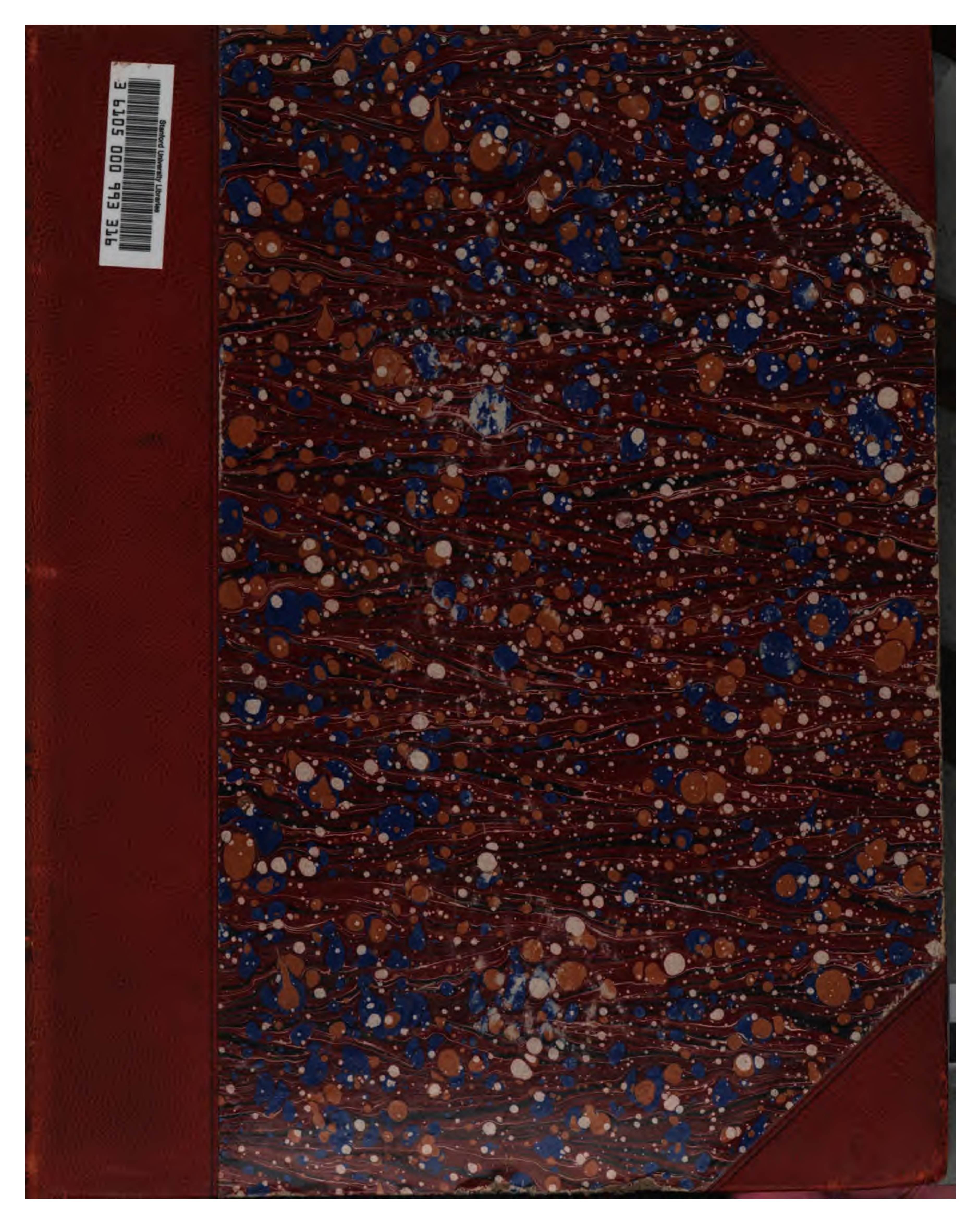



Stanford University Libraries
3 6105 000 993 316





101 ч.

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

von

L. Fuchs.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich Preussischer Behörden.

Band 118.

In vier Heften.

Mit einer Figurentafel.

Berlin,
S.W. Anhaltstrasse 12.
Druck und Verlag von Georg Reimer.
1897.

Inhaltsverzeichniss des Bandes 118.

Berichtigungen.

Seite 113 muss die zweite Fussnote lauten: cf. § 7; sie bezieht sich nicht auf Zeile 3 sondern auf Zeile 14.

- 121 ist vor dem Absatze: „Die bisher entwickelten Verfahren ..." einzuschalten: Diese Abbildung wird direct erhalten, indem jede Gerade des A_r durch ihr Schnittpunktpaar mit einer festen M_{r-1}^2 ersetzt und dann diese stereographisch auf A_{r-1} herabprojicirt wird.

- 122 Zeile 11 v. o. lies 5., 7., 8., 9., 10. statt 4., 6., 7., 8., 9.

- - - 13 - - - 5. und 10. statt 4. und 9.

Beiträge zur Theorie der stetigen Functionen einer reellen Veränderlichen.

(Von Herrn *T. Brodén* in Lund.)

§ 1.

Vorbemerkungen.

Berichtigungen.

Seite 113 muss die zweite Fussnote lauten: cf. § 7; sie bezieht sich nicht auf Zeile 3 sondern auf Zeile 14.

- 121 ist vor dem Absatze: „Die bisher entwickelten Verfahren ...“ einzuschalten: Diese Abbildung wird direct erhalten, indem jede Gerade des A_r durch ihr Schnittpunktpaar mit einer festen M^2_{r-1} ersetzt und dann diese stereographisch auf A_{r-1} herabprojicirt wird.

- 122 Zeile 11 v. o. lies 5., 7., 8., 9., 10. statt 4., 6., 7., 8., 9.

- - - 13 - - - 5. und 10. statt 4. und 9.

nicht gesagt ist, dass dies immer mit demselben Vortheil geschehen kann.

*) Ueber die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen einer reellen Veränderlichen, Sitzungsberichte der Berliner Akad. 1885, S. 633—639, 789—805.

**) Vergl. *U. Dini*, Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali, Pisa 1878, p. 117 u. ff.; *J. Lüroth* und *A. Schepp*, deutsche Bearbeitung desselben Werkes, Leipzig 1892, S. 157 u. ff,; *G. Cantor*, Ueber ein neues und allgemeines Condensationsprincip der Singularitäten, Math. Annalen XIX, S. 583—594. Einige Bemerkungen über das *Weierstrass-Cantor*sche Condensationsprincip stehe ich im Begriff, an anderer Stelle zu veröffentlichen.

***) Eine ziemlich complicirte specielle Anwendung derselben giebt *A. Köpcke*, Math. Ann. XXIX, S. 123—140.

Beiträge zur Theorie der stetigen Functionen einer reellen Veränderlichen.

(Von Herrn *T. Brodén* in Lund.)

---

§ 1.

Vorbemerkungen.

Jede stetige Function $f(x)$ der reellen Veränderlichen x lässt sich, wie *Weierstrass* gezeigt hat*), als Grenzfall für $n = \infty$ einer ganzen rationalen Function $n$ten Grades auffassen, deren Coefficienten von n abhängen, und welche sich gleichmässig an $f(x)$ nähert. Es wäre ein naheliegender Gedanke, mit diesem einfachen Satze als Ausgangspunkt mehr umfassende systematische Entwickelungen zu versuchen, als z. B. aus der Anwendung der bekannten, durch verschiedene Reihenarten vermittelten Singularitätencondensation**) zu erwarten sein dürften. Gegenwärtig werden wir jedoch eine andere Methode zur Herleitung verschiedener Functionenarten benutzen, indem wir die stetigen „Curven" als Grenzfälle für gebrochene Geraden bei unbegrenzter Vermehrung der Gliederanzahl auffassen, und zwar so, dass jeder Eckpunkt nach seiner Einführung fest liegt. Dieser naheliegende, aber bisher nicht systematisch befolgte Weg***) lässt sich in der That auch in *jedem* speciellen Falle anwenden — womit selbstverständlich nicht gesagt ist, dass dies immer mit demselben Vortheil geschehen kann.

---

*) Ueber die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen einer reellen Veränderlichen, Sitzungsberichte der Berliner Akad. 1885, S. 633—639, 789—805.

**) Vergl. *U. Dini*, Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali, Pisa 1878, p. 117 u. ff.; *J. Lüroth* und *A. Schepp*, deutsche Bearbeitung desselben Werkes, Leipzig 1892, S. 157 u. ff,; *G. Cantor*, Ueber ein neues und allgemeines Condensationsprincip der Singularitäten, Math. Annalen XIX, S. 583—594. Einige Bemerkungen über das *Weierstrass-Cantor*sche Condensationsprincip stehe ich im Begriff, an anderer Stelle zu veröffentlichen.

***) Eine ziemlich complicirte specielle Anwendung derselben giebt *A. Köpcke*, Math. Ann. XXIX, S. 123—140.

Jedenfalls ist es doch von Interesse, näher zu untersuchen, welche Functionenverhältnisse bei einfacheren Anwendungen der fraglichen Methode hervorgehen. Im Folgenden werden einige einfachere Fälle betrachtet, bei denen die Entstehung der verschiedenen Functionenverhältnisse ziemlich anschaulich hervortritt. Wie man nachher zu einer grösseren analytischen Einheitlichkeit in der Darstellung der Functionen übergehen kann, wird eine Frage für sich*).

Einige Betrachtungen werden vorausgeschickt, welche sich theilweise auch auf gewisse Arten unstetiger Functionen beziehen.

§ 2.

Primäre und *secundäre* Stellen. Die Begriffe *quasi-stetig* und *gleichförmig.*

Wir gehen von der einfachen Bemerkung aus, dass eine in einem gewissen Intervalle stetige Function $y = f(x)$ für *jede* Stelle dieses Intervalles völlig bestimmt ist, wenn man die y-Werthe für gewisse Stellen kennt, welche im ganzen Intervalle *condensirt* sind, aber eine abzählbare Menge bilden**). Dass es sich so verhält, ist augenscheinlich: jede Stelle x kann als Grenzstelle für eine dem abzählbaren Systeme angehörende Werthmenge aufgefasst werden, kurz $x = \lim\limits_{n=\infty} x_{\varrho_n}$; und es muss dann nothwendig $\lim\limits_{n=\infty} f(x_{\varrho_n}) = f(x)$ sein; wenn nämlich $\lim f(x_{\varrho_n})$ von $f(x)$ verschieden oder unbestimmt wäre, würde hieraus offenbar eine Discontinuität folgen.

Das abzählbare und condensirte System wollen wir als *primäres* Werthsystem bezeichnen; die übrigen Werthe als *secundär.* Für eine gegebene stetige Function kann man das Primärsystem beliebig wählen; aber es handelt sich nun darum, durch Vermittelung eines Systems der angegebenen Art zu einer stetigen Function zu gelangen. Man denke sich also in einem gewissen Intervalle, es sei z. B. $0 \leqq x \leqq 1$, ein abzählbares und überall condensirtes System von x-Werthen

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n, \quad \ldots$$

*) Vergl. *C. Runge,* Acta Math. VII, p. 387—392.

**) Bekanntlich ist nach *G. Cantors* Terminologie eine Menge abzählbar, wenn sie sich in einer einfachen Reihe $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ ordnen lässt; und eine Werthmenge ist in einem ganzen Intervalle „condensirt", wenn in jedem Partialintervalle Werthe sich befinden, welche dem Systeme angehören.

und entsprechende (endliche und bestimmte) Functionenwerthe

$$f(x_1),\quad f(x_2),\quad \ldots,\quad f(x_n),\quad \ldots,$$
$$y_1,\quad y_2,\quad \ldots,\quad y_n,\quad \ldots;$$

und man definire für die übrigen (secundären) x-Werthe $f(x) = y$ durch die Bestimmung, dass $f(x) = \lim_{n=\infty} y_{\varrho_n}$ sein soll, wenn $\lim_{n=\infty} x_{\varrho_n} = x$ ist, wobei selbstverständlich die Möglichkeit vorliegt, dass verschiedene Annäherungen an x verschiedene Grenzwerthe für y_{ϱ_n} geben (oder je für sich $\lim y_{\varrho_n}$ unbestimmt lassen), und also Unbestimmtheit für $f(x)$ entsteht. Für die *Stetigkeit* von $f(x)$ ist es aber nicht nur nothwendig, sondern auch hinreichend, dass $\lim y_\varrho$ immer *endlich* und *bestimmt* ist, sowohl wenn $x = \lim x_{\varrho_n}$ secundär, als auch wenn x primär ist; (es gilt keineswegs mit Nothwendigkeit, dass $\lim y_{\varrho_n} = y_i$ ist, wenn $\lim x_{\varrho_n} = x_i$). Dies ist leicht zu finden: wenn n hinreichend gross, also $|x - x_{\varrho_n}|$ hinreichend klein ist, so wird, zufolge der Annahme, $|y - y_{\varrho_n}|$ beliebig klein; es sei ferner $\lim_{n=\infty} x_{\pi_n} = x + \delta$ ($\delta \gtrless 0$); dann folgt aus der Annahme, dass für hinreichend kleines $|\delta|$ und hinreichend grosses n $|y_{\varrho_n} - y_{\pi_n}|$ beliebig klein wird, also für hinreichend kleines $|\delta|$, $|\lim y_{\varrho_n} - \lim y_{\pi_n}|$ beliebig klein. Dies bedeutet, dass für hinreichend kleines $|\delta|$, $|f(x+\delta) - f(x)|$ beliebig klein ist, unabhängig davon, ob $x+\delta$ primär oder secundär ist. Da dies für alle x gilt, ist $f(x)$ stetig, w. z. b. w. [Wenn man nur weiss, dass $\lim y_{\varrho_n}$ für secundäre Stellen endlich und bestimmt ist, so folgt hieraus die Stetigkeit in den secundären Stellen; aber Unstetigkeiten in den primären sind hierbei keineswegs ausgeschlossen.]

Die Stetigkeitsbedingungen können aber auch in einer anderen Form ausgedrückt werden. Wenn $f(x)$ stetig sein soll, ist es selbstverständlich nothwendig, dass $f(x_i)$ folgende Eigenschaft hat: bei gegebenem x_i und für hinreichend kleinen Werth von $|x_k - x_i|$ soll $|y_k - y_i|$ beliebig klein sein — was wir kurz so ausdrücken wollen, dass $f(x_i)$ eine ***quasi-stetige*** (quasi-continuirliche) Function (der primären x) ist. Aber diese Eigenschaft ist noch nicht für die Stetigkeit von $f(x)$ hinreichend. Wenn $f(x)$ stetig ist, so ist sie auch immer „gleichförmig stetig"*): für hinreichend kleines $|\delta|$ ist bei *jedem* x-Werthe $|f(x+\delta) - f(x)|$ kleiner als eine gegebene beliebig kleine positive Grösse ε. Bei der Function $f(x_i)$ können wir von einer der

*) *S. Dini*, Fondamenti p. 47—49; *Lüroth* und *Schepp* p. 62—65.

gleichförmigen Stetigkeit völlig analogen Eigenschaft sprechen: $|y_k - y_i| < \varepsilon$ unabhängig von x_i, wenn $|x_k - x_i|$ hinreichend klein ist. Diese Eigenschaft, welche wir ja kurz als *Gleichförmigkeit* von $f(x_i)$ bezeichnen können, folgt aber keineswegs aus der Quasi-Stetigkeit. (Der für $f(x)$ geltende Gleichförmigkeitsbeweis kann nicht für $f(x_i)$ reproducirt werden, weil eine Grenzstelle für primäre x im allgemeinen nicht selbst primär ist). Aber für die Stetigkeit von $f(x)$ ist selbstverständlich die Gleichförmigkeit von $f(x_i)$ ebenso nothwendig wie die (darin liegende) Quasi-Stetigkeit. Dass sie auch hinreichend ist, kann man folgendermassen einsehen. Es sei wie oben $\lim\limits_{n=\infty} x_{\varrho_n} = x$. Man hat

$$(1.)\quad \lim_{n=\infty} y_{\varrho_n} = y_{\varrho_1} + (y_{\varrho_2} - y_{\varrho_1}) + (y_{\varrho_3} - y_{\varrho_2}) + \cdots + (y_{\varrho_{n+1}} - y_{\varrho_n}) + \cdots \text{ in inf.}$$

Diese Reihe kann zufolge der Gleichförmigkeit weder divergent noch indeterminirt sein. Wenn sie nämlich divergirte, so müsste für ein beliebiges n eine Zahl m_1, so bestimmt werden können, dass $|y_{\varrho_{n+m_1}} - y_{\varrho_n}|$ grösser als eine beliebige positive Grösse A wäre; nachher müsste auf dieselbe Weise für hinreichend grosses $m_2 > m_1$ $|y_{\varrho_{n+m_2}} - y_{\varrho_{n+m_1}}| > A$ sein, u. s. w.; also würde

$$(2.)\quad \lim_{k=\infty} (y_{\varrho_{n+m_{k+1}}} - y_{\varrho_{n+m_k}})$$

nicht gleich Null sein; anderseits ist ja

$$(3.)\quad \lim_{k=\infty} (x_{\varrho_{n+m_{k+1}}} - x_{\varrho_{n+m_k}}) = 0,$$

also muss zufolge der Gleichförmigkeit auch (2.) verschwinden; dies zeigt die Unmöglichkeit der Divergenz. Und wenn die Reihe unbestimmt wäre, so würde dies ebenso voraussetzen, dass für gewisse Werthreihen

$$m_1, \quad m_2, \quad \ldots, \quad m_k, \quad \ldots$$

der Grenzwerth (2.) von Null verschieden (bez. unbestimmt) wäre*). Folglich ist (es sei x primär oder secundär) $\lim y_{\varrho_n}$ endlich und bestimmt. Dasselbe gilt bei jeder anderen Annäherung an x: Für $\lim\limits_{n=\infty} x_{\pi_n} = x$, ist $\lim y_{\pi_n}$ endlich und bestimmt. Und aus der Gleichförmigkeit folgt ferner, da $\lim\limits_{n=\infty}(x_{\pi_n} - x_{\varrho_n}) = 0$

*) Da $\lim\limits_{n=\infty}(y_{\varrho_{n+1}} - y_{\varrho_n}) = 0$ ist, würde übrigens Unbestimmtheit nur dadurch entstehen können, dass für unendlich grosse n sowohl unendlich viele positive als auch unendlich viele negative *consecutive* Glieder vorkämen.

ist, dass auch $\lim(y_{\pi_n} - y_{\varrho_n}) = 0$ wird, d. h. $\lim y_{\pi_n} = \lim y_{\varrho_n}$. Da also für alle x ein endlicher und bestimmter Grenzwerth existirt, so folgt die Stetigkeit von $f(x)$.

Man kann den Stetigkeitsbedingungen auch folgende dritte Form geben: Es ist hinreichend und nothwendig, dass $f(x_i)$ ***quasi-stetig*** ist, und dass $f(x)$ an allen ***secundären*** Stellen einen ***bestimmten*** endlichen ***Werth*** hat. Die Stetigkeit in den secundären Stellen folgt, wie wir sahen, aus der zweiten Annahme. Für eine primäre Stelle x_i ist zufolge der Quasistetigkeit $|f(x_i + \delta) - f(x_i)|$ für hinreichend kleines $|\delta|$ beliebig klein, wenn $x_i + \delta$ eine andere primäre Stelle ist; und dasselbe muss in der That auch für secundäre $x + \delta$ gelten, da $|f(x_i + \delta) - f(x_k)|$ zufolge der zweiten Annahme beliebig klein wird, wenn die primäre x_k hinreichend nahe an $x_i + \delta$ liegt. Die Bedingungen sind also hinreichend; die Nothwendigkeit ist schon oben bemerkt.

Wenn die Stetigkeitsbedingungen nicht erfüllt sind, wird $f(x)$ „~~punktirt unstetig~~". Mit Bezug auf $f(x_i)$ kann man die (primären oder secundären) Unstetigkeitsstellen von $f(x)$ als „Ungleichförmigkeitsstellen" bezeichnen. Dieselben können in endlicher oder unendlicher Menge vorkommen, condensirt oder nicht-condensirt sein. Zu bemerken ist, dass die Unstetigkeiten, welche bei Quasi-Stetigkeit von $f(x_i)$ vorkommen, offenbar immer in dem Sinne ***wesentlich*** sind, dass sie nicht unter Beibehaltung der in den Stetigkeitsstellen geltenden Functionswerthe aufgehoben werden können*). Auf nähere Untersuchung der Unstetigkeiten gehen wir diesmal nicht ein.

§ 3.

Derivation. Maxima und Minima.

Um das Verhalten der ***Derivirten*** von $f(x)$ in einer primären oder secundären Stetigkeitsstelle zu bestimmen, braucht man nur die in der Nähe von x liegenden ***primären*** Stellen zu berücksichtigen. Es sei nämlich $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\varrho, \ldots$ eine Reihe secundärer Stellen mit $\lim\limits_{\varrho=\infty} \xi_\varrho = x$. Wenn sie sämmtlich Stetigkeitsstellen sind, so entspricht jeder ξ_ϱ ein bestimmter Werth von $f(\xi_\varrho) = \eta_\varrho$, und $\lim\limits_{\varrho=\infty} \eta_\varrho$ ist $= f(x) = y$. Andererseits betrachte man, für

*) Die Unstetigkeiten sind nicht „hebbar" (*Riemann*).

alle ϱ, primäre Systeme $\xi_{\varrho 1}, \xi_{\varrho 2}, \ldots, \xi_{\varrho\mu}, \ldots$, mit $\lim\limits_{\mu=\infty} \xi_{\varrho\mu} = \xi_\varrho$. Es sei $f(\xi_{\varrho\mu}) = \eta_{\varrho\mu}$, und man setze $\xi_\varrho = \xi_{\varrho\mu} + \delta_{\varrho\mu}$, $\eta_\varrho = \eta_{\varrho\mu} + \varepsilon_{\varrho\mu}$. Es ist dann

$$\lim_{\mu=\infty} \delta_{\varrho\mu} = \lim_{\mu=\infty} \varepsilon_{\varrho\mu} = 0.$$

Demzufolge wird, wenn man jedem ϱ-Werthe einen bestimmten μ-Werth μ_ϱ derart zuordnet, dass $\lim\limits_{\varrho=\infty} \mu_\varrho = \infty$ ist,

$$\lim_{\varrho=\infty} \xi_{\varrho\mu_\varrho} = x, \quad \lim_{\varrho=\infty} \eta_{\varrho\mu_\varrho} = y;$$

und es lassen sich die Zahlen μ_ϱ überdies so wählen, dass

$$|\delta_{\varrho\mu_\varrho}| < \alpha_\varrho |\xi_\varrho - x|, \quad |\varepsilon_{\varrho\mu_\varrho}| < \alpha_\varrho |\eta_\varrho - y|$$

wird, wo α_ϱ für $\varrho = \infty$ verschwindet, aber sonst beliebig ist; mit anderen Worten so, dass $\delta_{\varrho\mu_\varrho}$ bez. $\varepsilon_{\varrho\mu_\varrho}$ für $\varrho = \infty$ unendlich klein von höherer Ordnung als $\xi_\varrho - x$ bez. $\eta_\varrho - y$ wird. Unter dieser Voraussetzung wird

$$(4.)\qquad \lim_{\varrho=\infty} \frac{\eta_{\varrho\mu_\varrho} - y}{\xi_{\varrho\mu_\varrho} - x} = \lim \frac{\eta_\varrho - y - \varepsilon_{\varrho\mu_\varrho}}{\xi_\varrho - x - \delta_{\varrho\mu_\varrho}} = \lim \frac{\eta_\varrho - y}{\xi_\varrho - x};$$

dies bedeutet, dass der Grenzwerth

$$\lim_{\delta=0} \frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta}$$

(bez. die Art ihrer Unbestimmtheit) sich nicht ändert, wenn man $x+\delta$ die primäre Reihe $\xi_{1\mu_1}, \xi_{2\mu_2}, \ldots, \xi_{\varrho\mu_\varrho}, \ldots$ statt der secundären $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\varrho, \ldots$ durchlaufen lässt. Hiermit ist bewiesen, was zu beweisen war, unter der Voraussetzung, dass in einer gewissen endlichen Umgebung von x keine Unstetigkeiten vorkommen; in diesem Falle muss man die Beweisführung ein wenig modifiziren, worauf wir jedoch gegenwärtig nicht näher eingehen, da unser jetziger Hauptgegenstand die durchaus stetigen Functionen sind.

Die *Maximum*- und *Minimum*-Stellen für $f(x_i)$ sind offenbar solche auch für $f(x)$; aber selbstverständlich können auch secundäre Maxima und Minima vorkommen.

Mit Bezug auf die Maxima und Minima einer stetigen Function $f(x)$ schieben wir übrigens hier folgende Bemerkungen ein. Jeder Maximum- bez. Minimumstelle x kann man eine Grösse zuordnen, welche wir als *„Prioritätsbereich“* bezeichnen wollen: es sei ε die obere Grenze für die

positiven δ, für welche $f(x+\delta) < f(x)$ bez. $> f(x)$ ist, und ebenso η für diejenigen δ, welche $f(x-\delta) < f(x)$ bez. $> f(x)$ machen, in beiden Fällen so zu verstehen, dass auch alle kleineren δ dieselbe Eigenschaft haben sollen; der Prioritätsbereich ist die Strecke von $x-\eta$ bis zu $x+\varepsilon$ (Länge: $\eta+\varepsilon$).

Wir nehmen z. B. an, dass x eine Maximumstelle ist. Alle anderen Maximumstellen, welche in den Prioritätsbereich von x fallen, haben einen *geringeren* Prioritätsbereich: für eine Maximumstelle zwischen x und $x+\varepsilon$ bez. $x-\eta$ ist ja der Prioritätsbereich schon $< \varepsilon$ bez. η (als unmittelbare Folge der Definition). Hieraus folgt, dass Maximumstellen, deren Prioritätsbereiche (der Länge nach) oberhalb einer von Null verschiedenen Grenze g liegen, in keinem Partialintervalle überall condensirt sein können. Eine solche Condensation vorausgesetzt, nehme man nämlich in dem betreffenden Intervalle zwei Maximumstellen ξ_1 und ξ_2 mit $|\xi_1-\xi_2| < g$ an; und es sei z. B. $\xi_1 < \xi_2$ und der Prioritätsbereich (g_1) von ξ_1 kleiner als derjenige g_2 von ξ_2. Dann kann ja ξ_2 nicht innerhalb g_1 fallen; der obere Theil γ von g_1 muss also $< \xi_2-\xi_1 < g$ sein. Aber der Prioritätsbereich einer beliebigen innerhalb γ liegenden Maximum-Stelle ist ja nicht nur $< g_1$, sondern sogar $< \gamma$, also *a fortiori* $< g$, was gegen die Annahme streitet.

Dagegen ist nicht ausgeschlossen, dass *Häufungsstellen* existiren für Maximumstellen, deren Prioritätsbereiche beliebig nahe an eine Grösse $g > 0$ kommen. Aber es gilt dann immer, dass bei der Annäherung an die Häufungsstelle, der obere oder untere Theil des Prioritätsbereiches unbegrenzt abnimmt. Es sei nämlich $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ eine Folge von Maximumstellen mit $\lim \xi_n = x$, und die entsprechenden Prioritätsbereiche $g_1, g_2, \ldots, g_n, \ldots$, mit $\lim g_n = g$. Man nehme zunächst an, dass immer $\xi_n < \xi_{n+1}$, $g_n < g_{n+1}$ ist. Der obere Theil von g_n muss dann kleiner als $\xi_{n+1}-\xi_n$ sein. Aber $\lim(\xi_{n+1}-\xi_n)$ ist gleich Null. Also verschwindet auch der erwähnte obere Theil für $n=\infty$; (der Grenzwerth des unteren Theiles ist somit $=g$). Im Falle $\xi_n < \xi_{n+1}$, $g_n > g_{n+1}$ ergiebt sich auf analoge Weise, dass der untere Theil von g_n für $n=\infty$ verschwindet. Für $\xi_n > \xi_{n+1}$ verschwindet dagegen der obere oder untere Theil, je nachdem $g_n >$ oder $< g_{n+1}$ ist. Wenn abwechselnd $\xi_n < \xi_{n+1}$ und $> \xi_{n+1}$, oder $g_n < g_{n+1}$ und $> g_{n+1}$ ist, reducirt man die Untersuchung durch Zerlegung der Gruppe ξ_n in zwei oder mehrere Gruppen, oder durch Veränderung in der Ordnung der Glieder auf die erwähnten Fälle. Also verschwindet beim Grenzübergang immer der obere oder der untere Theil des Prioritätsbereiches (oder abwechselnd der eine

und der andere), w. z. b. w. — Aehnliches gilt selbstverständlich für die Minima.

Wenn Häufungsstellen der erwähnten Art (gar nicht oder) nur in abzählbarer Menge vorkommen, so ist es ziemlich leicht zu zeigen, dass auch die Maxima-Minima selbst abzählbar sein müssen. Im entgegengesetzten Falle ist es vielleicht denkbar, dass auch die Maxima-Minima eine nicht abzählbare Menge bilden.

Uebrigens ist zu bemerken, dass jede Häufungsstelle h von Maxima-Minima „Oscillationsstelle" ist in dem Sinne, dass $f(x)$ in einer beliebig kleinen oberen oder unteren Nähe von h (oder beides) nicht mit x durchaus zu- oder abnimmt — und dass umgekehrt jede solche Oscillationsstelle (bei stetigen Functionen) Häufungsstelle für Maxima-Minima sein muss. Wenn die Maxima-Minima überall condensirt sind, oder sonst unendlich viele Häufungsstellen haben, so „oscillirt die Function unendlich oft".

Das über Maxima-Minima Gesagte gilt auch mit gewissen Modificationen für punktirt unstetige Functionen.

§ 4.

Das primäre System als Grenzfall endlicher Systeme. Die Curve $y = f(x)$ als Grenzfall einer gebrochenen Linie.

Unseren Grundgedanken, die Frage auf ein condensirtes und abzählbares Werthsystem zurückzuführen, wollen wir nun weiter verfolgen. Jede abzählbare Menge lässt sich auf mannigfaltige Weise als eine abzählbare Menge von endlichen Elementengruppen auffassen. Eine in einem gewissen Intervalle condensirte, abzählbare Werthmenge, wie unser Primärsystem, kann man sich als durch successive Interpolationen von immer näher und näher an einander liegenden Werthen entstanden denken, kurz als Grenzfall für eine endliche Menge S_n. Man kann z. B. die ganze Strecke zunächst in zwei Theile zerlegen, dann diese Theile in je zwei, u. s. w.; die Endpunkte mitgezählt, enthält dann S_n $2^n + 1$ Werthe. Jedem neu eingeführten x_i ordne man gleichzeitig einen y_i-Werth $= f(x_i)$ zu, also jedem S_n ein y_i-System T_n. Das primäre System $(x_i y_i)$ wird Grenzfall für $n = \infty$ von $(S_n T_n)$.

Hieran schliesst sich im Falle der Gleichförmigkeit von $f(x_i)$ eine zweite Definitionsform für $f(x)$. Man verbinde alle zu $(S_n T_n)$ gehörenden Punkte, deren Abscissen consecutiv sind, durch gerade Linienstücke; die so entstehende *gebrochene Linie* [kurz: die gebrochene Linie $(S_n T_n)$] repräsentirt

eine stetige Function $f_n(x)$. Für primäre Abscissen ist offenbar immer $f(x_i) = \lim\limits_{n=\infty} f_n(x_i)$. Bei Gleichförmigkeit gilt dasselbe auch für die secundären. Es sei $x_{n1} < x < x_{n2}$, wo x_{n1} und x_{n2} consecutive Abscissen in S_n sind, mit den entsprechenden Ordinaten y_{n1} und y_{n2}. Dann ist auch $y_{n1} < f_n(x) < y_{n2}$, oder $y_{n1} > f_n(x) > y_{n2}$, oder $y_{n1} = f_n(x) = y_{n2}$. Zufolge der Gleichförmigkeit ist aber $\lim\limits_{n=\infty} y_{n1} = \lim\limits_{n=\infty} y_{n2} = f(x)$. Also wird auch $\lim\limits_{n=\infty} f_n(x) = f(x)$. Die stetige Curve $y = f(x)$ ist also einfach als Grenzfall der gebrochenen Linie $y = f_n(x)$ aufzufassen.

Andererseits ist auch immer $f(x) = \lim f_n(x)$, wenn $\lim f_n(x)$ eine stetige Function ist. Dann wird nämlich $\lim y_{n1} = \lim y_{n2}$ gleich einer bestimmten endlichen Grösse gleich $\lim f_n(x)$, und andererseits $\lim y_{n1} = f(x)$, nach der früheren Definition von $f(x)$. Es sind also immer $f(x)$ und $\lim f_n(x)$ gleichzeitig stetig oder unstetig.

Dagegen können die beiden Functionen auf verschiedene Weise unstetig sein. Es ist z. B. möglich, dass $\lim f_n(x)$, obgleich unstetig, für alle x endlich und bestimmt ist, ohne dass dies mit $f(x)$ der Fall ist.

Die Reihe

$$(5.)\quad \begin{cases} \lim f_n(x) = f_1(x)+[f_2(x)-f_1(x)]+[f_3(x)-f_2(x)]+\cdots \\ \qquad\qquad \cdots+[f_{n+1}(x)-f_n(x)]+\cdots \text{ in inf.} \end{cases}$$

giebt, nach einem bekannten allgemeinen Satze*), eine stetige Function, wenn sie gleichmässig convergirt, d. h. wenn unabhängig von x und für hinreichend grosses n $|f_n(x)-\lim f_n(x)|$ kleiner als eine beliebig kleine positive Grösse ist. Die nähere Analyse dieser Bedingung wird uns aber gegenwärtig nicht beschäftigen, da sie für das Folgende nicht nothwendig ist. Für die dort betrachteten Specialfälle ist es hinreichend, folgende einfache Bemerkungen zu machen.

In der That muss $f(x)$ immer *stetig* sein, sobald die *Richtungscoefficienten* der Glieder der gebrochenen Linie $(S_n T_n)$ *zwischen endlichen Grenzen bleiben*. Denn in jeder Umgebung einer Unstetigkeitsstelle finden sich primäre Stellen, deren Ordinaten um endliche, deren Abscissen aber um unendlich kleine Grössen differiren, und dies wäre nicht möglich, wenn unendlich grosse Richtungscoefficienten ausgeschlossen wären.

---

*) Siehe z. B. *Dini*, Fondamenti p. 110; *Lüroth* und *Schepp* p. 147.

Zweitens ist die Stetigkeit gesichert, wenn y_i mit x_i ***durchgehends steigt oder fällt,*** und wenn man zeigen kann, dass die y_i ***überall condensirt sind.*** Denn zufolge der ersten Annahme können Unstetigkeiten nur dadurch entstehen, dass man bei der Annäherung an einen gewissen x-Werth von oben und von unten zwei verschiedene Grenzwerthe für y_i erhält, was selbstverständlich durch die zweite Annahme ausgeschlossen wird.

Hierzu fügen wir noch folgende Bemerkung. Von einem beliebigen primären Punkte $(x_i y_i)$ aus geht für hinreichend grosse n ein bestimmtes Linienstück nach oben (in positiver x-Richtung), und ein anderes nach unten. Die Richtungscoefficienten derselben können wir kurz als ***vorderer*** und ***hinterer Richtungscoefficient*** bezeichnen. Wenn für jede bestimmte primäre Stelle beide Richtungscoefficienten ***zwischen endlichen Grenzen*** bleiben [was selbstverständlich nicht damit gleichbedeutend ist, dass die Richtungscoefficienten der $(S_n T_n)$-Glieder überhaupt endlich bleiben], so ist es einleuchtend, dass die Function $f(x_i)$, wenn auch nicht gleichförmig, doch wenigstens ***quasi-stetig*** ist.

§ 5.

Die Derivirten in den primären Stellen.

Wenn $f(x)$ in einer ***primären*** Stelle eine bestimmte (endliche oder unendliche) ***vordere*** oder eine bestimmte ***hintere Derivirte,*** $f'_+(x_i)$ bez. $f'_-(x_i)$, haben soll, so ist es selbstverständlich nothwendig, dass die vorderen bez. hinteren Richtungscoefficienten $\overset{+}{m}_{in}$ und $\overset{-}{m}_{in}$, bestimmte Grenzwerthe haben. Aber hinreichend ist dies durchaus nicht. Wir werden die ferneren Bedingungen näher untersuchen.

Es sei x_i in S_μ neu eingeführt, und ξ_ϱ bezeichne die in $S_{\mu+\varrho}$ nächstfolgende Abscisse mit der entsprechenden Ordinate η_ϱ. Dann ist

$$\lim_{n=\infty} \overset{+}{m}_{in} = \lim_{\varrho=\infty} \frac{\eta_\varrho - y_i}{\xi_\varrho - x_i}.$$

Angenommen, dass dieser Grenzwerth bestimmt ist, so gilt es festzustellen, unter welchen Bedingungen dieselbe Grenze erhalten wird, wenn man sich auf andere Weise von oben unbegrenzt an $(x_i y_i)$ nähert.

Man betrachte das Intervall $\xi_{\varrho+1} \dots \xi_\varrho$, und bezeichne mit $\xi_{\varrho k}^{(\lambda)}$ die λte Abscisse (von links nach rechts gezählt), welche in diesem Intervalle

bei der Bildung von $S_{\mu+\varrho+k}$ neu eingeführt wird ($k > 1$, $\lambda \geqq 1$), und $\eta_{\varrho k}^{(\lambda)}$ sei die entsprechende Ordinate. Es ist immer

$$(6.)\qquad \frac{\eta_\varrho - y_i}{\xi_\varrho - x_i} = \frac{f_{\mu+\varrho}(\xi_{\varrho k}^{(\lambda)}) - y_i}{\xi_{\varrho k}^{(\lambda)} - x_i},$$

weil der Punkt $[\xi_{\varrho k}^{(\lambda)}, f_{\mu+\varrho}(\xi_{k\varrho}^{(\lambda)})]$ auf der Geraden $(x_i y_i)\dots(\xi_\varrho \eta_\varrho)$ liegt. Es muss also

$$(7.)\qquad \lim_{\varrho=\infty} \frac{\eta_{\varrho k}^{(\lambda)} - y_i}{\xi_{\varrho k}^{(\lambda)} - x_i} = \lim_{\varrho=\infty} \frac{f_{\mu+\varrho}(\xi_{\varrho k}^{(\lambda)}) - y_i}{\xi_{\varrho k}^{(\lambda)} - x_i}$$

sein, unabhängig davon ob k und λ constant sind, oder mit ϱ variiren, aber unter endlichen Grenzen bleiben, oder mit ϱ unendlich werden (nur ist zu bemerken, dass für jedes Werthepaar ϱ, k, die Zahl λ offenbar eine obere Grenze hat).

Wenn $\lim \overset{+}{m}_{in}$ *endlich* und bestimmt ist, so ist (7.) mit

$$(8.)\qquad \lim_{\varrho=\infty} \frac{\eta_{\varrho k}^{(\lambda)} - f_{\mu+\varrho}(\xi_{\varrho k}^{(\lambda)})}{\xi_{\varrho k}^{(\lambda)} - x_i} = \lim_{\varrho=\infty} \frac{d_{\varrho k}^{(\lambda)}}{\xi_{\varrho k}^{(\lambda)} - x_i} = 0$$

gleichbedeutend. Diese Bedingung ist *a fortiori* erfüllt, wenn $d_{\varrho k}^{(\lambda)}$ für $\varrho = \infty$ immer unendlich klein von höherer Ordnung als $\xi_{\varrho+1} - x_i$ ist, und dies wiederum, wenn $d_{\varrho k}^{(\lambda)}$ unendlich klein von höherer Ordnung als $\xi_\varrho - x_i$ ist, aber $\xi_{\varrho+1} - x_i$ von derselben Ordnung wie $\xi_\varrho - x_i$. Wenn dagegen der Quotient $(\xi_{\varrho+1} - x_i):(\xi_\varrho - x_i)$ für $\varrho = \infty$ verschwindet, so werden die Verhältnisse weniger einfach. Man bemerke zunächst, dass in (6.) und (7.) $f_{\mu+\varrho}$ durch $\varphi_{\mu+\varrho}$ ersetzt werden kann, wenn $\varphi_{\mu+\varrho}(x)$ die durch das Linienstück $(\xi_{\varrho+1}\eta_{\varrho+1})\dots(\xi_\varrho \eta_\varrho)$ repräsentirte Function bedeutet; denn für einen Punkt (xy) auf dieser geradlinigen Strecke liegt immer

$$\frac{y - y_i}{x - x_i} \text{ zwischen } \frac{\eta_\varrho - y_i}{\xi_\varrho - x_i} \text{ und } \frac{\eta_{\varrho+1} - y_i}{\xi_{\varrho+1} - x_i},$$

weshalb der Grenzwerth des ersten Ausdruckes mit demjenigen der beiden anderen zusammenfällt. Wenn man $\eta_{\varrho k}^{(\lambda)} - \varphi_{\mu+\varrho}(\xi_{\varrho k}^{(\lambda)})$ mit $\delta_{\varrho k}^{(\lambda)}$ bezeichnet, so lässt sich somit die Bedingung (8.) durch

$$(9.)\qquad \lim_{\varrho=\infty} \frac{\delta_{\varrho k}^{(\lambda)}}{\xi_{\varrho k}^{(\lambda)} - x_i} = 0$$

ersetzen, und es ist $\lim\limits_{\varrho=\infty} |\delta_{\varrho k}^{(\lambda)} : d_{\varrho k}^{(\lambda)}| = 1$. Wie oben ist es *a fortiori* nothwendig, dass $\delta_{\varrho k}^{(\lambda)}$ unendlich klein von höherer Ordnung als $\xi_\varrho - x_i$ ist. Die

überdies erforderlichen Bedingungen können folgendermassen formulirt werden. Jedem ϱ-Werthe ordne man zwei positive Grössen z_ϱ und g_ϱ derart zu, dass $|\delta_{\varrho k}^{(\lambda)}:(\xi_{\varrho k}^{(\lambda)}-\xi_{\varrho+1})|$ immer $< g_\varrho$ ist, sobald $\xi_{\varrho k}^{(\lambda)}-\xi_{\varrho+1} > z_\varrho$. Zufolge der soeben erwähnten Annahme ist es möglich, g_ϱ und z_ϱ so zu wählen, dass $\lim\limits_{\varrho=\infty} g_\varrho = 0$ und $\lim\limits_{\varrho=\infty}\dfrac{z_\varrho}{\xi_\varrho-\xi_{\varrho+1}} = 0$ ist. Andererseits kann man — wenigstens bei Gleichförmigkeit von $f(x_i)$ — zwei positive Grössen h_ϱ und u_ϱ so bestimmen, dass $|\delta_{\varrho k}^{(\lambda)}:(\xi_{\varrho+1}-x_i)| < h_\varrho$ ist, sobald $\xi_{\varrho k}^{(\lambda)}-\xi_{\varrho+1} < u_\varrho$, und dies so, dass $\lim\limits_{\varrho=\infty} h_\varrho = 0$ wird. Denn $|\delta_{\varrho k}^{(\lambda)}|$ wird beliebig klein, wenn $\xi_{\varrho k}^{(\lambda)}$ hinreichend nahe an $\xi_{\varrho+1}$ kommt. Die Bedingung (9.) ist offenbar erfüllt mit Bezug auf solche Stellen $[\xi_{\varrho k}^{(\lambda)}, \eta_{\varrho k}^{(\lambda)}]$, für welche $\xi_{\varrho k}^{(\lambda)}-\xi_{\varrho+1}$ entweder $> z_\varrho$ oder $< u_\varrho$ ist. Sie ist also bei jeder Art des Grenzüberganges erfüllt, wenn (für hinreichend grosse ϱ) $u_\varrho > z_\varrho$ ist. Und umgekehrt ist es, wie leicht ersichtlich, für die vollständige Erfüllung von (9.) auch nothwendig, dass die Grössen g_ϱ, z_ϱ, h_ϱ, u_ϱ, sich so wählen lassen, dass $u_\varrho > z_\varrho$ ist. Für einen endlichen und bestimmten Werth von $\lim \overset{+}{m}_{in}$ haben wir hiermit die Bedingungen dafür angegeben, dass $f'_+(x_i) = \lim \overset{+}{m}_{in}$ sein soll. Denn die in der Nähe von x_i liegenden secundären Stellen brauchen wir nicht zu berücksichtigen (§ 3).

Der Umstand, dass $\lim \overset{+}{m}_{in}$ bestimmt und endlich ist, lässt sich übrigens auch in der Form ausdrücken, dass

$$(10.)\quad \lim_{\substack{\varrho=\infty\\ k=\infty}}\left[\frac{\eta_{\mu+\varrho+k}-y_i}{\xi_{\mu+\varrho+k}-x_i}-\frac{f_{\mu+\varrho}(\xi_{\mu+\varrho+k})-y_i}{\xi_{\mu+\varrho+k}-x_i}\right] = \lim_{\substack{\varrho=\infty\\ k=\infty}}\frac{\eta_{\mu+\varrho+k}-f_{\mu+\varrho}(\xi_{\mu+\varrho+k})}{\xi_{\mu+\varrho+k}-x_i} = 0$$

ist, wenn k auf beliebige Weise mit ϱ unendlich wird. Wenn dies *nicht* stattfindet, so ist (8.) offenbar eine hinreichende Bedingung dafür, dass $f'_+(x_i)$ sich auf dieselbe Weise wie $\lim \overset{+}{m}_{in}$ verhält, d. h. mit $\lim \overset{+}{m}_i$ positiv oder negativ unendlich wird, oder auf dieselbe Weise unbestimmt. Aber nothwendig ist die Bedingung in diesem Falle nicht: Die Gleichung (8.) folgt nicht daraus, dass beide Glieder in (7.) auf dieselbe Weise unendlich oder unbestimmt sind.

Völlig analoge Betrachtungen gelten selbstverständlich für $f'_-(x_i)$ und $\lim \overset{-}{m}_{in}$.

Zu bemerken sind übrigens folgende Fälle, in denen $f'_+(x_i)$ bez. $f'_-(x_i)$ nothwendig mit $\lim \overset{+}{m}_{in}$ bez. $\lim \overset{-}{m}_{in}$ Null oder unendlich wird.

Theorem. Wenn in einer hinreichend kleinen vorderen bez. hinteren Nähe von x_i die Function $f(x_i)$ durchaus mit x_i abnimmt bez. zunimmt, und für alle in einem Systeme (S_{n+1}, T_{n+1}) neuen Eckpunkte $(\xi_i \eta_i)$ die Differenz $\eta_i - f_n(\xi_i)$ bei hinreichend grossem n immer > 0 ist, so hat $f'_+(x_i)$ bez. $f'_-(x_i)$ den bestimmten Werth Null, wenn $\lim \overset{+}{m}_{in}$ bez. $\lim \overset{-}{m}_{in} = 0$ ist. Und ebenso, wenn $f(x_i)$ in der vorderen bez. hinteren Nähe zunimmt bez. abnimmt und $\eta_i - f_n(\xi_i) < 0$ ist. Und andererseits: wenn in der vorderen bez. hinteren Nähe $f(x_i)$ mit x_i zunimmt bez. abnimmt, und $\eta_i - f_n(\xi_i) > 0$ ist, so wird $f'_+(x_i)$ bez. $f'_-(x_i)$ mit $\lim \overset{+}{m}_{in}$ bez. $\lim \overset{-}{m}_{in}$ unendlich gross; und ebenso, wenn $f(x_i)$ in der vorderen bez. hinteren Nähe abnimmt bez. zunimmt und $\eta_i - f_n(\xi_i) < 0$ ist.

Man betrachte nämlich z. B. den Fall, dass in einer gewissen hinteren Nähe von x_i die Function mit der Abscisse durchaus zunimmt und $\eta_i - f_n(\xi_i) > 0$ ist, $\lim \overset{-}{m}_{in} = 0$. Es seien, analog wie oben, $\xi_{\mu+\varrho}$ und x_i in $S_{\mu+\varrho}$ consecutiv, $\xi_{\mu+\varrho+1}$ und x_i in $S_{\mu+\varrho+1}$. Zufolge der Annahmen ist, für hinreichend grosse ϱ

$$\frac{\eta_{\varrho k}^{(\lambda)} - y_i}{\xi_{\varrho k}^{(\lambda)} - x_i}$$

immer positiv und kleiner als der grössere der beiden ebenfalls positiven Quotienten

$$\frac{\eta_{\mu+\varrho} - y_i}{\xi_{\mu+\varrho} - x_i} \quad \text{und} \quad \frac{\eta_{\mu+\varrho+1} - y_i}{\xi_{\mu+\varrho+1} - x_i}.$$

Hieraus folgt, dass

$$(11.) \qquad \lim_{\varrho=\infty} \frac{\eta_{\varrho k}^{(\lambda)} - y_i}{\xi_{\varrho k}^{(\lambda)} - x_i} = \lim_{\varrho=\infty} \frac{\eta_{\mu+\varrho} - y_i}{\xi_{\mu+\varrho} - x_i} = \lim_{n=\infty} \overset{-}{m}_{in} = 0$$

ist, wenn k und λ auf beliebige Weise mit ϱ variiren, w. z. b. w. Die übrigen Fälle lassen sich auf analoge Weise behandeln — oder man kann sie durch Substitution der Form

$$(x = x_1,\ y = -y_1),\quad (x = -x_1,\ y = y_1),$$
$$(x = -x_1,\ y = -y_1),\quad (x = \pm y_1,\ y = \pm x_1)$$

auf den betrachteten reduciren.

§ 6.

Die Derivirten in den secundären Stellen.

Es seien $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\varrho, \ldots$ successive Näherungswerthe von unten an eine secundäre Stetigkeitsstelle x, welche derart bestimmt sind, dass

man in den successiven Systemen S_n den grössten x_i nimmt, welcher $< x$ ist (wir haben früher ξ_ϱ mit x_{n1} bezeichnet)*). Die entsprechenden Ordinaten seien $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_\varrho, \ldots$. Dann ist (mit ξ_0 als Anfangspunkt des Intervalles)

$$(12.)\qquad \eta_\varrho = U_1(\xi_1-\xi_0)+U_2(\xi_2-\xi_1)+\cdots+U_\varrho(\xi_\varrho-\xi_{\varrho-1}),$$

$$(13.)\qquad y = \lim_{\varrho=\infty}\eta_\varrho = \sum_{i=1}^{\infty} U_i(\xi_i-\xi_{i-1}),$$

wo die U_i gewisse Grössen sind, welche von den näheren Umständen bei der Bildung der Systeme $(S_n T_n)$ abhängen. Also ist

$$(14.)\qquad \frac{y-\eta_\varrho}{x-\xi_\varrho} = \frac{\sum\limits_{i=\varrho+1}^{\infty} U_i(\xi_i-\xi_{i-1})}{\sum\limits_{i=\varrho+1}^{\infty}(\xi_i-\xi_{i-1})},$$

$$(15.)\qquad \lim_{\varrho=\infty}\frac{y-\eta_\varrho}{x-\xi_\varrho} = \lim_{\varrho=\infty}\frac{\sum\limits_{i=\varrho+1}^{\infty} U_i(\xi_i-\xi_{i-1})}{\sum\limits_{i=\varrho+1}^{\infty}(\xi_i-\xi_{i-1})} = \lim_{\varrho=\infty}\frac{\Omega_\varrho}{Z_\varrho}.$$

Eine nothwendige Bedingung für die Existenz einer bestimmten ***hinteren*** Derivirten $f'_-(x)$ ist, dass der Grenzwerth (15.) bestimmt ist.

Man nehme zunächst an, dass alle $U_i > 0$ sind (wenigstens für hinreichend grosse i), was damit gleichbedeutend ist, dass die y_i mit den x_i wachsen (wenigstens für die in Frage kommenden Stellen). Es gilt dann, dass, wenn $\lim\limits_{\varrho=\infty} U_\varrho$ bestimmt ist,

$$(16.)\qquad \lim_{\varrho=\infty}\frac{\Omega_\varrho}{Z_\varrho} = \lim_{\varrho=\infty} U_\varrho,$$

also auch bestimmt ist. Es sei $\lim\limits_{\varrho=\infty} U_\varrho = k,\ \infty > k > 0$. Dann ist für hinreichend grosses ϱ

$$k+\delta > U_\varrho > k-\delta,\quad (\delta \text{ beliebig klein } > 0),$$

*) Es ist zu bemerken, dass ξ_ϱ im allgemeinen nicht zu S_ϱ gehört, sondern in einem Systeme S_n mit $n > \varrho$ neu ist; denn zwischen ξ_ϱ und x wird nicht bei jeder Vermehrung von n um eine Einheit ein neuer Punkt interpolirt; dann würde in der That, wie man leicht finden kann, x der obere Endpunkt des Intervalles sein; und allgemeiner: wenn es von einem gewissen ϱ an sich so verhielte, so würde x ein primärer Punkt sein.

und also

$$\frac{\sum\limits_{\varrho+1}^{\infty}(k+\delta)(\xi_i-\xi_{i-1})}{Z_\varrho} > \frac{\Omega_\varrho}{Z_\varrho} > \frac{\sum\limits_{\varrho+1}^{\infty}(k-\delta)(\xi_i-\xi_{i-1})}{Z_\varrho},$$

d. h.

$$k+\delta > \frac{\Omega_\varrho}{Z_\varrho} > k-\delta,$$

und folglich ist

$$(17.)\qquad \lim_{\varrho=\infty}\frac{\Omega_\varrho}{Z_\varrho} = k = \lim_{\varrho=\infty} U_\varrho.$$

Für $k=0$ hat man auf dieselbe Weise $\delta > \Omega_\varrho : Z_\varrho > 0$, also

$$(18.)\qquad \lim_{\varrho=\infty}\frac{\Omega_\varrho}{Z_\varrho} = 0 = \lim_{\varrho=\infty} U_\varrho.$$

Endlich ist für $k=\infty$, bei hinreichend grossem ϱ, $\Omega_\varrho : Z_\varrho > \omega$, wo ω beliebig gross sein kann, d. h.

$$(19.)\qquad \lim_{\varrho=\infty}\frac{\Omega_\varrho}{Z_\varrho} = \infty = \lim_{\varrho=\infty} U_\varrho.$$

Mit leichter Modification der Beweisführung leitet man her, dass wenn $\lim\limits_{\varrho=\infty} U_\varrho$ zwischen zwei Unbestimmtheitsgrenzen k_1 und k_2 liegt, auch $\lim\limits_{\varrho=\infty}(\Omega_\varrho : Z_\varrho)$ zwischen k_1 und k_2 liegt, aber möglicherweise mit *engeren* Unbestimmtheitsgrenzen. Man kann sogar fragen, ob nicht $\lim(\Omega_\varrho : Z_\varrho)$ *bestimmt* sein kann, obgleich $\lim U_\varrho$ unbestimmt ist. Es sei

$$(20.)\qquad \lambda_\varrho = \frac{\xi_{\varrho+1}-\xi_\varrho}{Z_\varrho}.$$

Eine nothwendige Bedingung für die Bestimmtheit von $\lim(\Omega_\varrho : Z_\varrho)$ ist, dass

$$(21.)\qquad \lim_{\varrho=\infty}\left(\frac{\Omega_\varrho}{Z_\varrho} - \frac{\Omega_{\varrho+1}}{Z_{\varrho+1}}\right)$$

den bestimmten Werth Null hat. Diese Differenz ist aber gleich

$$(22.)\qquad \begin{cases} \dfrac{\Omega_\varrho}{Z_\varrho} - \dfrac{\Omega_\varrho - U_{\varrho+1}(\xi_{\varrho+1}-\xi_\varrho)}{Z_\varrho-(\xi_{\varrho+1}-\xi_\varrho)} = \dfrac{-\Omega_\varrho(\xi_{\varrho+1}-\xi_\varrho) + U_{\varrho+1}.Z_\varrho(\xi_{\varrho+1}-\xi_\varrho)}{Z_\varrho[Z_\varrho-(\xi_{\varrho+1}-\xi_\varrho)]} \\ \qquad = \dfrac{\lambda_\varrho}{1-\lambda_\varrho}\left(U_{\varrho+1} - \dfrac{\Omega_\varrho}{Z_\varrho}\right). \end{cases}$$

Wenn $\lim U_\varrho$ unbestimmt, aber $\lim(\Omega_\varrho : Z_\varrho)$ bestimmt ist, so muss man eine positive Grösse k so bestimmen können, dass es oberhalb jeder Grenze

ϱ-Werthe giebt, für welche

$$\left| U_{\varrho+1} - \frac{\Omega_\varrho}{Z_\varrho} \right| > k$$

ist. Dass (21.) den bestimmten Werth Null haben soll, erfordert also mit Nothwendigkeit

$$(23.) \qquad \lim_{\varrho=\infty} \lambda_\varrho = 0.$$

Dies ist daher auch eine nothwendige Bedingung dafür, dass $\lim(\Omega_\varrho : Z_\varrho)$ bestimmt sein soll, obgleich $\lim U_\varrho$ unbestimmt ist.

Andererseits gilt es zufolge (22.), dass wenn $\lim \lambda_\varrho = 0$ ist, auch (21.) verschwindet, wenigstens unter der Voraussetzung, dass U_ϱ, und also auch $\Omega_\varrho : Z_\varrho$ zwischen endlichen Grenzen bleiben. Aus dem Verschwinden von (21.) folgt ja aber nicht unbedingt, dass $\Omega_\varrho : Z_\varrho$ einen bestimmten Grenzwerth hat (vgl. § 2, zweite Note). Eine nähere Untersuchung dieser Verhältnisse werde ich an anderer Stelle geben.

Wir haben bisher angenommen, dass alle $U_\varrho > 0$ sind. Wenn sie alle kleiner als 0 sind, gestaltet sich offenbar alles völlig analog. Wenn sie dagegen abwechselnde Zeichen haben, so treten andere Verhältnisse ein. Es kann dann nur im Falle $\lim U_\varrho = 0$ von einem bestimmten Grenzwerthe für U_ϱ die Frage sein. In diesem Falle ist aber wie oben

$$\lim(\Omega_\varrho : Z_\varrho) = \lim U_\varrho = 0.$$

Zufolge der Annahme $\lim U_\varrho = 0$ sind nämlich für hinreichend grosse ϱ die Glieder der Reihe Ω_ϱ numerisch kleiner als die entsprechenden der Reihe Z_ϱ, also ist Ω_ϱ unbedingt convergent, und dem Vorigen zufolge

$$(24.) \qquad \lim_{\varrho=\infty} \frac{\sum_{i=\varrho}^{\infty} |U_{i+1}|(\xi_{i+1}-\xi_i)}{Z_\varrho} = 0.$$

Aber immer ist

$$(25.) \qquad -\frac{\sum_{i=\varrho}^{\infty} |U_{i+1}|(\xi_{i+1}-\xi_i)}{Z_\varrho} < \frac{\Omega_\varrho}{Z_\varrho} < \frac{\sum_{i=\varrho}^{\infty} |U_{i+1}|(\xi_{i+1}-\xi_i)}{Z_\varrho}.$$

Hieraus folgt

$$\lim_{\varrho=\infty} \frac{\Omega_\varrho}{Z_\varrho} = 0, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Ferner ist ja Ω_ϱ in der That immer unbedingt convergent, sobald nur $|U_\varrho|$ unter einer endlichen Grenze bleibt. Und mit dieser Voraussetzung zeigt man mit Leichtigkeit, dass $\Omega_\varrho : Z_\varrho$ zwischen $-k_2$ und $+k_2$ bleibt, wenn k_2

die obere Grenze für $|U_\varrho|$ ist, und ferner — *mutatis mutandis* — wie im vorigen Falle, dass $\Omega_\varrho : Z_\varrho$ nur dann einen bestimmten Grenzwerth haben kann, wenn

$$\lim_{\varrho=\infty} \lambda_\varrho = \lim_{\varrho=\infty} \frac{\xi_{\varrho+1} - \xi_\varrho}{Z_\varrho} = 0$$

ist, obgleich andererseits die Bestimmtheit jenes Grenzwerthes nicht unbedingt daraus folgt, dass $\lim \lambda_\varrho = 0$ ist. Die Grenzen $-k_2 \cdots + k_2$ sind doch im allgemeinen zu weit: wenn k_1 und k_2, wie oben, die Grenzen für U_ϱ sind, wobei nun $k_1 < 0$ ist, so ist in der That, ganz wie im vorigen Falle, auch $\Omega_\varrho : Z_\varrho$ zwischen diesen Grenzen enthalten; wenn nämlich $k_1 = -h$ ist, führe man $U_\varrho + h$ statt U_ϱ ein, und dementsprechend $(\Omega_\varrho : Z_\varrho) + h$ für $\Omega_\varrho : Z_\varrho$. Durch diese Substitution wird die Frage auf den vorigen Fall reducirt. Offenbar erhält man, dass $(\Omega_\varrho : Z_\varrho) + h$ zwischen 0 und $k_2 + h$ liegt, also $\Omega_\varrho : Z_\varrho$ zwischen $-h$ und k_2, d. h. k_1 und k_2. Natürlich ist diese Substitution auch das einfachste Mittel um die Bedingungen für die Bestimmtheit von $\lim(\Omega_\varrho : Z_\varrho)$ auf unseren jetzigen Fall auszudehnen. — Auch im Falle $k_2 = \infty$ kann man, falls nur k_1 endlich ist, durch jene Substitution auf den vorigen Fall zurückkommen, und analog für $k_1 = -\infty$, wenn k_2 endlich ist. Dies wird nur dann unmöglich, wenn beide unendlich sind.

Völlig analoge Betrachtungen gelten nach oben.

Aus dem Umstande, dass $\lim(\Omega_\varrho : Z_\varrho)$ einen bestimmten Werth hat, folgt noch nicht mit Nothwendigkeit, dass auch $f'_-(x)$ denselben bestimmten Werth hat oder überhaupt bestimmt ist — ebenso wenig, wie für einen primären Punkt $f'_-(x_i) = \lim \overline{m}_{in}$ sein muss. Die Bedingungen für die Uebereinstimmung von $f'_-(x)$ und $\lim(\Omega_\varrho : Z_\varrho)$ sind denjenigen für die Uebereinstimmung von $f'_-(x_i)$ und $\lim \overline{m}_{in}$ analog. Zu bemerken ist, dass wie schon bemerkt, die Vermehrung von ϱ um eine Einheit einer Vermehrung von n um mehrere Einheiten entsprechen kann (was für primäre Stellen nicht der Fall war), ferner dass die Bezeichnung $\xi_{\varrho k}^{(\lambda)}$ eine einigermassen modificirte Bedeutung erhalten muss, und endlich, dass man bei Formulirung der fraglichen Bedingungen die Grösse $x - \xi_{\varrho+1}$ durch $\xi_{\varrho+2} - \xi_{\varrho+1}$ ersetzen kann, falls diese für $\varrho = \infty$ unendlich klein von derselben Ordnung wie jene ist, d. h. wenn λ_ϱ für $\varrho = \infty$ nicht beliebig nahe an Null kommen kann. Wenn dies dagegen der Fall ist, so erhält man jedenfalls hinreichende, aber nicht nothwendige Bedingungen, falls $x - \xi_{\varrho+1}$ durch $\xi_{\varrho+2} - \xi_{\varrho+1}$ ersetzt wird. — Analog nach oben.

Das Theorem am Ende des vorigen Paragraphen ist in unveränderter Form auch für secundäre Stellen gültig.

Mit Bezug auf die Beurtheilung der soeben besprochenen Verhältnisse ist Folgendes von Bedeutung. Es seien x_i und x_k zwei in S_n consecutive Abscissen ($x_i < x_k$), und x_l eine zwischen ihnen bei der Bildung von S_{n+1} interpolirte Abscisse; und die Richtungscoefficienten der Geraden

$$(x_i y_i)\dots(x_k y_k),\quad (x_i y_i)\dots(x_l y_l),\quad (x_l y_l)\dots(x_k y_k)$$

seien bez. m, $m(1+\alpha)$, $m(1+\beta)$.

Wie eine sehr einfache Rechnung zeigt, hat man dann

$$(26.)\qquad \frac{y_l - f_n(x_l)}{x_l - x_i} = m\alpha,\quad \frac{y_l - f_n(x_l)}{x_k - x_l} = -m\beta,\quad \frac{x_l - x_i}{x_k - x_l} = -\frac{\beta}{\alpha}.$$

Die Grössen α und β müssen verschiedene Zeichen haben, da der letzte Quotient positiv sein muss. Ferner hat man auch

$$(27.)\qquad \frac{y_l - f_n(x_l)}{x_k - x_i} = m\frac{\alpha\beta}{\beta-\alpha},\quad \text{also}\quad \frac{|y_l - f_n(x_l)|}{x_k - x_i} = |m|\cdot\frac{|\alpha\beta|}{|\alpha|+|\beta|}.$$

Es ist noch übrig, Folgendes zu bemerken. Wenn sowohl $f'_+(x)$ als $f'_-(x)$ bestimmte Werthe haben, kann es sein, dass diese Werthe *verschieden* sind oder nicht. Der Punkt $[x, f_n(x)]$ liegt auf einem bestimmten Gliede der gebrochenen Linie $(S_n T_n)$. Der Richtungscoefficient desselben sei m_n. Wenn $f(x)$ an der fraglichen Stelle x *eine bestimmte* Derivirte haben soll, so muss nothwendig $\lim\limits_{n=\infty} m_n$ bestimmt sein, und $f'(x)$ ist dann $= \lim m_n$. Wenn nämlich die Endpunkte des fraglichen Linienstückes $(x_{n1} y_{n1})$ und $(x_{n2} y_{n2})$ sind, so muss ja, falls $f'(x)$ bestimmt ist,

$$f'(x) = \lim_{n=\infty} \frac{y_{n1} - y}{x_{n1} - x} = \lim_{n=\infty} \frac{y_{n2} - y}{x_{n2} - x}$$

sein. Der Winkel zwischen den Richtungen $(xy)\dots(x_{n1} y_{n1})$ und $(xy)\dots(x_{n2} y_{n2})$ nähert sich also unbegrenzt an 2π; folglich nähern sich die Winkel zwischen jenen Richtungen und der Linie $(x_{n1} y_{n1})\dots(x_{n2} y_{n2})$ beide an Null, d. h. $\lim\limits_{n=\infty} m_n$ ist gleich $f'(x)$. Es gilt aber nicht umgekehrt, dass, wenn $\lim m_n$ einen stimmten Werth hat, eine bestimmte Derivirte $f'(x)$ existiren muss; es kann sein, dass $f'_+(x)$ und $f'_-(x)$ verschiedene Werthe haben oder unbestimmt sind. Es giebt einen besonders bemerkenswerthen Fall, wo die Umkehrung wenigstens insofern zulässig ist, dass $\lim\limits_{\varrho=\infty} U_\varrho = \lim\limits_{\sigma=\infty} V_\sigma = \lim\limits_{n=\infty} m_n$ ist, wobei die V_σ bei der Annäherung von oben die analoge Bedeutung haben,

wie die U_ϱ bei der Annäherung von unten. Es sei AB ein Glied der gebrochenen Linie $(S_n T_n)$, und CD ein Glied der gebrochenen Linie $A\dots B$, welche in (S_{n+1}, T_{n+1}) übergeht (wobei C mit A, oder D mit B zusammenfallen kann). Die Richtungscoefficienten von AB und CD seien m bez. $m(1+\varepsilon)$; und es bedeute δ_n den grössten vorkommenden numerischen Werth von ε (wenn alle Glieder AB in $(S_n T_n)$ und alle entsprechenden Glieder CD in $(S_{n+1} T_{n+1})$ betrachtet werden). Die fragliche Eigenschaft der Interpolation besteht einfach darin, dass

$$\lim_{n=\infty} \delta_n = 0 \tag{28.}$$

ist. Der Beweis ist leicht. Man bezeichne mit $m(1+\varepsilon_1)$, $m(1+\varepsilon_2)$, ... die Richtungscoefficienten der successiven, bei der Bildung von $(S_{n+1} T_{n+1})$ zwischen A und B interpolirten Glieder, mit $(\xi_1\eta_1)$, $(\xi_2\eta_2)$, ... die entsprechenden successiven Eckpunkte, und mit $m(1+\alpha_1)$, $m(1+\alpha_2)$, ... die Richtungscoefficienten der Geraden $(\xi_1\eta_1)\dots A$, $(\xi_2\eta_2)\dots A$, ... Wenn $(x_i y_i)$ die Coordinaten von A sind, hat man dann

$$m(1+\alpha_2) = \frac{\eta_2-y_i}{\xi_2-x_i} = \frac{\eta_1-y_i+\eta_2-\eta_1}{\xi_1-x_i+\xi_2-\xi_1} = \frac{m(1+\alpha_1)(\xi_1-x_i)+m(1+\varepsilon_2)(\xi_2-\xi_1)}{\xi_1-x_i+\xi_2-\xi_1}$$
$$= m\left[1+\frac{\alpha_1(\xi_1-x_i)+\varepsilon_2(\xi_2-\xi_1)}{\xi_1-x_i+\xi_2-\xi_1}\right].$$

Nun ist $|\alpha_1| = |\varepsilon_1| \leqq \delta_n$, $|\varepsilon_2| \leqq \delta_n$; folglich wird, da ξ_1-x_i und $\xi_2-\xi_1$ positiv sind

$$|\alpha_2| \leqq \frac{\delta_n(\xi_1-x_i)+\delta_n(\xi_2-\xi_1)}{\xi_1-x_i+\xi_2-\xi_1}, \text{ d. h. } |\alpha_2| \leqq \delta_n. \tag{29.}$$

Auf dieselbe Weise erhält man nachher $|\alpha_3| \leqq \delta_n$, $|\alpha_4| \leqq \delta_n$ u. s. w. Hieraus folgt, wenn der Richtungscoefficient für AC kurz mit α bezeichnet wird

$$\left|\frac{\text{Richtungscoefficient für } AC}{\text{Richtungscoefficient für } CD} - 1\right| = \left|\frac{1+\alpha}{1+\varepsilon} - 1\right| = \left|\frac{\alpha-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right| \leqq \frac{2\delta_n}{|1-\delta_n|}. \tag{30.}$$

Die Grössen U_ϱ sind aber Richtungscoefficienten für Linienstücke AC, und die Grössen m_n für entsprechende Stücke CD, mit $n \geqq \varrho$. Es ist also zufolge (30.)

$$U_\varrho = (1+\eta_\varrho)m_n, \quad \text{wo} \quad \lim_{\varrho=\infty} \eta_\varrho = 0 \quad \text{ist.} \tag{31.}$$

Die Zahl n ist eine Function von ϱ, und wird mit ϱ unendlich gross. Wenn man annimmt, dass $\lim_{n=\infty} m_n$ einen bestimmten (endlichen oder unendlichen)

Werth hat, so ist also auch $\lim\limits_{\varrho=\infty} m_n = \lim\limits_{n=\infty} m_n$, und zufolge (31.) $\lim\limits_{\varrho=\infty} U_\varrho = \lim\limits_{n=\infty} m_n$. Auf völlig analoge Weise geht hervor, dass $\lim\limits_{\sigma=\infty} V_\sigma = \lim\limits_{n=\infty} m_n$ ist. Man hat also

$$\text{(32.)} \qquad \lim_{\varrho=\infty} U_\varrho = \lim_{\sigma=\infty} V_\sigma = \lim_{n=\infty} m_n, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Wenn dagegen $\lim\limits_{n=\infty} m_n$ unbestimmt ist, so folgt auch unter der Annahme (28.) hieraus nicht, dass $\lim\limits_{\varrho=\infty} U_\varrho$ dieselben Unbestimmtheitsgrenzen hat, auch nicht einmal, dass dieser Grenzwerth überhaupt unbestimmt ist: $\lim\limits_{\varrho=\infty} m_n$ kann sich auf andere Weise verhalten (so zu sagen weniger unbestimmt sein) als der allgemeine Grenzwerth $\lim\limits_{n=\infty} m_n$. Bemerkt sei hierbei übrigens, dass wenn die Bedingung (28.) erfüllt ist, $\lim\limits_{n=\infty} m_n$ nur unter folgenden Voraussetzungen unbestimmt sein kann. Es ist immer

$$\text{(33.)} \qquad \begin{aligned} m_n &= k(1+\gamma_0)(1+\gamma_2)\dots(1+\gamma_{n-1}), \\ \lim_{n=\infty} m_n &= k\prod_0^\infty(1+\gamma_n), \end{aligned}$$

wo bei der Annahme (28.) $\lim\limits_{n=\infty}\gamma_n = 0$ ist. Die Unbestimmtheit des Productes (33.) erfordert bekanntlich, dass die positiven γ für sich, und die negativen für sich divergente Reihen bilden, und ferner, zufolge der Annahme $\lim\gamma_n = 0$, dass für $n = \infty$ sowohl unendlich viele consecutive positive, als auch unendlich viele consecutive negative γ vorkommen (vergl. § 2, zweite Note). Die erwähnte Divergenz erfordert wiederum, dass die Reihe $\sum\limits_0^\infty \delta_n$ divergirt. Diese Divergenz der δ_n-Reihe ist selbstverständlich auch nothwendig, wenn (33.) unendlich gross oder gleich Null sein soll*).

§ 7.

Die Zweitheilung. Durchaus steigende Functionen. Die Annahmen $p_{\mu k\varrho} = p_n > 1$, $q_{\mu k\varrho} = q_n < 1$.

Die einfachste Interpolationsmethode — die „Zweitheilung" — lässt sich in der That immer benutzen, wenn auch nicht immer mit demselben Vortheil. Wir werden sie im Folgenden zur Herstellung von durchaus

*) Die in den §§ 5 und 6 enthaltenen Betrachtungen sind selbstverständlich nicht ohne Beziehungen zu den Sätzen von *Dini* über Derivation unendlicher Reihen (Fondamenti p. 112—117; *Lüroth* und *Schepp* p. 150—156). Wir gehen jedoch auf diesen Zusammenhang hier nicht näher ein.

steigenden Functionen anwenden, während wir für unendlich oft oscillirende Functionen „Dreitheilung" vorziehen.

Man betrachte also z. B. das Intervall $0 \leqq x \leqq 1$. Die Endstellen seien primär, und $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, also $(S_0 T_0) = (0, 0; 1, 1)$, $f_0(x) = x$. Ferner seien die in $(S_\mu T_\mu)$ neu-eingeführten Werthepaare für $\mu \geqq 1$

$$(x_{\mu 1} y_{\mu 1}),\quad (x_{\mu 3} y_{\mu 3}),\quad \dots,\quad (x_{\mu, 2^\mu - 1} y_{\mu, 2^\mu - 1}),$$

oder kurz

$$c_{\mu 1},\qquad c_{\mu 3},\qquad \dots,\qquad c_{\mu, 2^\mu - 1}.$$

Die Richtungscoefficienten der successiven Glieder der gebrochenen Linie $(S_n T_n)$ seien

$$a_{n1},\quad a_{n2},\quad a_{n3},\quad \dots,\quad a_{n, 2^n},$$

und das Glied mit dem Richtungscoefficienten a_{ni} möge auch kurz als das Glied a_{ni} bezeichnet werden können. Wie man leicht findet ist für $\mu > 0$

$$(34.)\quad \left\{\begin{array}{lll} c_{\mu k} & \text{Anfangspunkt von} & a_{\mu+\varrho, 2^\varrho k + 1} \\ & \text{Endpunkt von} & a_{\mu+\varrho, 2^\varrho k} \end{array}\right\} \varrho \geqq 0,\; k \text{ ungerade } \leqq 2^\mu - 1.$$

Die Bedingung für den unaufhörlichen Zuwachs von $f(x_i)$ ist, dass die Grössen a_{ni} sämmtlich *positiv* sind, wobei jedoch selbstverständlich auch vorausgesetzt wird, dass die Abscisse des Schnittpunktes C zweier consecutiven Glieder AC, CB immer zwischen den Abscissen von A und B liegt. Dies erfordert zufolge (26.), dass immer entweder

$$(35.)\qquad \left\{\begin{array}{l} a_{n+1, 2i-1} > a_{n,i} > a_{n+1, 2i}, \\ \text{oder} \\ a_{n+1, 2i-1} < a_{n,i} < a_{n+1, 2i} \end{array}\right.$$

ist. Man setze

$$(36.)\qquad \frac{a_{\mu+\varrho+1, 2^{\varrho+1}k+1}}{a_{\mu+\varrho, 2^\varrho k+1}} = p_{\mu k \varrho},\quad \frac{a_{\mu+\varrho+1, 2^{\varrho+1}k}}{a_{\mu+\varrho, 2^\varrho k}} = q_{\mu k \varrho}. \qquad (\mu > 0)$$

Die Bedingungen (35.) können dann in folgender Form ausgedrückt werden. Für ungerade $i = 2^\varrho k + 1$ (k ungerade, $\varrho > 0$) soll

$$(37.)\quad \left\{\begin{array}{lll} \text{entweder} & p_{\mu k \varrho} > 1, & q_{\mu+\varrho, 2^\varrho k+1, 0} < 1, \\ \text{oder} & p_{\mu k \varrho} < 1, & q_{\mu+\varrho, 2^\varrho k+1, 0} > 1, \end{array}\right\} \mu = n - \varrho > 0$$

sein, aber für gerade $i = 2^\varrho k$

$$(38.)\quad \left\{\begin{array}{lll} \text{entweder} & q_{\mu k \varrho} < 1, & p_{\mu+\varrho, 2^\varrho k-1, 0} > 1, \\ \text{oder} & q_{\mu k \varrho} > 1, & p_{\mu+\varrho, 2^\varrho k-1, 0} < 1, \end{array}\right\} \mu = n - \varrho > 0.$$

Für $\mu = 0$ bleiben die Gleichungen (34.) bis (38.) noch gültig, wenn man $(0, 0)$ bez. $(1, 1)$ mit c_{00} bez. c_{01} bezeichnet (also $k = 0$ bez. 1 sein lässt).

Wir werden uns aber im Folgenden ausschliesslich mit solchen Fällen beschäftigen, bei denen die Grössen *p und q nur von $\mu+\varrho$ abhängen,* übrigens aber nicht von μ und ϱ, sowie auch nicht von k. Wir schreiben daher

$$(39.)\qquad p_{\mu k\varrho} = p_{\mu+\varrho} = p_n;\quad q_{\mu k\varrho} = q_{\mu+\varrho} = q_n.$$

Und es sei

$$\prod_{n=0}^{\infty} p_n = P,\quad \prod_{n=0}^{\infty} q_n = Q.$$

Die Bedingungen (37.), (38.) reduciren sich darauf, dass $p_n > 1$ und $q_n < 1$ ist, oder umgekehrt. Wir nehmen aber in den Paragraphen 7 bis 10 an, dass immer das erstere,

$$p_n > 1,\quad q_n < 1,$$

stattfindet, und können dann

$$(40.)\qquad p_n = 1+u_n,\quad q_n = 1-v_n$$

setzen, wo $u_n > 0$, $1 > v_n > 0$ ist.

Wir wissen zufolge (26.) dass die Entfernung zwischen zwei in S_n consecutiven Abscissen bei der Bildung von S_{n+1} im Verhältnisse $v_n : u_n$ getheilt wird. Die Längen der Theilstrecken sind somit, wenn man $u_n+v_n = s$ setzt, in

S_1	$\frac{v_0}{s_0}$,				$\frac{u_0}{s_0}$,			
S_2	$\frac{v_0v_1}{s_0s_1}$,		$\frac{v_0u_1}{s_0s_1}$,		$\frac{u_0v_1}{s_0s_1}$,		$\frac{u_0u_1}{s_0s_1}$,	
S_3	$\frac{v_0v_1v_2}{s_0s_1s_2}$,	$\frac{v_0v_1u_2}{s_0s_1s_2}$,	$\frac{v_0u_1v_2}{s_0s_1s_2}$,	$\frac{v_0u_1u_2}{s_0s_1s_2}$,	$\frac{u_0v_1v_2}{s_0s_1s_2}$,	$\frac{u_0v_1u_2}{s_0s_1s_2}$,	$\frac{u_0u_1v_2}{s_0s_1s_2}$,	$\frac{u_0u_1u_2}{s_0s_1s_2}$,

u. s. w.

Es ist hieraus leicht ersichtlich, dass die primären Abscissen sich durch Summen von Brüchen ausdrücken, deren Nenner aus Factoren s, und deren Zähler aus Factoren u und v auf folgende Weise zusammengesetzt sind. Es ist für $\mu \geqq 1$ und k gleich ungerade Zahl $< 2^\mu$

$$\frac{k}{2^\mu} = \frac{\varepsilon_0}{2} + \frac{\varepsilon_1}{2^2} + \frac{\varepsilon_2}{2^3} + \cdots + \frac{\varepsilon_{\mu-2}}{2^{\mu-1}} + \frac{1}{2^\mu},$$

wo die ε mit k und μ eindeutig bestimmt sind, und je gleich 0 oder 1. Es bedeute ε_{ϱ_i} die $i$te Grösse ε, welche gleich 1 ist; dann wird

$$x_{\mu k} = \sum_{i=1}^{\varrho_i=\mu-1} \frac{\prod_{n=0}^{\varrho_i-1}(z_n).v_{\varrho_i}}{s_0 s_1 \dots s_{\varrho_i}},$$

wo $z_n = u_n$ oder $= v_n$ ist, je nachdem $\varepsilon_n = 1$ oder $= 0$, was wir auch so schreiben können:

$$(41.)\qquad x_{\mu k} = \sum_{i=1}^{\varrho_i=\mu-1} \frac{\prod_{n=0}^{\varrho_i-1}[(1-\varepsilon_n)v_n+\varepsilon_n u_n].v_{\varrho_i}}{s_0 s_1 \dots s_{\varrho_i}}.$$

Das letzte Glied dieser Reihe bedeutet die Länge der $k$ten zu S_μ gehörenden Theilstrecke (mit $x_{\mu k}$ als Endpunkt); und die $2^\varrho k$te Strecke in $S_{\mu+\varrho}$ (welche auch $x_{\mu k}$ als Endpunkt hat) erhält man hieraus durch Multiplication mit

$$\frac{u_\mu}{s_\mu}.\frac{u_{\mu+1}}{s_{\mu+1}}.\frac{u_{\mu+2}}{s_{\mu+2}}\dots\frac{u_{\mu+\varrho-1}}{s_{\mu+\varrho-1}};$$

es ist mit anderen Worten

$$(42.)\qquad x_{\mu k}-x_{\mu+\varrho,2^\varrho k-1} = \frac{\prod_{n=0}^{\mu-2}[(1-\varepsilon_n)v_n+\varepsilon_n u_n].v_{\mu-1}}{s_0 s_1 \dots s_{\mu-1}}.\prod_{\lambda=0}^{\varrho-1}\frac{u_{\mu+\lambda}}{s_{\mu+\lambda}}.$$

Auf analoge Weise ergiebt sich

$$(43.)\qquad x_{\mu+\varrho,2^\varrho k+1}-x_{\mu k} = \frac{\prod_{n=0}^{\mu-2}[(1-\varepsilon_n)v_n+\varepsilon_n u_n].u_{\mu-1}}{s_0 s_1 \dots s_{\mu-1}}.\prod_{\lambda=0}^{\varrho-1}\frac{v_{\mu+\lambda}}{s_{\mu+\lambda}}.$$

Dass die primären Abscissen überall condensirt sind, ist damit gleichbedeutend, dass bei allen μ- und k-Werthen, die Ausdrücke (42.) und (43.) für $\varrho = \infty$ verschwinden. Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen hierfür sind aber offenbar

$$\prod_{n=0}^{\infty}\frac{u_n}{s_n} = 0,\quad \prod_{n=0}^{\infty}\frac{v_n}{s_n} = 0,$$

oder was dasselbe ist

$$(44.)\qquad \prod_0^\infty \frac{s_n}{u_n} = \prod_0^\infty\left(1+\frac{v_n}{u_n}\right) = \infty,\quad \prod_0^\infty\frac{s_n}{v_n} = \prod_0^\infty\left(1+\frac{u_n}{v_n}\right) = \infty.$$

Diese Bedingungen sind immer erfüllt, wenn $v_n : u_n$ und also auch $u_n : v_n$ zwischen endlichen und von Null verschiedenen Grenzen bleiben; ebenso wenn die Grenzwerthe der Quotienten derart unbestimmt sind, dass für $n = \infty$ sowohl unendlich kleine oder unendlich grosse Werthe als auch

endliche vorkommen. Wenn dagegen einfach

$$(45.)\qquad \lim_{n=\infty}\frac{u_n}{v_n}=0,\quad \text{oder}\quad \lim_{n=\infty}\frac{v_n}{u_n}=0$$

ist, so ist die zweite bezw. die erste der Bedingungen (44.) nicht mit Sicherheit erfüllt. Die Bedingung hierfür ist bekanntlich, dass die Reihe

$$(46.)\qquad \sum_0^\infty \frac{u_n}{v_n}\quad \text{bezw.}\quad \sum_0^\infty \frac{v_n}{u_n}$$

divergirt.

Die Grenzwerthe der zu den primären Punkten gehörenden hinteren bezw. vorderen Richtungscoefficienten drücken sich folgendermassen aus. Es ist für $c_{\mu k}$

$$(47.)\qquad \begin{cases} \lim\limits_{n=\infty}\overset{-}{m}_{in} = \lim\limits_{\varrho=\infty} a_{\mu+\varrho, 2^\varrho k} = a_{\mu,k}\cdot \prod\limits_{\lambda=0}^{\infty} q_{\mu+\lambda} \\ \qquad\qquad = \prod\limits_{n=0}^{\mu-2}[(1-\varepsilon_n)p_n+\varepsilon_n q_n]\cdot p_{\mu-1}\cdot \prod\limits_{\lambda=0}^{\infty} q_{\mu+\lambda}, \\ \lim\limits_{\varrho=\infty}\overset{+}{m}_{in} = \lim\limits_{n=\infty} a_{\mu+\varrho, 2^\varrho k+1} = a_{\mu,k+1}\cdot \prod\limits_{\lambda=0}^{\infty} p_{\mu+\lambda} \\ \qquad\qquad = \prod\limits_{n=0}^{\mu-2}[(1-\varepsilon_n)p_n+\varepsilon_n q_n]\cdot q_{\mu-1}\cdot \prod\limits_{\lambda=0}^{\infty} p_{\mu+\lambda}. \end{cases}$$

Zu jeder secundären Stelle x gehört eine völlig bestimmte unendliche Reihe von Nullen und Einsen $\varepsilon_0\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots$ derart, dass, wenn

$$(48.)\qquad \frac{\varepsilon_0}{2}+\frac{\varepsilon_1}{2^2}+\frac{\varepsilon_2}{2^3}+\cdots+\frac{\varepsilon_{\lambda-1}}{2^\lambda}=\frac{k}{2^\mu}\quad (k \text{ ungerade, } \mu \leqq \lambda)$$

ist, x zwischen $x_{\mu k}$ und der in S_λ nächstfolgenden Abscisse liegt. Und zwar hat die ε-Reihe die Eigenschaft, dass nicht alle ε von einem gewissen an gleich Null, oder alle gleich Eins sind (sonst erhielte man eine primäre Abscisse). Die successiven $x_{\mu k}$ sind dieselben, welche wir oben mit ξ bezeichnet haben. Es ist somit nach (41.)

$$(49.)\qquad x = \xi_1+\sum_{i=2}^{\infty}(\xi_i-\xi_{i-1}) = \sum_{i=1}^{i=\infty}\frac{\prod\limits_{n=0}^{\varrho_i-1}[(1-\varepsilon_n)v_n+\varepsilon_n u_n]\cdot v_{\varrho_i}}{s_0 s_1\ldots s_{\varrho_i}}.$$

Die entsprechende Ordinate y bestimmt sich nach (13.):

$$(50.)\qquad y = U_1\xi_1+\sum_{i=2}^{\infty}U_i(\xi_i-\xi_{i-1})$$

(mit endlicher Gliederanzahl erhält man primäre Ordinaten). Und die Grössen U_i bestimmen sich in unserem jetzigen Falle auf folgende ein-

fache Weise: Es ist

$$(51.)\qquad U_i = \prod_{n=0}^{\varrho_i-1} [(1-\varepsilon_n)p_n+\varepsilon_n q_n]p_{\varrho_i}.$$

Man sieht dies so einfach ein, dass wir die Herleitung nicht näher ausführen. Auf analoge Weise findet man, dass

$$(52.)\qquad V_i = \prod_{n=0}^{\sigma_i-1} [(1-\varepsilon_n)p_n+\varepsilon_n q_n]q_{\sigma_i}$$

ist, wenn ε_{σ_i} die $i$te Grösse ε bedeutet, welche gleich Null ist. Dagegen ist die oben mit m_n bezeichnete Grösse einfach

$$(53.)\qquad m_n = \prod_{i=0}^{n-1} [(1-\varepsilon_i)p_i+\varepsilon_i q_i]. \qquad (m_0 = 1)$$

§ 8.

P endlich, $Q > 0$.

Die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Endlichkeit von P ist bekanntlich die Convergenz der Reihe Σu_n, und die Bedingung $Q > 0$ ist damit gleichbedeutend, dass Σv_n convergirt. Für die Convergenz der Reihen ist wiederum nothwendig, dass

$$\lim u_n = \lim v_n = 0 \quad \text{ist, d. h.} \quad \lim p_n = \lim q_n = 1.$$

Selbstverständlich nehmen wir auch an, dass die primären Abscissen überall condensirt sind, was bei den in (45.), (46.) liegenden Beschränkungen immer der Fall ist.

Unter diesen Voraussetzungen bleiben die Richtungscoefficienten der Glieder der gebrochenen Linie $(S_n T_n)$ endlich. Sie liegen nämlich zwischen Q und P, wie sich ohne weiteres aus (47.) und (53.) ergiebt. Hieraus folgt [s. § 4.], dass die Function $f(x_i)$ nicht nur „quasi-stetig", sondern auch „gleichförmig", die Function $f(x)$ also *stetig* ist.

Die Grössen $\lim\limits_{n=\infty} \overset{-}{m}_{in}$, $\lim\limits_{n=\infty} \overset{+}{m}_{in}$, $\lim\limits_{n=\infty} m_n$, $\lim\limits_{i=\infty} U_i$, $\lim\limits_{i=\infty} V_i$ haben überall *bestimmte* Werthe, wie aus (47.), (53.), (51.), (52.) folgt. Und aus (51.), (52.), (53.) schliesst man ausserdem, dass in der That für jede secundäre Stelle

$$(54.)\qquad \lim_{i=\infty} U_i = \lim_{i=\infty} V_i = \lim_{n=\infty} m_n$$

ist. Da nämlich (53.) für $n = \infty$ offenbar unbedingt convergirt (d. h. die

entsprechende Logarithmenreihe unbedingt convergirt), so wird die in den Ausdrücken (51.), (52.) liegende Zusammenfassung consecutiver in (53.) eingehender Factoren ohne Bedeutung für den Grenzwerth. Oder: (54.) muss gelten, weil die Bedingung (28.) in unserem jetzigen Falle erfüllt ist, da δ_n gleich der grössten der zwei positiven Grössen u_n, v_n ist, und $\lim u_n = \lim v_n = 0$.

Es bleibt übrig, zu untersuchen, ob $f'_-(x_i)$, $f'_+(x_i)$, $f'(x)$ bezw. gleich $\overset{-}{\lim} m_{in}$, $\overset{+}{\lim} m_{in}$, $\lim m_n$ sind.

Die Verbindungslinie der in § 5 mit $(\xi_\varrho \eta_\varrho)$, $(\xi_{\varrho+1}, \eta_{\varrho+1})$ bezeichneten Punkte ist bei Zweitheilung immer ein Glied der gebrochenen Linie

$$(S_{\mu+\varrho+1}, T_{\mu+\varrho+1}),$$

die Function $\varphi_{\mu+\varrho}(x)$ nichts anderes als $f_{\mu+\varrho+1}(x)$, und $\delta^{(\lambda)}_{\varrho k} = \eta^{(\lambda)}_{\varrho k} - f_{\mu+\varrho+1}(\xi^{(\lambda)}_{\varrho k})$. Und analog für secundäre Stellen (§ 6). Aus den Betrachtungen in § 5 und § 6 folgt somit, dass sowohl an primären als an secundären Stellen $f'_+(x)$ und $f'_-(x)$ mit $\overset{+}{\lim} m_{in}$ oder $\lim V_i$ bezw. $\overset{-}{\lim} m_{in}$ oder $\lim U_i$ übereinstimmen, falls diese Grössen bestimmt sind, unter der Voraussetzung, dass folgende Bedingung erfüllt ist. Es seien x_i und x_k zwei in S_n consecutive Abscissen, und es bedeute $\xi^{(\lambda)}_{nh}$ die λte Abscisse, welche im Intervalle $x_i \dots x_k$ bei der Bildung von S_{n+h} neu eingeführt wird; die fragliche Bedingung ist, dass wenn die Lage von x_i auf beliebige Weise mit n variirt, sowie auch h und λ,

$$(55.) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{\eta^{(\lambda)}_{nh} - f_n(\xi^{(\lambda)}_{nh})}{\xi^{(\lambda)}_{nh} - x_i} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n=\infty} \frac{\eta^{(\lambda)}_{nh} - f_n(\xi^{(\lambda)}_{nh})}{x_k - \xi^{(\lambda)}_{nh}} = 0$$

ist [$\eta^{(\lambda)}_{nh}$ die primäre Ordinate, welche $\xi^{(\lambda)}_{nh}$ entspricht], oder kurz

$$(56.) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{d^{(\lambda)}_{nh}}{\xi^{(\lambda)}_{nh} - x_i} = 0, \quad \lim_{n=\infty} \frac{d^{(\lambda)}_{nh}}{x_k - \xi^{(\lambda)}_{nh}} = 0.$$

Diese Bedingung — welche immer bei Zweitheilung hinreichend, wenn auch nicht nothwendig ist — ist in der That unter unseren jetzigen Annahmen [die Function durchaus steigend, $p_n > 1$, $q_n < 1$, P endlich, $Q > 0$] immer erfüllt.

Man setze

$$(57.) \qquad \prod_{i=n}^{\infty} p_i = R_n, \quad \prod_{i=n}^{\infty} q_i = R'_n.$$

Es sei m der Richtungscoefficient des Gliedes $(x_i y_i) \dots (x_k y_k)$, und man lege durch $(x_i y_i)$ bezw. $(x_k y_k)$ Linienstücke mit den Richtungscoefficienten $m R_n$

bez. mR'_n. Die so erhaltene zweigliedrige gebrochene Linie repräsentirt zwischen x_i und x_k eine stetige Function, welche wir mit $F_{ik}(x)$ bezeichnen wollen. Der Richtungscoefficient eines beliebigen zum Gebiete $x_i \dots x_k$ gehörenden Gliedes der gebrochenen Linie $(S_{n+h}T_{n+h})$ [h beliebig gross] hat die Form $m.r_n r_{n+1} \dots r_{n+h-1}$, wo jeder Factor $r_i = p_i$ oder q_i ist, und ist also $< mR_n$ aber $> mR'_n$. Hieraus ist ersichtlich, dass jede zur Strecke $x_i \dots x_k$ gehörende primäre Ordinate kleiner sein muss als die entsprechende F_{ik}-Ordinate, d. h. für alle h und λ

$$(58.)\qquad \eta_{nh}^{(\lambda)} < F_{ik}(\xi_{nh}^{(\lambda)}),\quad d_{nh}^{(\lambda)} < F_{ik}(\xi_{nh}^{(\lambda)}) - f_n(\xi_{nh}^{(\lambda)}) = D_{nh}^{(\lambda)}.$$

Andererseits bestimmt sich die Grösse $F_{ik}(x) - f_n(x)$ folgendermassen. Die zwei Linienstücke, welche der Function $F_{ik}(x)$ entsprechen, schneiden sich zufolge (26.) in einem Punkte mit der Abscisse

$$(59.)\qquad \xi = x_i + \frac{1-R'_n}{R_n - R'_n}(x_k - x_i) = x_k - \frac{R_n - 1}{R_n - R'_n}(x_k - x_i).$$

Es ist also

$$(60.)\qquad \begin{cases} \text{für}\quad x_i < x < \xi, & F_{ik}(x) = y_i + mR_n(x-x_i) < y_k - mR'_n(x_k - x), \\ \quad ,, \quad \xi < x < x_k, & F_{ik}(x) = y_k - mR'_n(x_k - x) < y_i + mR_n(x - x_i). \end{cases}$$

Andererseits ist immer für $x_i < x < x_k$

$$(61.)\qquad f_n(x) = y_i + m(x - x_i) = y_k - m(x_k - x).$$

Folglich wird

$$(62.)\qquad \begin{cases} \text{für}\ x_i < x < \xi, & F_{ik}(x) - f_n(x) = m(R_n - 1)(x - x_i) < m(1 - R'_n)(x_k - x), \\ \quad ,, \quad \xi < x < x_k, & F_{ik}(x) - f_n(x) = m(1 - R'_n)(x_k - x) < m(R_n - 1)(x - x_i). \end{cases}$$

Hieraus ergiebt sich, da m endlich bleibt und $\lim\limits_{n=\infty} R_n = \lim\limits_{n=\infty} R'_n = 1$ ist, dass für das ganze Intervall $x_i \dots x_k$

$$(63.)\qquad \lim_{n=\infty} \frac{D_{nh}^{(\lambda)}}{\xi_{nh}^{(\lambda)} - x_i} = 0,\quad \lim_{n=\infty} \frac{D_{nh}^{(\lambda)}}{x_k - \xi_{nh}^{(\lambda)}} = 0$$

ist, weshalb zufolge (58.) *a fortiori* die Bedingung (56.) erfüllt ist, w. z. b. w. — Zu bemerken ist hierbei, dass die Gültigkeit von (58.) bis (62.) nicht die Bedingungen $P < \infty$, $Q < 0$ voraussetzt.

Die bei unseren jetzigen Annahmen entstehende Function $f(x)$ hat somit folgende Eigenschaften: *die Function ist stetig und nimmt mit x durchgehends zu; die Derivirten $f'_+(x)$ und $f'_-(x)$ sind überall bestimmt, endlich und von Null verschieden; sie sind auch unter einander gleich* [$= f'(x)$] *mit Aus-*

nahme für eine abzählbare, überall condensirte Menge von x-Werthen (die primären).

In Bezug auf das Verhalten des Quotienten $u_n : v_n$ können wir zwei Hauptfälle unterscheiden: $\infty > \lim(u_n : v_n) > 0$ und $\lim(u_n : v_n) = 0$ oder ∞. Dem ersten Fall entspricht als einfachste Annahme $v_n = u_n$. Die primären Abscissen werden dann nichts anderes als die x-Werthe $\frac{k}{2^\mu}$, k ungerade $< 2^\mu$. Einfaches Beispiel:

$$(64.)\qquad u_n = v_n = \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Wenn $\lim(u_n : v_n) = 0$ sein soll, muss ja [s. (46.)] die Reihe $\Sigma(u_n : v_n)$ divergiren. Dass dies wirklich mit den Bedingungen Σu_n convergent, Σv_n convergent, $\lim(u_n : v_n) = 0$ vereinbar ist, zeigen folgende Beispiele:

$$(65.)\qquad \begin{cases} 1) \quad u_n = \dfrac{1}{2^{n+1}}, \quad v_n = \dfrac{n+1}{2^{n+1}}, \quad \text{also} \quad \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{1}{n+1}; \\ 2) \quad u_n = \dfrac{1}{\underline{|n+3}}, \quad v_n = \dfrac{1}{\underline{|n+2}}, \quad \text{also} \quad \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{1}{n+3}. \end{cases}$$

Wenn man $\lim(u_n : v_n) = \infty$ haben will, hat man nur die Werthe von u_n und v_n zu vertauschen.

Namentlich die Function (64.) kann als einfaches und typisches Beispiel von Functionen der erwähnten Art bezeichnet werden.

In Bezug auf die Derivirten fügen wir folgende Bemerkung hinzu. In den secundären Stellen haben wir es mit einer eindeutigen Function $f'(x)$ zu thun. Und der Ausdruck (53.) zeigt ohne weiteres, dass diese Function *stetig* ist. Wenn man sich aber mittelst einer Reihe secundärer Stellen unbegrenzt an eine primäre Stelle x_i nähert, so erhält $f'(x)$ verschiedene Grenzwerthe $f'_+(x_i)$ und $f'_-(x_i)$, je nachdem die Annäherung von oben oder von unten stattfindet. Wir haben also beiläufig ein Mittel gefunden, eine gewisse Art „punktirt unstetiger" Functionen darzustellen.

§ 9.

P endlich, $Q = 0$,

Das Verschwinden von Q ist damit gleichbedeutend, dass die Reihe Σv_n divergirt, und $P < \infty$ giebt die Convergenz von Σu_n. Unter der Annahme $P < \infty$, $Q = 0$ kann folglich der Quotient $u_n : v_n$ keine von Null verschiedene untere Grenze haben; dann würde nämlich aus der Divergenz

der v-Reihe auch die Divergenz der u-Reihe folgen; es ist also $\lim_{n=\infty}(u_n : v_n)$ entweder $= 0$, oder unbestimmt mit Null als unterer Grenze. Andererseits muss zufolge (46.) $\Sigma(u_n : v_n)$ divergiren; dies giebt, mit der Convergenz von Σu_n combinirt, dass auch v_n keine von Null verschiedene untere Grenze haben kann. Wenn wir von Unbestimmtheitsfällen für $\lim v_n$ und $\lim(u_n : v_n)$ absehen, sind also folgende Bedingungen zu erfüllen: es soll

$$(66.)\quad \begin{cases} \sum_0^\infty u_n \text{ convergiren, } \sum_0^\infty v_n \text{ divergiren,} \\ \lim v_n = \lim \frac{u_n}{v_n} = 0 \text{ sein, und } \sum_0^\infty \frac{u_n}{v_n} \text{ divergiren.} \end{cases}$$

Dass diese Bedingungen wirklich vereinbar sind, zeigt folgendes Beispiel:

$$(67.)\qquad u_n = \frac{1}{(n+2)^2},\quad v_n = \frac{n+1}{(n+2)^2},\quad \frac{u_n}{v_n} = \frac{1}{n+1}.$$

Die angedeuteten Unbestimmtheitsfälle sind dagegen in folgenden Beispielen realisirt:

$$(68.)\quad \begin{cases} 1) \text{ für unger. } n : u_n = \frac{1}{2^{n+1}},\ v_n = \frac{1}{2^n}, \text{ für ger. } n : u_n = \frac{1}{2^{n+1}},\ v_n = \frac{1}{2}; \\ 2) \qquad \frac{1}{\underline{|n+3}},\quad \frac{1}{\underline{|n+2}},\qquad \frac{1}{2^{n+1}},\quad \frac{1}{2}; \\ 3) \qquad \frac{1}{\underline{|n+2}},\quad \frac{n+1}{\underline{|n+2}},\qquad \frac{1}{\underline{|n+2}},\quad \frac{1}{2}. \end{cases}$$

In sämmtlichen nun fraglichen Fällen gilt es wie im vorigen Paragraphen, dass die entstehende Function $f(x)$ stetig ist und dass die Grössen $\overset{+}{m}_{in}$, $\overset{-}{m}_{in}$, m_n, U_i, V_i bestimmte endliche Grenzwerthe ($\geqq 0$) haben. Und zwar ist immer $\lim \overset{+}{m}_{in} > 0$, wie im vorigen Falle, aber $\lim \overset{-}{m}_{in} = 0$. Aus diesem Umstande geht zufolge des Theorems § 5 hervor, dass an jeder primären Stelle auch $f'_-(x_i) = 0$ ist. Da das Theorem auch für secundäre Stellen gültig ist (s. § 6), so ist auch $f'_-(x) = 0$ an jeder secundären Stelle, wo $\lim_{i=\infty} U_i = 0$ ist.

Eingehender werden wir nur den Fall (66.) untersuchen. Da in diesem Falle die Bedingung (28.) erfüllt ist, hat man für alle secundären Stellen $\lim U_i = \lim V_i = \lim m_n$. Es ist ferner leicht zu finden, dass $\lim m_n$ für eine überall condensirte, nicht-abzählbare x-Menge gleich 0 ist, und für eine andere derartige Menge > 0. Es sei

$$(69.)\qquad l_0 + l_1 + l_2 + \cdots + l_n + \cdots$$

eine Reihe positiver Grössen, welche divergirt, obgleich $\lim l_n = 0$ ist. Zufolge der letzten Annahme muss man, wenn α eine beliebige positive Grösse < 1 ist, eine Reihe von unaufhörlich und in infinitum wachsenden ganzen positiven Zahlen

$$n_1, \quad n_2, \quad \ldots, \quad n_i, \quad \ldots$$

so bestimmen können, dass

$$\frac{l_{n_2}}{l_{n_1}} < \alpha, \quad \frac{l_{n_3}}{l_{n_2}} < \alpha, \quad \ldots, \quad \frac{l_{n_{i+1}}}{l_{n_i}} < \alpha, \quad \ldots, \quad \text{in inf.}$$

wird. Dann ist

$$\sum_{i=1}^{\infty} l_{n_i} < \frac{l_{n_1}}{1-\alpha},$$

also $\sum\limits_{i=1}^{\infty} l_{n_i}$ convergent. Dasselbe gilt folglich auch für jede Reihe, welche man aus Σl_{n_i} durch Weglassung einer endlichen oder unendlichen Anzahl von Gliedern erhalten kann. Aber diese Reihen bilden eine nicht-abzählbare Menge, denn sie entstehen durch Multiplication der Glieder der Reihe Σl_{n_i} mit 0 oder 1, mit beliebiger Vertheilung der Nullen und Einsen, ganz wie die Gesammtheit aller rationalen und irrationalen Zahlen zwischen 0 und 1 aus der Reihe

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots.$$

Die aus $\sum\limits_{n=1}^{\infty} l_n$ entstehenden Partialreihen, welche convergent sind, bilden also *a fortiori* eine nicht-abzählbare Menge. Dies muss dann auch von den divergenten Partialreihen gelten; denn jeder convergenten Partialreihe entspricht als Restreihe eine divergente; und die Mächtigkeit der divergenten kann also nicht kleiner sein, als diejenige der convergenten. Dasselbe gilt, wenn die Glieder von (69.) sämmtlich < 0 sind. Es sei nun $l_n = \log q_n$ (also < 0). Die Gesammtheit der negativen Glieder im Logarithmus des unendlichen Productes (53.) ist dann eine Partialreihe von (69.), und $\log \lim m_n$ ist endlich oder $= -\infty$, also $\lim m_n >$ oder $= 0$, je nachdem diese Partialreihe convergirt oder divergirt. Umgekehrt entspricht jeder solchen Partialreihe eine bestimmte secundäre Stelle, nämlich diejenige, in deren ε-Reihe die ε_n, welche $= 1$ sind, dieselben Indices (n) haben, wie die l_n, welche in der Partialreihe eingehen. Die secundären x vertheilen sich also in eine nicht-abzählbare Menge, für welche $\lim m_n > 0$ ist, und

eine andere nicht-abzählbare Menge mit $\lim m_n = 0$. Beide Mengen sind auch überall condensirt. Es sei nämlich x_i eine beliebige primäre Stelle, in deren ε-Reihe $\varepsilon_{\mu-1}$ die letzte Eins ist; und man betrachte die secundären Stellen, für welche die μ ersten ε dieselben sind, wie für x_i, während wenigstens λ von den nächstfolgenden $[\varepsilon_\mu, \varepsilon_{\mu+1}, \ldots, \varepsilon_{\mu+\lambda-1}]$ sämmtlich gleich Null sind; wenn λ hinreichend gross ist, liegen alle diese Stellen beliebig nahe an x_i; andererseits kann man in der Reihe $\varepsilon_{\mu+\lambda}, \varepsilon_{\mu+\lambda+1}, \ldots$ die Nullen und Einsen so vertheilen, dass die Partialreihe l_{n_i}, welche den Einsen entspricht, convergirt, oder so dass sie divergirt; hieraus folgt, dass beliebig nahe an x_i secundäre Stellen mit $\lim m_n > 0$, und ebenso Stellen mit $\lim m_n = 0$ sich befinden; da dies für alle primäre Stellen gilt, und da diese condensirt sind, so folgt, dass für eine überall condensirte, nicht-abzählbare secundäre x-Menge $\lim m_n = 0$, und für eine andere derartige Menge $\lim m_n > 0$ ist, w. z. b. w.

Ferner ist wie im vorigen Paragraphen zu zeigen, dass die erste der Bedingungen (56.) erfüllt ist, woraus folgt, dass an allen primären Stellen $f'_+(x_i) = \lim \overset{+}{m}_{in}$, und an allen secundären $f'_+(x) = \lim V_i = \lim m_n$ ist. Und an den secundären Stellen mit $\lim m_n = \lim U_i = 0$ wird zufolge des auf secundäre Stellen ausgedehnten Theorems § 5, wie schon bemerkt, auch $f'_-(x) = 0$. Es bleibt übrig, die Stellen mit $\lim U_i > 0$ zu betrachten. Da die erste der Gleichungen (56.) erfüllt ist, so gilt es *a fortiori*, dass

$$\text{(70.)} \qquad \lim_{n=\infty} \frac{d_{nk}^{(\lambda)}}{x_k - x_i} = 0$$

ist, und also, wenn $x_i = \xi_\varrho$, $x_k = \xi_{\varrho+1}$ successive Annäherungswerthe an eine secundäre Stelle x sind,

$$\text{(71.)} \qquad \lim_{\varrho=\infty} \frac{d_{\varrho k}^{(\lambda)}}{\xi_{\varrho+1} - \xi_\varrho} = 0,$$

wo die Bedeutung von $d_{\varrho k}^{(\lambda)}$ derjenigen in § 5 analog ist.

Die zweite der Bedingungen (56.) ist dagegen nicht erfüllt: die Herleitung in § 8 wird ungültig, wenn $Q = 0$ und also $R'_n = 0$ ist; und in der That muss offenbar, wenn man λ hinreichend gross nimmt, der Quotient $d_{\varrho k}^{(\lambda)} : (\xi_{\varrho+1} - \xi_\varrho)$ sich unbegrenzt an $\lim U_\varrho$ nähern. Andererseits ist immer $\lim (x - \xi_{\varrho+1}) : (\xi_{\varrho+1} - \xi_\varrho) = 0$, d. h. $\lim \lambda_\varrho = 1$ [Gleichung (20.)]. Dies ergiebt sich leicht: In dem Systeme S_n, wo ξ_ϱ neu-eingeführt ist, sei ξ'_ϱ die consecutive

Abscisse (also $\xi_\varrho < x < \xi'_\varrho$); zufolge (26.) ist

$$(72.)\qquad \xi_{\varrho+1}-\xi_\varrho = (\xi'_\varrho-\xi_\varrho)\cdot\frac{v_n}{s_n}\cdot\frac{v_{n+1}}{s_{n+1}}\cdots\frac{v_{n+n_1}}{s_{n+n_1}},$$

wo n_1 die Anzahl der consecutiven Nullen in der ε-Reihe ist, welche nach $\varepsilon_{n-1}=1$ folgen; dagegen wird

$$(73.)\qquad \xi'_{\varrho+1}-\xi_{\varrho+1} = (\xi'_\varrho-\xi_\varrho)\cdot\frac{v_n}{s_n}\cdot\frac{v_{n+1}}{s_{n+1}}\cdots\frac{v_{n+n_1-1}}{s_{n+n_1-1}}\cdot\frac{u_{n+n_1}}{s_{n+n_1}} = (\xi_{\varrho+1}-\xi_\varrho)\cdot\frac{u_{n+n_1}}{v_{n+n_1}};$$

aber $x-\xi_{\varrho+1}$ ist $<\xi'_{\varrho+1}-\xi_{\varrho+1}$; also wird

$$\frac{x-\xi_{\varrho+1}}{\xi_{\varrho+1}-\xi_\varrho} < \frac{u_{n+n_1}}{v_{n+n_1}},\quad \text{und also } \lim\frac{x-\xi_{\varrho+1}}{\xi_{\varrho+1}-\xi_\varrho} = 0.$$

Die Bedingungen für die Gleichheit von $f'_-(x)$ und $\lim U_\varrho$ können folgendermassen formulirt werden (wie man durch leichte Modification einer Betrachtung in § 5 findet): es soll möglich sein, vier positive Grössen g_ϱ, z_ϱ, h_ϱ, u_ϱ so zu bestimmen, dass

$$(74.)\qquad \begin{cases} d^{(\lambda)}_{\varrho k} : (\xi_{\varrho+1}-\xi^{(\lambda)}_{\varrho k}) < g_\varrho & \text{ist, sobald}\quad \xi_{\varrho+1}-\xi^{(\lambda)}_{\varrho k} > z_\varrho,\\ d^{(\lambda)}_{\varrho k} : (x-\xi_{\varrho+1}) < h_\varrho & \text{,,}\quad\text{,,}\quad \xi_{\varrho+1}-\xi^{(\lambda)}_{\varrho k} < u_\varrho,\\ \lim g_\varrho = 0,\quad \lim\dfrac{z_\varrho}{\xi_{\varrho+1}-\xi_\varrho} = 0, & \lim h_\varrho = 0,\quad u_\varrho > z_\varrho. \end{cases}$$

Zu bemerken ist hierbei, dass diese Bedingungen sowohl hinreichend als auch nothwendig bleiben, wenn man $x-\xi_{\varrho+1}$ durch $\xi_{\varrho+2}-\xi_{\varrho+1}$ ersetzt, da ja diese Grössen unendlich klein von derselben Ordnung sind, weil

$$\lim(x-\xi_{\varrho+2}):(\xi_{\varrho+2}-\xi_{\varrho+1}) = 0$$

ist.

Andererseits bleiben (74.) hinreichend, aber nicht nothwendig, wenn man $d^{(\lambda)}_{\varrho k}$ durch die grössere $D^{(\lambda)}_{\varrho k}$ (§ 8) ersetzt. Und die Gleichungen (59.) u. s. w. sind auch im jetzigen Falle gültig, wenn man in denselben ξ_ϱ, $\xi_{\varrho+1}$, $n+n_1+1$ statt x_i, x_k, n einführt und $R'_n = 0$ setzt; (59.) wird also

$$(75.)\qquad \xi = \xi_\varrho + \frac{\xi_{\varrho+1}-\xi_\varrho}{R_{n+n_1+1}} = \xi_{\varrho+1}-(R_{n+n_1+1}-1)\cdot\frac{\xi_{\varrho+1}-\xi_\varrho}{R_{n+n_1+1}}.$$

Und zufolge (62.) wird

$$(76.)\qquad \begin{cases} \text{für}\quad \xi_\varrho < \xi^{(\lambda)}_{\varrho k} < \xi, & D^{(\lambda)}_{\varrho k} = U_\varrho(R_{n+n_1-1}-1)(\xi^{(\lambda)}_{\varrho k}-\xi_\varrho),\\ \text{,,}\quad \xi < \xi^{(\lambda)}_{\varrho k} < \xi_{\varrho+1}, & D^{(\lambda)}_{\varrho k} = U_\varrho(\xi_{\varrho+1}-\xi^{(\lambda)}_{\varrho k}). \end{cases}$$

Die Bedingungen (74.) sind erfüllt, wenn $\xi_{\varrho+1}-\xi$ unendlich klein von höherer Ordnung als $\xi_{\varrho+2}-\xi_{\varrho+1}$ ist. Denn immer ist für $\xi^{(\lambda)}_{\varrho k} > \xi$:

$$\lim D^{(\lambda)}_{\varrho k} : (\xi_{\varrho+1}-\xi^{(\lambda)}_{\varrho k}) = \lim U_\varrho,$$

und folglich $\lim D_{\varrho k}^{(\lambda)} : (\xi_{\varrho+2} - \xi_{\varrho+1}) = 0$, wenn $\lim(\xi_{\varrho+1} - \xi) : (\xi_{\varrho+2} - \xi_{\varrho+1}) = 0$ und also auch $\lim(\xi_{\varrho+1} - \xi_{\varrho k}^{(\lambda)}) : (\xi_{\varrho+2} - \xi_{\varrho+1}) = 0$ ist. Und für $\xi_{\varrho k}^{(\lambda)} < \xi$ nimmt $D_{\varrho k}^{(\lambda)}$ mit $\xi_{\varrho k}^{(\lambda)}$ ab, während $\xi_{\varrho+2} - \xi_{\varrho k}^{(\lambda)}$ wächst; also nimmt $D_{\varrho k}^{(\lambda)} : (\xi_{\varrho+2} - \xi_{\varrho k}^{(\lambda)})$ mit $\xi_{\varrho k}^{(\lambda)}$ ab. Hieraus folgt, dass unter den fraglichen Annahmen, ganz unabhängig von der Lage von $\xi_{\varrho k}^{(\lambda)}$, der Quotient $D_{\varrho k}^{(\lambda)} : (\xi_{\varrho+2} - \xi_{\varrho k}^{(\lambda)})$, und also *a fortiori* $d_{\varrho k}^{(\lambda)} : (\xi_{\varrho+2} - \xi_{\varrho k}^{(\lambda)})$ für $\varrho = \infty$ verschwindet; selbstverständlich sind dann die Bedingungen (74.) erfüllt. Es ist aber

$$(77.)\quad \begin{cases} \xi_{\varrho+2} - \xi_{\varrho+1} = (\xi'_{\varrho+1} - \xi_{\varrho+1}) \cdot \frac{v_{n+n_1+1}}{s_{n+n_1+1}} \cdots \frac{v_{n+n_1+n_2}}{s_{n+n_1+n_2}} \\ \qquad = (\xi_{\varrho+1} - \xi_{\varrho}) \cdot \frac{u_{n+n_1}}{v_{n+n_1}} \cdot \frac{v_{n+n_1+1}}{s_{n+n_1+1}} \cdots \frac{v_{n+n_1+n_2}}{s_{n+n_1+n_2}}, \end{cases}$$

wo n_2 eine gewisse ganze Zahl ist. Die obige Bedingung reducirt sich also darauf, dass

$$(78.)\quad (R_{n+n_1+1} - 1) \cdot \frac{v_{n+n_1}}{u_{n+n_1}} \cdot \frac{s_{n+n_1+1}}{v_{n+n_1+1}} \cdots \frac{s_{n+n_1+n_2}}{v_{n+n_1+n_2}}$$

bei dem Grenzübergange verschwindet.

Wenn n_2 endlich bleibt — was damit gleichbedeutend ist, dass die Anzahl consecutiver Nullen in der ε-Reihe endlich bleibt — so hat das Product aus Factoren der Form $s_i : v_i$ den Grenzwerth 1, da dies von jedem Factor gilt, und die Bedingung (78.) wird einfach

$$(79.)\quad \lim_{n=\infty} (R_n - 1) \cdot \frac{v_n}{u_n} = 0.$$

Dass diese Bedingung wirklich erfüllbar ist, werden wir unten zeigen.

Wenn aber n_2 nicht endlich bleibt, folgt nicht länger (78.) aus (79.), weil das Product aus Factoren der Form $s_i : v_i$ dann nicht mit Sicherheit endlich bleibt. In der That lässt sich zeigen, dass es secundäre Stellen geben muss, für welche $D_{\varrho k}^{(\lambda)} : (\xi_{\varrho+2} - \xi_{\varrho k}^{(\lambda)})$ nicht bei jedem Grenzübergange verschwindet. Hieraus folgt jedoch nicht, dass auch $\lim d_{\varrho k}^{(\lambda)} : (\xi_{\varrho+2} - \xi_{\varrho k}^{(\lambda)})$ von Null verschieden sein kann. Aber man kann direct zeigen, dass für eine überall condensirte, nicht-abzählbare x-Menge, der letzterwähnte Grenzwerth nicht unbedingt $= 0$, also $f'_-(x)$ nicht bestimmt ist. Es hängt dies, kurz gesagt, davon ab, dass die Zahl n_2 *unabhängig* von n und n_1 ist (wenn man sämmtliche secundäre x berücksichtigt). Genauer kann man den Nachweis folgendermassen führen. Es seien wieder x_i und x_k zwei in S_n consecutive Abscissen, und man lasse sie auf beliebige Weise mit n

variiren, doch so, dass der Richtungscoefficient der Strecke $(x_i y_i)\dots(x_k y_k)$ eine von Null verschiedene untere Grenze hat. Es ist dann möglich, jedem n-Werthe einen positiven, echten Bruch α_n mit $\lim_{n=\infty}\alpha_n = 1$ so zuzuordnen, dass für beliebige x zwischen $x_i+\alpha_n.(x_k-x_i)$ und x_k der Quotient

$$[f(x)-f_n(x)]:(x_k-x)$$

oberhalb einer Grenze $A>0$ bleibt (s. oben). Es bedeute andererseits β_{n,t_n} die Proportion zwischen der grössten Differenz consecutiver Abscissen in S_{n+t_n} und der kleinsten Abscissendifferenz in S_n (t_n eine beliebige ganze Zahl >0). Für einen hinreichend grossen t_n-Werth wird β_{n,t_n} beliebig klein. Man bestimme die successiven t_n so, dass β_{n,t_n}, oder kurz $\beta_n < 1-\alpha_n$ ist, und folglich $\lim\beta_n = 0$ (was $\lim t_n = \infty$ voraussetzt). Für alle x-Werthe zwischen $x_i+\alpha_n.(x_k-x_i)$ und der grösseren Abscisse $x_k-\beta_n.(x_k-x_i)$ wird dann x_k-x grösser als eine beliebige Abscissendifferenz in S_{n+t_n}.

Man schreibe nun wieder ξ_ϱ und $\xi_{\varrho+1}$ statt x_i und x_k, und lasse n und n_1 die vorige Bedeutung haben. Die Zahl n_2 nehme man aber gleich t_{n+n_1+1}. Dann wird $\xi_\varrho+\alpha_{n+n_1+1}.(\xi_{\varrho+1}-\xi_\varrho) < \xi_{\varrho+1}-\beta_{n+n_1+1}.(\xi_{\varrho+1}-\xi_\varrho)$, und für alle x zwischen diesen Grenzen ist, dem Vorigen zufolge, einerseits

$$[f(x)-f_{n+n_1+1}(x)]:(\xi_{\varrho+1}-x) > A,$$

andererseits $\xi_{\varrho+1}-x > \xi_{\varrho+2}-\xi_{\varrho+1}$; folglich wird

$$[f(x)-f_{n+n_1+1}(x)]:(\xi_{\varrho+2}-x) > \tfrac{1}{2}A.$$

Man gehe nachher von der Strecke $\xi_{\varrho+1}\dots\xi_{\varrho+2}$ aus, verfahre auf analoge Weise, und fahre so in inf. fort. Man gelangt hierdurch zu einem gewissen secundären x. Das angewandte Verfahren involvirt aber unmittelbar die Unmöglichkeit, die Bedingungen (74.) für diese secundäre Stelle zu erfüllen, und führt direct mit sich, dass $\lim d_{\varrho k}^{(2)}:(\xi_{\varrho+2}-\xi_{\varrho k}^{(2)})$ nicht unbedingt gleich Null ist, und also $f'_-(x)$ unbestimmt — immer doch unter der Voraussetzung, dass $\lim U_\varrho > 0$ ist; dies wird aber wenigstens für hinreichend grosse t_n der Fall (und man kann ja die Zahlen t_n im Verhältniss zu n beliebig gross nehmen); denn die auf die beschriebene Weise erhaltenen secundären Stellen haben die Eigenschaft, dass die Anzahl consecutiver Nullen in der ε-Reihe keine endliche obere Grenze hat; durch Vergrösserung der t_n kann man über die Anzahl der Nullen in den successiven Gruppen so verfügen, dass das Product aus den Factoren q_i,

welche zufolge (51.) den Einsen in der ε-Reihe entsprechen, grösser als 0 wird, und also auch $\lim U_\varrho > 0$ (s. oben). Ganz wie oben sieht man ferner ein, dass die fraglichen secundären Stellen eine nicht-abzählbare Menge bilden. Dass sie auch überall condensirt sind, ist leicht zu finden: zwischen zwei beliebig nahe an einander liegenden primären Stellen kann man auf die beschriebene Weise zu secundären x der fraglichen Art gelangen. Hiermit ist also erwiesen, dass es eine überall condensirte, nicht-abzählbare x-Menge giebt, für die $f'_-(x)$ *unbestimmt* ist, obgleich $\lim U_\varrho$ einen bestimmten positiven Werth hat, und folglich $f'_+(x)$ bestimmt $(= \lim V_\sigma = \lim U_\varrho = \lim m_n)$ ist*).

---

*) Ein verhältnissmässig einfacher Fall einer stetigen Function, für welche an einer einzelnen Stelle $f'_-(x)$ aus völlig analogem Grunde unbestimmt wird, ist der folgende. Von Origo A_0 aus trage man auf der Geraden $y = x$ Strecken

$$A_0A_1,\quad A_1A_2,\quad A_2A_3,\quad \ldots,\quad A_{n-1}A_n,\quad \ldots$$

ab, deren Projectionen auf der x-Axe $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^4}, \frac{1}{2^9}, \ldots, \frac{1}{2^{n^2}}, \ldots$ sind. Die Abscisse x_n von A_n hat dann einen endlichen Grenzwerth $\lim x_n = \xi = \sum_1^\infty \left(\frac{1}{2}\right)^{n^2}$. Und es ist

$$\lim \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n - x_{n-1}} = \lim \frac{\xi - x_n}{x_n - x_{n-1}} = 0,$$

also

$$\lim \frac{\xi - x_n}{x_{n+1} - x_n} = \lim \frac{\xi - x_{n+1} + x_{n+1} - x_n}{x_{n+1} - x_n} = 1.$$

Denn $x_n - x_{n-1}$ ist gleich $\frac{1}{2^{n^2}}$, $\xi - x_n < \frac{1}{2^{(n+1)^2-1}}$. Von jedem Punkte A_n $(n > 0)$ aus ziehe man ferner nach links eine zur x-Axe parallele Gerade A_nB_n von der Länge

$$A_nA_{n+1} = x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2^{(n+1)^2}},$$

und verbinde B_n mit A_{n-1}. Die so entstehende gebrochene Linie $A_0B_1A_1B_2A_2B_3\ldots$ repräsentirt für $0 \leqq x \leqq \xi$ eine stetige Function $f(x)$, welche an den Stellen A_i und B_i eine bestimmte hintere, und eine davon verschiedene vordere Derivirte hat, und für andere $x < \xi$ eine einzige Derivirte. Aber für $x = \xi$ wird $f'_-(x)$ unbestimmt. Es ist

$$\lim \frac{f(\xi) - f(x_n)}{\xi - x_n} = \lim \frac{\xi - x_n}{\xi - x_n} = 1.$$

Wenn aber ξ_n die Abscisse von B_n bedeutet und $0 < \delta_n \leqq 1$ ist, so wird

$$\lim \frac{f(\xi) - f(x_n - \delta_n[x_n - \xi_n])}{\xi - (x_n - \delta_n[x_n - \xi_n])} = \lim \frac{\xi - x_n}{\xi - x_n + \delta_n(x_{n+1} - x_n)}$$
$$= 1 - \lim \frac{\delta_n}{\frac{\xi - x_n}{x_{n+1} - x_n} + \delta_n} = 1 - \frac{\lim \delta_n}{1 + \lim \delta_n},$$

Andererseits sahen wir ja, dass, wenn die Bedingung (79.) erfüllt ist, $f'_-(x)$ einen bestimmten positiven Werth hat an allen Stellen, wo $\lim U_\varrho > 0$ ist und die Zahl n_2 endlich bleibt; und diese Stellen bilden offenbar auch eine überall condensirte und nicht-abzählbare Menge. Dass (79.) wirklich erfüllbar ist, zeigt folgendes Beispiel:

$$(80.)\quad u_n = \frac{1}{(n+3)^2}, \quad v_n = \frac{n+2}{(n+3)^2 \log(n+2)}, \quad \frac{u_n}{v_n} = \frac{\log(n+2)}{n+2}.$$

Die Bedingungen (66.) sind hier erfüllt: Σu_n convergirt, $\lim(u_n : v_n)$ ist gleich 0, $\Sigma(u_n : v_n)$ divergirt zufolge der Divergenz der harmonischen Reihe, $\lim v_n$ ist gleich 0, und die Divergenz von Σv_n folgt aus der bekannten Divergenz der Reihe $\Sigma \frac{1}{n \log n}$, da $v_n = \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^2 \frac{1}{(n+2)\log(n+2)}$ ist, und $\lim\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^2 = 1$.

Der Grenzwerth (79.) ist

$$\lim_{n=\infty} \frac{(R_n-1)(n+2)}{\log(n+2)}$$

und wird also mit Sicherheit gleich 0, wenn $n(R_n-1)$ endlich bleibt. Es

---

also <1 oder $=1$, je nachdem $\lim \delta_n > 0$ oder $=0$. [Der oben mit β_n bezeichneten Grösse entspricht hier $\delta_n(x_n-\xi_n):(x_n-x_{n-1})$.]

Andererseits ist für $x_{n-1} < x < x_n$

$$f(x) = x_{n-1} + \frac{x_n - x_{n-1}}{\xi_n - x_{n-1}}(x-x_{n-1}) = x + \frac{(x-x_{n-1})(x_n-\xi_n)}{\xi_n - x_{n-1}},$$

also für $0 < \gamma_n \leqq 1$

$$\lim \frac{f(\xi)-f(x_{n-1}+\gamma_n[\xi_n-x_{n-1}])}{\xi-(x_{n-1}+\gamma_n[\xi_n-x_{n-1}])} = \lim \frac{\xi-x_{n-1}-\gamma_n(\xi_n-x_{n-1})-\gamma_n(x_n-\xi_n)}{\xi-x_{n-1}-\gamma_n(\xi_n-x_{n-1})}$$

$$= 1-\lim \frac{\gamma_n(x_{n+1}-x_n)}{\xi-x_n+x_n-x_{n-1}-\gamma_n(x_n-x_{n+1}+x_n-x_{n-1})}$$

$$= 1-\lim \frac{\gamma_n}{\frac{\xi-x_n}{x_{n+1}-x_n}+\gamma_n+(1-\gamma_n)\frac{x_n-x_{n-1}}{x_{n+1}-x_n}} = 1-\frac{\lim \gamma_n}{1+\lim \gamma_n + \lim(1-\gamma_n).2^{2n+1}}.$$

Für $\lim \gamma_n < 1$ wird dieser Ausdruck immer gleich 1; für $\lim \gamma_n = 1$ dagegen <1 oder $=1$, je nachdem $\lim(1-\gamma_n).2^{2n}$ endlich oder unendlich gross ist. [Der obigen Grösse α_n entspricht hier $\gamma_n(\xi_n-x_{n-1}):(x_n-x_{n-1})$.] Man sieht, dass $f'_-(\xi)$ die Werthe 1 und $\frac{1}{2}$ und alle zwischenliegenden annehmen kann. Aehnliches gilt für

$$x_n - \xi_n = \theta_n(x_{n+1}-x_n), \quad \text{wenn} \quad \theta_n < (x_n-x_{n-1}):(x_{n+1}-x_n)$$

ist und $\lim \theta_n$ endlich aber >0; für $\lim \theta_n = 0$ enthält dagegen $f'_-(\xi)$ den bestimmten Werth 1.

ist aber

$$\lim n(R_n - 1) = -\lim n^2 \frac{d}{dn} R_n = -\lim n^2 R_n \frac{d}{dn} \log R_n$$
$$= -\lim n^2 \frac{d}{dn} \log R_n = 2 \lim n^2 \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{1+(i+3)^2} \frac{1}{i+3}$$
$$= 2 \lim n^2 \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{(i+3)^3} {}^{*)} = 2 \lim \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{n\left(1+\frac{k}{n}\right)^3} = 2 \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x)^3}.$$

Da das Integral endlich ist, wird auch $\lim n(R_n - 1)$ endlich und (79.) verschwindet, w. z. b. w. [Hierbei sei Folgendes bemerkt. Das Beispiel (80.) kann als eine Modification von (67.) bezeichnet werden. Andererseits kann man (67.) auf folgende Weise verallgemeinern:

$$(81.) \qquad u_n = \frac{1}{(n+2)^{\alpha}}, \quad v_n = \frac{(n+1)^{\beta}}{(n+2)^{\alpha}}, \quad \frac{u_n}{v_n} = \frac{1}{(n+1)^{\beta}},$$

wo $\alpha > 1$, $0 < \beta \leqq 1$, $\alpha - \beta \leqq 1$ ist. Hier kann in der That (79.) nicht erfüllt sein. Denn man erhält wie oben

$$\lim (R_n - 1) \cdot \frac{v_n}{u_n} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \lim \left(\frac{1}{n^{\alpha-\beta-1}}\right) \cdot \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x)^{\alpha+1}},$$

also für $\alpha - \beta = 1$ einen endlichen Werth > 0, für $\alpha - \beta < 1$ einen unendlich grossen Werth. Hieraus ist jedoch nicht zu schliessen, dass $f'_-(x)$ auch für endlich bleibenden n_2 unbestimmt wird; denn (79.) war ja nicht nothwendig, nur hinreichend.]

Alles in Allem genommen, besitzt also eine Function $f(x)$, welche den Bedingungen (66.) entspricht, folgende Eigenschaften: *$f(x)$ ist stetig und nimmt mit x durchaus zu; für eine gewisse abzählbare, überall condensirte Menge von x-Werthen* (die primären) *ist $f'_-(x) = 0$, und $f'_+(x)$ hat einen bestimmten Werth > 0; für eine nicht-abzählbare, überall condensirte x-Menge ist $f'_-(x) = f'_+(x) = 0$; für eine andere derartige Menge ist $f'_-(x)$ unbestimmt, aber $f'_+(x)$ bestimmt und > 0; und ausserdem giebt es wenigstens in gewissen Fällen* (wie im Beispiele (80.)) *eine nicht-abzählbare, überall condensirte x-Menge, wo $f'_-(x) = f'_+(x) > 0$ ist.*

Bei Vertauschung von x und y modificiren sich die Verhältnisse in unmittelbar ersichtlicher Weise.

---

*) Vgl. § 6, Gl. (16.) $Z_{\varrho} = 1 : \varrho^2$.

§ 10.

$P = \infty,\ Q = 0.$

Im vorigen Paragraphen wurde $f'_-(x)$ unbestimmt, obgleich dies mit $\lim U_\varrho$ nicht der Fall war. Bei der Annahme $P = \infty$, $Q = 0$ kann Unbestimmtheit für $f'_-(x)$ $[f'_+(x)]$ schon aus dem Grunde eintreten, dass $\lim U_\varrho (\lim V_\sigma)$ unbestimmt ist; und ausserdem wird ermöglicht, dass sowohl Null- als Unendlichkeitsstellen unendlich dicht liegen.

Wir nehmen also an:

$$(82.) \qquad \sum_0^\infty u_n = \infty, \quad \sum_0^\infty v_n = \infty. \qquad (u_n > 0,\ 1 > v_n > 0)$$

Die Condensirtheit der primären Abscissen erfordert wie oben [Gl. (44.)]

$$(83.) \qquad \sum_0^\infty \frac{u_n}{v_n} = \infty, \quad \sum_0^\infty \frac{v_n}{u_n} = \infty.$$

Da die Richtungscoefficienten nun nicht unter einer endlichen Grenze bleiben, folgt hieraus nicht länger die Condensirtheit der primären Ordinaten. Die Bedingungen für dieselbe sind jedoch leicht zu finden: wenn man die Rollen von x und y vertauscht, treten an die Stelle von p_n und q_n bez. $1 : p_n$ und $1 : q_n$, also an die Stelle von $u_n = p_n - 1$ und $v_n = 1 - q_n$ bez. $-(u_n : p_n)$ und $-(v_n : p_n)$; hieraus ergiebt sich ganz wie im § 7, dass die fraglichen Bedingungen sind:

$$(84.) \qquad \sum_0^\infty \frac{q_n u_n}{p_n v_n} = \infty, \quad \sum_0^\infty \frac{p_n v_n}{q_n u_n} = \infty.$$

Wenn sowohl (83.) als (84.) erfüllt sind, so ist, wie wir wissen (§ 4), die entsprechende Function $f(x)$ stetig. Und die Bedingungen sind immer erfüllt, wenn

$$(85.) \qquad \lim u_n = \lim v_n = 0, \quad \infty > \lim \frac{u_n}{v_n} > 0$$

ist. Diese Verhältnisse (sowie auch die Bedingungen (82.)), sind in folgenden Beispielen realisirt:

$$(86.) \quad 1) \quad u_n = v_n = \frac{1}{n+2}; \quad 2) \quad p_n = e^{\frac{1}{n+1}}, \quad q_n = e^{-\frac{1}{n+1}}.$$

In solchen Fällen ist zufolge § 5 in den primären Stellen

$$f'_-(x_i) = 0, \quad f'_+(x_i) = \infty.$$

Für eine secundäre Stelle kann $\lim m_n > 0$, $= 0$, unendlich oder un-

bestimmt sein. Man bezeichne mit P_1 bez. Q_1 das Product aus den Factoren der Form p_i bez. q_i in (53.). Folgende Möglichkeiten können eintreten:

$$(87.)\quad \begin{cases} 1)\ Q_1 > 0,\quad P_1 \text{ endlich};\quad 2)\ Q_1 > 0,\quad P_1 = \infty; \\ 3)\ Q_1 = 0,\quad P_1 \text{ endlich};\quad 4)\ Q_1 = 0,\quad P_1 = \infty. \end{cases}$$

Im ersten Falle ist $\lim m_n$ endlich und > 0, im zweiten unendlich, im dritten gleich Null, im vierten je nach den Umständen > 0, $= 0$, unendlich oder unbestimmt. Die Unbestimmtheit setzt voraus, dass weder die Anzahl consecutiver p_i noch die Anzahl consecutiver q_i endlich bleibt (s. § 2, zweite Note). Dies ist nothwendig, aber nicht hinreichend. Bei der näheren Bestimmung setzen wir der Einfachheit wegen voraus, dass (wie im zweiten der obigen Beispiele)

$$(88.)\qquad p_n \cdot q_n = 1,\quad p_{n+1} < p_n \quad (\text{also } q_{n+1} > q_n)$$

ist. Zu Unbestimmtheitsstellen können wir dann folgendermassen gelangen. Es sei $\log p_n = -\log q_n = l_n$, und $\lambda(n)$ bedeute eine positive, ganzzahlige Function von n mit der Eigenschaft, dass

$$(89.)\qquad \lim_{n=\infty}[l_n + l_{n+1} + l_{n+2} + \cdots + l_{n+\lambda(n)}] = \lim \varphi(n)$$

einen endlichen Werth g hat, was natürlich voraussetzt, dass $\lim \lambda(n) = \infty$ ist (da $\lim l_n = 0$). Man bilde die Reihe

$$(90.)\qquad \varphi(0) - \varphi(n_1) + \varphi(n_2) - \varphi(n_3) + \cdots,$$

wo die Zahlen $n_1, n_2, \ldots$ durch die Relation

$$(91.)\qquad n_{i+1} = n_i + \lambda(n_i) + 1 \qquad (n_0 = 0)$$

bestimmt sind. Es ist $\lim\limits_{i=\infty} \varphi(n_i) = g$, also $\varphi(n_i) = g + \delta_i$, wo $\lim \delta_i = 0$ ist. Wenn S_n die Summe der ersten n Glieder in (90.) bedeutet, ist also

$$(92.)\quad \begin{cases} S_1 = \varphi(0), \\ S_2 = \varphi(0) - g - \delta_1, \\ S_3 = \varphi(0) - \delta_1 + \delta_2, \\ S_4 = \varphi(0) - g - \delta_1 + \delta_2 - \delta_3, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ S_{2k} = \varphi(0) - g - (\delta_1 - \delta_2 + \delta_3 - \delta_4 + \cdots + \delta_{2k-1}), \\ S_{2k+1} = \varphi(0) - (\delta_1 - \delta_2 + \delta_3 - \delta_4 + \cdots - \delta_{2k}). \end{cases}$$

Wenn nun die unendliche Reihe $\delta_1-\delta_2+\delta_3-\cdots$ eine endliche Summe h hat, so oscillirt die Reihe (90.) zwischen

$$(93.)\qquad \varphi(0)-h-g \quad \text{und} \quad \varphi(0)-h.$$

Die Convergenz der δ-Reihe findet immer statt, wenn die Function $\varphi(n)$ unaufhörlich mit wachsendem n abnimmt; dann sind nämlich die δ_i sämmtlich grösser als 0 und unaufhörlich abnehmend; da überdies $\lim \delta_i = 0$ ist, folgt die Convergenz. Ebenso wenn $\varphi(n)$ unaufhörlich mit n wächst. Jedes Glied $\varphi(n_{2k})$ der Reihe (90.) ist eine Summe von consecutiven Gliedern aus der l_n-Reihe, und jedes Glied $-\varphi(n_{2k+1})$ ist eine Summe consecutiver Glieder aus $\Sigma(-l_n)$. Wenn man die Reihe derart verändert, dass man die Glieder in den Partialgliedern auflöst, so dehnt sich die Unbestimmtheit auch auf die zwischen den Grenzen (93.) liegenden Stellen aus. Aber nach dieser Veränderung ist (90.) nichts anderes als $\lim\log m_n$ für eine gewisse secundäre Stelle, nämlich diejenige, deren ε-Reihe für jedes $\varphi(n_{2k})$ eine entsprechende Folge consecutiver Nullen hat, und für jedes $\varphi(n_{2k+1})$ eine entsprechende Folge consecutiver Einsen. Für diese Stelle ist also $\lim m_n$ unbestimmt.

Wir haben hierbei die Existenz einer Function $\lambda(n)$ mit gewissen Eigenschaften vorausgesetzt. Es ist ziemlich leicht zu zeigen, dass unter unseren sonstigen Voraussetzungen solche Functionen sich immer bilden lassen. Wir werden uns aber hier darauf beschränken, dies für das Beispiel (86.) 2) zu zeigen. Es sei hier $\lambda(n) = n+1$, also

$$(94.)\qquad \varphi(n) = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2(n+1)},$$

$$(95.)\qquad \lim_{n=\infty}\varphi(n) = \lim_{\delta=0}\left\{\frac{\delta}{1}+\frac{\delta}{1+\delta}+\frac{\delta}{1+2\delta}+\cdots+\frac{\delta}{1+1}\right\} = \int_0^1\frac{dx}{1+x} = \log 2.$$

Ferner ist

$$(96.)\qquad \varphi(n)-\varphi(n-1) = \frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n} < 0,$$

und $\varphi(n)$ nimmt also mit wachsendem n unaufhörlich ab. Folglich sind die Bedingungen erfüllt.

Andererseits kann man mit Hülfe einer Function $\lambda(n)$ der verlangten Art unendlich viele Stellen bestimmen, wo die fragliche Unbestimmtheit eintritt. Man kann nicht nur das beschriebene Verfahren von einem beliebigen n an, statt von $n=0$, anwenden; es ist auch erlaubt, zwischen den

Gruppen von $\lambda(n)$ Nullen und Einsen gemischte Elemente (Nullen und Einsen) in endlich bleibender Anzahl einzufügen, wenn man nur dafür sorgt, dass die diesen Elementen entsprechende Reihe von Gliedern $\pm l_n$ convergirt: das Hinzukommen dieser Glieder kann dann nur eine Verschiebung der beiden Unbestimmtheitsgrenzen bewirken (s. die obige Beweisführung). Und in der That ist es immer erreichbar, dass die erwähnten Glieder eine unbedingt convergente Reihe bilden (vergl. § 9). Nachher kann man in den eingeschobenen Gruppen auf beliebige Weise Nullen durch Einsen und umgekehrt ersetzen, was eine nicht-abzählbare Menge von Möglichkeiten giebt (s. § 9). Schon durch Vermittelung einer einzigen Function $\lambda(n)$ kann man also zu einer nicht-abzählbaren Menge secundärer Stellen gelangen, für welche $\lim m_n$ unbestimmt ist.

Zu Stellen mit $\lim m_n = \infty$ gelangt man am einfachsten, wenn man die consecutiven Nullen in der Anzahl $\lambda(n)$, die consecutiven Einsen in endlich bleibender Anzahl auftreten lässt. Und ganz wie oben ergiebt sich, dass auch diese Stellen eine nicht-abzählbare Menge bilden. Durch das umgekehrte Verfahren gelangt man zu einer nicht-abzählbaren x-Menge mit $\lim m_n = 0$.

Dass endlich auch für eine nicht-abzählbare x-Menge $\lim m_n$ einen bestimmten endlichen Werth > 0 hat, ergiebt sich folgendermassen. Man sondere in der Reihe Σl_n eine convergente Partialreihe (L) ab (s. § 9). In der divergenten Restreihe lasse man die Zeichen wechseln, so dass eine convergente Reihe entsteht; nachher füge man die Reihe L (mit positiven Zeichen) wieder ein; dann entsteht wieder eine convergente Reihe, und die Convergenz besteht noch, wenn man in L Zeichenänderungen vornimmt, was auf zwei-mächtig unendlich viele Weisen möglich ist. Aber jeder solchen Möglichkeit entspricht eine Stelle, wo $\lim m_n$ endlich und > 0 ist. — Diese Stellen gehören (wie die Unbestimmtheitsstellen) zum Falle (87.) 4); die Stellen mit $\lim m_n = \infty$ gehören zu 2) oder 4); die Nullstellen zu 3) oder 4); der Fall 1) kann offenbar unter der Annahme $p_n q_n = 1$ nicht vorkommen.

Dass jede der erwähnten nicht-abzählbaren x-Mengen auch überall condensirt ist, folgt daraus, dass man offenbar beliebig nahe an einer beliebigen primären Stelle zu secundären Stellen jeder Art gelangen kann.

Da unter den Annahmen (85.) die Bedingung (28.) erfüllt ist, so wird $\lim U_\varrho = \lim V_\sigma = \lim m_n$, sobald $\lim m_n$ bestimmt (endlich oder unendlich)



ist (§ 6). Und wenn $\lim m_n$ unbestimmt ist, so werden auch $\lim U_\varrho$ und $\lim V_\sigma$ unbestimmt mit denselben Unbestimmtheitsgrenzen; denn $\lim \log m_n$ erhält man aus (90.) durch Auflösung jedes Gliedes in die oben erwähnten Partialglieder; und zufolge (51.), (52.) und (85.) erhält man $\lim \log U_\varrho$ bez. $\lim \log V_\sigma$ aus (90.) durch Auflösung der Glieder $\varphi(n_{2k+1})$ bez. $\varphi(n_{2k})$; die Art der Unbestimmtheit wird offenbar dieselbe in allen drei Fällen.

Die Unbestimmtheit von $\lim U_\varrho$ führt aber im jetzigen Falle auch die Unbestimmtheit von $\lim(\Omega_\varrho : Z_\varrho)$ [s. § 6] und also von $f'_-(x)$ mit sich (und analog für $\lim V_\sigma$ und $f'_+(x)$). Um dies zu beweisen, ist es ja hinreichend zu zeigen, dass die Grösse $\lambda_\varrho = (\xi_{\varrho+1} - \xi_\varrho) : Z_\varrho$ nicht den bestimmten Grenzwerth Null hat (§ 6). Dies folgt aber aus den beiden Umständen, dass der Quotient $(v_n : u_n)$ nicht beliebig nahe an Null kommen kann [s. (85.)], und dass in der ε-Reihe consecutive Einsen niemals aufhören. Dass zwei consecutive Einsen vorkommen, bedeutet nämlich, dass der Uebergang von einem gewissen Näherungswerthe ξ_ϱ zum nächstfolgenden $\xi_{\varrho+1}$ durch eine einzige Interpolation vermittelt wird. Bei dieser Interpolation wird die Strecke a zwischen ξ_ϱ und dem entsprechenden oberen Näherungswerthe ξ'_ϱ, im Verhältnisse $v_n : u_n$ (wo n eine gewisse Zahl $\geqq \varrho$ bedeutet) getheilt, und es ist also $(\xi_{\varrho+1} - \xi_\varrho) : a = v_n : (u_n + v_n)$ und folglich $> k : (k+1)$, wenn k die untere Grenze von $v_n : u_n$ ist. Und *a fortiori* wird dann

$$(\xi_{\varrho+1} - \xi_\varrho) : Z_\varrho > k : (k+1).$$

Wenn in der ε-Reihe das Auftreten consecutiver Einsen niemals aufhört, ist es also nicht möglich, dass $\lim \lambda_\varrho$ den bestimmten Werth Null haben kann. Folglich muss $f'_-(x)$ mit $\lim U_\varrho$ unbestimmt werden.

Zufolge des auf secundäre Stellen ausgedehnten Theorems § 5 wird $f'_-(x)$ mit $\lim U_\varrho = 0$, und $f'_+(x)$ mit $\lim V_\sigma = \infty$. Aber für $\lim U_\varrho > 0$ (und bestimmt) bez. $\lim V_\sigma$ endlich kann $f'_-(x)$ bez. $f'_+(x)$ aus demselben Grunde wie im vorigen Paragraphen unbestimmt werden. Dass dies in der That für eine condensirte, nicht-abzählbare x-Menge eintreffen muss, kann man für $\lim V_\sigma$ und $f'_+(x)$ auf analoge Weise, wie im vorigen Paragraphen zeigen; aber hierbei ist zu bemerken, dass die Unbestimmtheit möglicherweise nicht erreichbar ist, ohne dass $\lim V_\sigma = 0$ ist (s. unten), aber wenigstens für eine Menge solcher Stellen eintreten muss. Dass $f'_-(x)$ für gewisse Stellen mit $\lim U_\varrho = \infty$ unbestimmt wird, zeigt man auf dieselbe Weise nach Vertauschung von x und y (der directe Nachweis bietet grössere Schwierigkeiten dar). Andererseits muss es Stellen geben mit $\lim U_\varrho \leqq \infty$ oder

$\lim V_\sigma \geqq 0$, für welche die Unbestimmtheit nicht eintritt. Dies kann man folgendermassen zeigen.

Man betrachte zunächst eine Stelle, wo $\lim U_\varrho$ endlich und >0 ist, und $\lim \lambda_\varrho < 1$. Wir wissen, dass $f'_-(x)$ dann $=\lim U_\varrho$ ist, wenn die Gleichung (71.) erfüllt ist. Dass aber dies der Fall ist, können wir nun nicht wie im vorigen Paragraphen durch Einführung von $D_k^{(\lambda)}$ zeigen, weil $D_{\varrho k}^{(\lambda)}$ jetzt offenbar von derselben Ordnung wie $\xi_{\varrho+1}-\xi_{\varrho k}^{(\lambda)}$ unendlich klein ist, und also $D_{\varrho k}^{(\lambda)}:(\xi_{\varrho+1}-\xi_\varrho)$ nur dann gleich 0 ist, wenn

$$(\xi_{\varrho+1}-\xi_{\varrho k}^{(\lambda)}):(\xi_{\varrho+1}-\xi_\varrho) = 0.$$

Wir müssen daher näher untersuchen, unter welchen Bedingungen (71.) erfüllt ist. Zu diesem Zwecke denken wir uns der Einfachheit wegen zunächst eine feste Abscissenstrecke, z. B. die Strecke $0\dots1$, und definiren in diesem Intervalle eine Reihe von Functionen $F_n(x)$ auf folgende Weise: Für eine beliebige ε-Reihe der oben erwähnten Art sei

$$(97.)\quad \begin{cases} x_n = \xi_{n1}+(\xi_{n2}-\xi_{n1})+(\xi_{n3}-\xi_{n2})+\cdots+(\xi_{n,\varrho+1}-\xi_{n,\varrho})+\cdots, \\ F_n(x_n) = m[U_{n1}\xi_{n1}+U_{n2}(\xi_{n2}-\xi_{n1})+U_{n3}(\xi_{n3}-\xi_{n2})+\cdots+U_{n\varrho}(\xi_{n,\varrho+1}-\xi_{n,\varrho})+\cdots], \end{cases}$$

wo m eine positive Zahl ist, und die Grössen $\xi_{n\varrho}$ und $U_{n\varrho}$ sich von den oben betrachteten ξ_ϱ und U_ϱ dadurch unterscheiden, dass man bei der Bildung von $\xi_{n\varrho}$ und $U_{n\varrho}$ die Factoren $p_0,\ p_1,\ p_2,\ \dots$ bez. $q_0,\ q_1,\ q_2,\ \dots$ durch

$$p_n,\quad p_{n+1},\quad p_{n+2},\quad \dots,\quad q_n,\quad q_{n+1},\quad q_{n+2},\quad \dots$$

ersetzt (also $\xi_{0\varrho}=\xi_\varrho$, $U_{0\varrho}=U_\varrho$). Es steht dann offenbar die Function $F_0(x_0)$ in ganz derselben Relation zur Strecke $(0,0)\dots(1,m)$, wie $f(x)$ zur Strecke $(0,0)\dots(1,1)$, und allgemeiner $F_n(x_n)$ in derselben Relation zur Strecke $(0,0)\dots(1,m)$, wie $f(x)-x_i$ für $x_i<x<x_k$ zur Strecke $(x_iy_i)\dots(x_ky_k)$, wenn die Theilstrecke $x_i\dots x_k$ in S_n neu eingeführt ist. Im Falle, dass $u_n:v_n$ constant ist, wird die Art der successiven Theilung der Abscissenstrecke von n unabhängig ($\xi_{n\varrho}=\xi_\varrho$); und wenn $u_n:v_n$ unaufhörlich mit n zu- oder abnimmt, nimmt x_n unaufhörlich mit wachsendem n ab oder zu [zufolge (26.)], und nähert sich also einem bestimmten Grenzwerth; und die Reihe der ε kann so gewählt werden, dass $\lim x_n$ einen beliebigen Werth zwischen 0 und 1 annimmt. Es ist ferner

$$(98.)\qquad \lim_{n=\infty}\frac{F_n(x_n)}{m\,x_n} = \frac{\lim[U_{n1}\xi_{n1}+U_{n2}(\xi_{n2}-\xi_{n1})+\cdots]}{\lim[\xi_{n1}+(\xi_{n2}-\xi_{n1})+\cdots]}.$$

Dieser Grenzwerth wird mit Sicherheit $=1$, wenn für hinreichend grossen

n-Werth $|U_{ni}-1|$, unabhängig von i, kleiner als eine beliebig kleine positive Grösse η_n ist; denn der Ausdruck im Zähler wird dann grösser als $(1-\eta_n)[\xi_{n1}+(\xi_{n2}-\xi_{n1})+\cdots]$, aber kleiner als $(1+\eta_n)[\xi_{n1}+(\xi_{n2}-\xi_{n1})+\cdots]$. Unter der Voraussetzung, dass $p_n q_n = 1$ ist, und p_n unaufhörlich abnimmt, ist diese Bedingung immer an solchen Stellen erfüllt, in deren ε-Reihe die consecutiven Nullen von einem gewissen n-Werth an eine constante endliche Anzahl μ hat und die consecutiven Einsen auch dieselbe Anzahl haben. Es ist nämlich dann

$$(99.)\quad \begin{cases} \lim\limits_{i=\infty}\log U_{ni} = K_n+\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\log[p_{n_1+n+k\mu}\cdot p_{n_1+n+k\mu+1}\cdots p_{n_1+n+(2k-1)\mu}] \\ \qquad\qquad\quad = K_n+\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\log\pi_{nk}, \end{cases}$$

wo n_1 eine gewisse ganze Zahl bedeutet. Die Grösse K_n hat die Form $\sum\limits_{\varrho=n}^{n_1+n-1}\pm\log p_\varrho$ und verschwindet also für $n=\infty$. Die darauf folgende Reihe convergirt für alle n, weil $\log\pi_{n,k+1}<\log\pi_{nk}$ ist [zufolge der Annahme $p_{\varrho+1}<p_\varrho$], und $\lim\limits_{k=\infty}\log\pi_{nk}=0$ ist, und die abwechselnd positiven und negativen Glieder der Reihe dem absoluten Betrage nach unaufhörlich und unbegrenzt abnehmen. Und zwar ist zufolge dieser Umstände der Werth der Reihe positiv, aber kleiner als das erste Glied $\log\pi_{n0}$; es ist aber $\lim\limits_{n=\infty}\log\pi_{n0}=0$; also verschwindet die ganze Reihe für $n=\infty$. Es wird also

$$\lim_{n=\infty}\left\{\lim_{i=\infty}\log U_{ni}\right\} = 0.$$

Ferner folgt mit Leichtigkeit, dass $|\log U_{ni}|<\theta_n$ ist, wo $\lim\limits_{n=\infty}\theta_n=0$ (für alle i). Denn jeder Theil von K_n wird für hinreichend grosses n numerisch beliebig klein, und jeder Theil der Reihe ist numerisch kleiner als $\log\pi_{n0}$. Es ist somit $|U_{ni}-1|<\eta_n$, $\lim\eta_n=0$, und folglich der Grenzwerth (98.) $=1$. Mit anderen Worten: es ist $\lim(F_n(x_n)-mx_n)=0$. Die ε-Reihen, für welche wir dies gezeigt haben, geben aber in ihrer Gesammtheit eine x-Menge, welche offenbar überall condensirt ist, und da die Functionen F_n stetig sind, können wir die Sache ganz einfach so ausdrücken, dass (für alle x) $\lim\limits_{n=\infty}F_n(x)=mx$ ist.

Wenn man die Länge l der betrachteten Abscissenstrecke nicht constant und gleich 1 nimmt, sondern mit wachsendem n in infinitum abnehmen lässt, so hat man das Gesagte so auszudrücken, dass $\lim F_n(x)-mx$ unendlich

klein von höherer Ordnung als l ist. Und überdies kann man auch m variiren lassen, wenigstens innerhalb endlicher Grenzen. Hierin liegt unmittelbar, dass (71.) gültig ist, wenn $\lim U_\varrho$ endlich und > 0. Wenn ausserdem $\lim \lambda_\varrho < 1$ ist, wird, wie gesagt, $f'_-(x) = \lim U_\varrho$. Aber $\lim \lambda_\varrho$ ist im jetzigen Falle immer < 1, wenn die Anzahl consecutiver Nullen in der zur Grenzstelle x gehörenden ε-Reihe endlich bleibt; dies folgt aus (77.) und aus der Annahme, dass $\lim(u_n : v_n)$ endlich und von Null verschieden ist. Analoges gilt nach oben: $f'_+(x)$ ist $= \lim V_\sigma$, wenn $\lim V_\sigma$ endlich und grösser als 0 ist, und die Anzahl consecutiver Einsen in der ε-Reihe endlich bleibt. Wenn sowohl die Anzahl der Nullen als der Einsen endlich bleibt und $\lim m_n$ endlich und grösser als 0 ist, wird also $f'_-(x) = f'_+(x) = \lim m_n$. Die x-Werthe, für welche dies eintrifft, sind offenbar überall condensirt und nicht-abzählbar.

Auch wenn man in (98.) m mit n in infinitum wachsen lässt, wird der Grenzwerth $= 1$. Hieraus folgt nun nicht $\lim[F_n(x) - mx] = 0$, dagegen mit Sicherheit $\lim \{[F_n(x) - mx] : m\} = 0$. Wenn man wie oben zur Betrachtung der unendlich kleinen Strecke $\xi_\varrho \dots \xi_{\varrho+1}$ übergeht, so ist die letzte Gleichung so zu deuten, dass

$$(100.) \qquad \lim\left[\frac{d^{(\lambda)}_{\varrho k}}{\xi_{\varrho+1} - \xi_\varrho} : U_\varrho\right] = 0$$

ist, wenn $\lim U_\varrho = \infty$. Hieraus folgt ferner

$$\lim\left[\frac{d^{(\lambda)}_{\varrho k}}{x - \xi_{\varrho+1}} : U_\varrho\right] = 0, \quad \text{d. h.} \quad \lim\left[\frac{d^{(\lambda)}_{\varrho k}}{x - \xi_{\varrho+1}} : \frac{y - \eta_{\varrho+1}}{x - \xi_{\varrho+1}}\right] = 0,$$

wenn $\lim \lambda_\varrho < 1$ ist. Und dass dies mit der Bedingung $\lim U_\varrho = \infty$ wirklich vereinbar ist, wenigstens für $p_n q_n = 1$, $p_{n+1} < p_n$, zeigt man ziemlich leicht: $\lim \lambda_\varrho$ wird kleiner als 1, wenn in der ε-Reihe die Anzahl consecutiver Nullen, und also in (53.) die Anzahl consecutiver Factoren p_i endlich bleibt; es fragt sich also, ob hierbei (53.) unendlich gross werden kann; dies ist (wenigstens unter den erwähnten Annahmen) zu bejahen, was wir jedoch hier nur an dem Beispiele (86.) 2) bestätigen wollen: schon die Reihe

$$(101.) \qquad 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \cdots$$

divergirt, und ebenso alle ähnliche, für welche die Anzahl consecutiver positiver Glieder constant und grösser als 2 ist, und die negativen einzeln auftreten; also existiren Stellen mit $\lim \lambda_\varrho < 1$, $\lim U_\varrho = \lim m_n = \infty$; und dass diese Stellen nicht abzählbar sind, folgt daraus, dass in der obigen Reihe

sowohl das Endlichbleiben der consecutiven positiven Glieder, als auch die Divergenz noch besteht, wenn man die Glieder der Form $-\frac{1}{3^{2k}}$ unverändert lässt, aber für eine beliebige Menge der Glieder $-\frac{1}{3^{2k+1}}$ das Vorzeichen ändert, was eine Unendlichkeit der zweiten Mächtigkeit giebt. Dass die fragliche Menge auch überall condensirt ist, folgt daraus, dass man in den n ersten Gliedern der Reihe (101.) auf beliebige Weise die Vorzeichen verändern kann, wo n beliebig gross ist, und dass also beliebig nahe an einer jeden primären Stelle secundäre Stellen der fraglichen Art sich befinden. Hiermit ist gezeigt, dass es eine nicht-abzählbare, überall condensirte x-Menge giebt, wo $f'_-(x)$ (ohne irgend eine Unbestimmtheit) unendlich gross wird. Auf analoge Weise ergiebt sich, dass für eine andere derartige Menge $f'_-(x) = 0$ ist.

Wir haben oben unerledigt gelassen, ob $f'_-(x)$ oder $f'_+(x)$ auch an solchen Stellen unbestimmt werden können, wo $\lim U_\varrho = \lim V_\sigma$ endlich und grösser als 0 ist. Die vollständige Erledigung dieser Frage ist von verhältnissmässig geringem Interesse, da es ja, dem Vorigen zufolge, jedenfalls eine nicht-abzählbare x-Menge giebt, wo die Derivirten beide unbestimmt sind, weil dies schon von $\lim m_n$ gilt. Aber es ist von Interesse, zu entscheiden, ob die eine Derivirte unbestimmt sein kann, während die andere endlich und grösser als 0 ist. Dies ist in der That zu verneinen. Den Beweis hierfür werden wir der Kürze wegen nur andeuten. Die Unbestimmtheit von $f'_-(x)$ setzt ja, wenn $\lim U_\varrho$ bestimmt ist, zufolge des oben gezeigten, nothwendig voraus, dass $\lim \lambda_\varrho$ beliebig nahe an Eins kommen kann. Dies setzt wiederum zufolge (77.) in Verbindung mit (73.), als nothwendige und hinreichende Bedingung voraus, dass die Anzahl consecutiver Nullen in der ε-Reihe nicht endlich bleibt (unter Voraussetzung, dass (85.) erfüllt ist). Dies ist in der That mit der Annahme, dass $\lim U_\varrho = \lim m_n$ endlich und positiv sein soll, vereinbar, aber erfordert, dass die Gruppen von consecutiven Einsen sich auf wesentlich dieselbe Weise, wie die Nullengruppen verhalten. Und aus dieser Aehnlichkeit folgt in der That, dass $f'_+(x)$ unbestimmt sein muss, wenn dies von $f'_-(x)$ gilt, und umgekehrt.

Die Annahmen (82.) und (85.) führen also, wenigstens wenn sie mit (88.) vereinigt werden, zu Functionen $f(x)$ mit folgenden Eigenschaften: *die Function $f(x)$ selbst ist stetig und durchaus mit x steigend; für eine überall condensirte, abzählbare Menge von x-Werthen ist die hintere Deri-*

virte $f'_-(x) = 0$, aber die vordere $f'_+(x) = \infty$; für eine überall condensirte, nicht-abzählbare x-Menge ist $f'_-(x) = f'_+(x) > 0$; für eine zweite derartige Menge ist $f'_-(x) = f'_+(x) = 0$; für eine dritte $f'_-(x) = f'_+(x) = \infty$; für eine vierte Menge derselben Art sind $f'_-(x)$ und $f'_+(x)$ beide unbestimmt; für eine fünfte ist $f'_-(x) = 0$, aber $f'_+(x)$ unbestimmt mit Null als unterer Grenze; für eine sechste ist $f'_+(x) = \infty$, aber $f'_-(x)$ unbestimmt mit ∞ als oberer Grenze.

Wenn die Bedingungen (82.), (83.), (84.) erfüllt sind und

$$\lim u_n = \lim v_n = 0$$

ist, aber $u_n : v_n$ nicht einen bestimmten endlichen und von Null verschiedenen Grenzwerth hat, so können sich die Verhältnisse in der einen oder anderen Hinsicht modificiren.

Noch grössere Verschiedenheit tritt ein, wenn keine der Bedingungen (85.) erfüllt ist, wie in folgenden Beispielen:

$$(102.) \qquad 1)\quad p_n = 2, \quad q_n = \frac{1}{2}; \quad 2)\quad p_n = \frac{3}{2}, \quad q_n = \frac{1}{2}$$

(welche offenbar (82.), (83.), (84.) erfüllen). Selbstverständlich können hier $\lim U_\varrho$ und $\lim V_\varrho$ niemals endlich, bestimmt und grösser als 0 sein; und wenn sie unbestimmt sind, so verhalten sich die Unbestimmtheitsgrenzen für $\lim U_\varrho$ zu denjenigen für $\lim V_\sigma$, wie $\lim p_n$ zu $\lim q_n$ (s. (51.), (52.)). Die Unbestimmtheit setzt ja übrigens voraus, dass in (53.) die Producte consecutiver Factoren p_i und consecutiver Factoren q_i Grenzwerthe haben, deren Product $= 1$ ist. Hierbei kann die Anzahl consecutiver p_i oder q_i endlich bleiben oder unbegrenzt wachsen. Wenn p_n und q_n constant sind ($= p$ und q), wie in (102), setzt ersteres voraus, dass für gewisse ganzzahlige positive Werthe von g und h $p^g . q^h = 1$ ist, d. h. $g \log p + h \log q = 0$, also die Logarithmen von p und q commensurabel, wie in (102.), 1). Das fragliche Verhältniss ist in diesem Beispiele dadurch erreichbar, dass man von einem gewissen n an $g = h$ nimmt, also am einfachsten $g = h = 1$; und da es auch erlaubt ist, abwechselnd z. B. $g = h = 1$ und $g = h = 2$ zu nehmen (in beliebiger Anordnung), so giebt es offenbar eine nicht-abzählbare x-Menge, wo die fraglichen Verhältnisse eintreten, und also $\lim U_\varrho$ zwischen endlichen Grenzen unbestimmt ist. Andererseits kann man auch g und h unbegrenzt wachsen lassen und dementsprechend existirt eine nicht-abzählbare Menge von Stellen, wo U_ϱ zwischen 0 und ∞ oscillirt. Dass ferner die Unbestimmtheit von $\lim U_\varrho$ auch die Unbestimmheit von $f'_-(x)$ mit sich

führt, ist im allgemeinen wie im obigen Falle zu zeigen (nur im Falle $g = h = 1$ muss man in leicht ersichtlicher Weise den Beweis modificiren, da consecutive Einsen in der ε-Reihe in diesem Falle nicht vorkommen). Für $\lim m_n = \infty$ ist, wie oben, $f'_+(x) = \infty$, und $f'_-(x) = \infty$ oder unbestimmt mit ∞ als obere Grenze, und für $\lim m_n = 0$ $f'_-(x) = 0$, und $f'_+(x) = 0$ oder unbestimmt mit 0 als unterer Grenze.

Auch kann $\lim p_n > 1$, $\lim q_n = 1$ sein. Beispiel:

$$p_n = \frac{3}{2}, \quad q_n = 1 - \frac{1}{n+2}. \tag{103.}$$

Die Verhältnisse werden denjenigen in (102.) ziemlich ähnlich.

§ 11.

Abwechselnde Gültigkeit der Ungleichheiten $p_n > 1$, $q_n < 1$; $p_n < 1$, $q_n > 1$.

Wir werden einige Bemerkungen über verschiedene Fälle machen, für welche es abwechselnd gilt, dass $p_n > 1$, $q_n < 1$ und $p_n < 1$, $q_n > 1$ ist, beschränken uns aber hierbei auf den Fall, dass p_n und p_{n+1} bez. q_n und q_{n+1} sich in dieser Hinsicht immer verschieden verhalten,

$$(\text{also } \log p_n . \log p_{n+1} < 0, \ \log q_n . \log q_{n+1} < 0).$$

Wie wir wissen, muss ausserdem immer $\log p_n . \log q_n < 0$ sein.

I. *Die unendlichen Producte P und Q sind beide unbedingt convergent,* (d. h. die Reihen $\Sigma \log p_n$ und $\Sigma \log q_n$ sind unbedingt convergent).

Im Wesentlichen gestaltet sich in diesem Falle alles, wie in § 8.

II. *P unbedingt convergent, Q bedingt convergent.* Man setze

$$p_n = 1+(-1)^n u_n, \quad q_n = 1+(-1)^{n+1} v_n, \tag{104.}$$

wo u_n und v_n grösser als 0 sind. In der Reihe $\Sigma \log q_n$ müssen nun die positiven Glieder für sich, und die negativen für sich divergente Reihen bilden. Wie im § 9 ist zu zeigen, dass wenn man von Unbestimmtheitsfällen für $\lim (u_n : v_n)$ absieht, folgende Bedingungen erfüllt sein müssen:

$$\left\{\begin{array}{llll} \sum\limits_0^\infty u_n & \text{und} & \sum\limits_0^\infty (-1)^{n+1} v_n & \text{convergent,} \\ \sum\limits_0^\infty v_{2k} & \text{und} & \sum\limits_0^\infty v_{2k+1} & \text{divergent,} \\ \sum\limits_0^\infty \frac{u_{2k}}{v_{2k}} & \text{und} & \sum\limits_0^\infty \frac{u_{2k+1}}{v_{2k+1}} & \text{divergent,} \\ \text{aber } \lim \frac{u_n}{v_n} & = 0. & & \end{array}\right. \tag{105.}$$

Beispiele:

$$(106.)\quad \begin{cases} 1)\ p_n = 1+\frac{(-1)^n}{(n+2)^2}, & q_n = 1+\frac{(-1)^{n+1}}{n+2}, \\ 2)\ \log p_n = \frac{(-1)^n}{n+1}, & \log q_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}. \end{cases}$$

In den secundären Stellen verhalten sich die Grössen $\lim U_\varrho$ und $\lim V_\sigma$ im wesentlichen wie in den Fällen (86.), wie eine leicht gefundene Modification der Beweisführung im § 10 zeigt (die arithmetischen Eigenschaften der Unbestimmtheitsstellen u. s. w. sind jetzt nicht ganz dieselben). In den primären Stellen ist sowohl $\lim \overset{+}{m}_n$ als $\lim \overset{-}{m}_n$ endlich und > 0. Die vollständigere Untersuchung der Derivirten lassen wir bei Seite.

III. *P und Q beide bedingt convergent.* In diesem Falle müssen die Reihen $\Sigma(u_n : v_n)$ und $\Sigma(v_n : u_n)$ beide divergiren, aber die Bedingung $\lim(u_n : v_n) = 0$ fällt aus. Typische Beispiele:

$$(107.)\quad \begin{cases} 1)\ p_n = 1+\frac{(-1)^n}{n+2}, & q_n = 1+\frac{(-1)^{n+1}}{n+2}; \\ 2)\ \log p_n = \frac{(-1)^n}{n+1}, & \log q_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}. \end{cases}$$

Ziemlich ähnliche Verhältnisse treten ein wie im vorigen Falle.

IV. *P unbedingt convergent, $Q = 0$.*

A) $\lim q_n = 1$. In diesem Falle muss $\lim\limits_{k=\infty}(u_{2k} : v_{2k}) = 0$ sein (s. § 9). Beispiele:

$$(108.)\quad \begin{cases} 1)\ p_n = 1+\frac{(-1)^n}{(n+2)^2}, & q_{2k} = 1-\frac{1}{2(k+1)}, \quad q_{2k-1} = 1+\frac{1}{2(k+1)^2}; \\ 2)\ \log p_n = \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}, & \log q_{2k} = -\frac{1}{2k+1}, \quad \log q_{2k+1} = \frac{1}{4(k+1)^2}. \end{cases}$$

Die Verhältnisse werden denjenigen in § 9 ähnlich.

B) $1 > \lim q_n > 0$. Beispiel:

$$(109.)\quad \log p_n = \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}, \quad \log q_{2k} = -1, \quad \log q_{2k+1} = \frac{1}{4(k+1)^2}.$$

In diesem Falle wird die Sache weniger einfach: $\lim U_\varrho$ ist immer bestimmt und endlich, $\geqq 0$; dagegen kann $\lim V_\sigma$ unbestimmt sein, nämlich zwischen zwei Werthen oscilliren, welche zu einander im Verhältnisse

$$\lim q_{2k} : \lim q_{2k+1} = 1 : e$$

stehen. — Selbstverständlich wäre es auch denkbar, dass q_n beliebig nahe an Null kommen könnte.

Die Fälle: P unbedingt convergent, $Q=\infty$; $P=0$ oder ∞, Q unbedingt convergent, geben ähnliches.

V. *P bedingt convergent,* $Q=0$. Beispiel:

$$(110).\quad \log p_n = \frac{(-1)^n}{n+1},\quad \log q_{2k} = -\frac{1}{2k+1},\quad \log q_{2k+1} = \frac{1}{4(k+1)^2}.$$

Es wird niemals $\lim m_n$ unendlich gross; übrigens nähern sich die Verhältnisse denjenigen im § 10. — P bedingt convergent, $Q=\infty$ etc. giebt Analoges.

VI. $P=\infty$, $Q=0$. Beispiel (mit $\lim p_n = \lim q_n = 1$):

$$(111.)\quad \log p_{2k} = -\log q_{2k} = \frac{1}{2k+1},\quad \log p_{2k+1} = -\log q_{2k+1} = -\frac{1}{(2k+1)^2}.$$

Vergl. § 10. — $P=0$, $Q=0$ giebt analoges.

VII. $P=Q=0$. Beispiel (mit $\lim p_n = \lim q_n = 1$):

$$(112.)\quad \begin{cases} \log p_{2k} = \dfrac{1}{(2k+1)^2}, & \log p_{2k+1} = -\dfrac{1}{2(k+1)}, \\ \log q_{2k} = -\dfrac{1}{2(k+1)}, & \log q_{2k+1} = \dfrac{1}{(2k+3)^2}. \end{cases}$$

Wenn die Reihe der positiven Logarithmen, wie in diesem Beispiele, convergirt, (was ja nicht nothwendig ist), so kann für die Grössen $\lim m_n$, $\lim U_\varrho$, $\lim V_\sigma$ keine Unbestimmtheit und kein Unendlichwerden vorkommen; und $\lim \overset{+}{m}_n$ und $\lim \overset{-}{m}_n$ sind beide $=0$. $P=\infty$, $Q=\infty$ giebt Analoges.

VIII. *P und Q unbestimmt.* Beispiel:

$$(113.)\quad \log p_n = -\log q_n = \frac{(-1)^n}{2}.$$

In diesem Falle werden schon $\lim \overset{+}{m}_n$ und $\lim \overset{-}{m}_n$ unbestimmt. Uebrigens sind die Verhältnisse denjenigen in (102.) ziemlich ähnlich.

Wenn man die Bedingung $\log p_n . \log p_{n+1} < 0$ nicht festhält, kann man auch auf die in der zweiten Note § 2 angedeutete Weise Unbestimmtheit für P und Q gewinnen. Beispiel:

$$(114.)\quad \log p_n = -\log q_n = (-1)^\lambda \cdot \frac{1}{2^n},$$

wo λ so zu bestimmen ist, dass $\frac{1}{2^n}$ in der Gruppe $\varphi(\lambda)$ im Sinne des § 10 eingeht.

Die nähere Untersuchung, wie sich die Derivirten in diesen verschiedenen Fällen verhalten und von den arithmetischen Eigenschaften verschiedener secundärer x-Werthe abhängen, würde uns diesmal zu weit führen.

§ 12.

Dreitheilung. Ueberall condensirte Maxima und Minima.

Um Functionen mit überall condensirten Maximum-Minimum-Stellen zu erhalten, werden wir, wie schon angedeutet, *Dreitheilung* statt Zweitheilung benutzen. Doch werden wir uns hier auf die einfachsten Fälle beschränken.

Die Endstellen seien, wie im § 7, $x = 0$, $x = 1$, und beide primär,

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 1.$$

Die bei der Dreitheilung in $(S_\mu T_\mu)$ neu eingeführten Werthepaare seien für $\mu \geqq 1$

$$(x_{\mu 1} y_{\mu 1}), \quad (x_{\mu 2} y_{\mu 2}), \quad (x_{\mu 4} y_{\mu 4}), \quad (x_{\mu 5} y_{\mu 5}), \quad \ldots, \quad (x_{\mu, 3^\mu - 2} y_{\mu, 3^\mu - 2}), \quad (x_{\mu, 3^\mu - 1} y_{\mu, 3^\mu - 1})$$

oder kurz

$$c_{\mu 1}, \qquad c_{\mu 2}, \qquad c_{\mu 4}, \qquad c_{\mu 5}, \qquad \qquad c_{\mu, 3^\mu - 2}, \qquad c_{\mu, 3^\mu - 1}.$$

Die Richtungscoefficienten der successiven Glieder der gebrochenen Linie $(S_n T_n)$ seien

$$a_{n1}, \quad a_{n2}, \quad a_{n3}, \quad \ldots, \quad a_{n, 3^n}.$$

Es ist, wie man leicht findet,

$$(115.) \quad \begin{cases} c_{\mu, 3h+2} & \text{Anfangspunkt von} \quad a_{\mu+\varrho, 3^\varrho(3h+1)+1}, \\ & \text{Endpunkt von} \quad a_{\mu+\varrho, 3^\varrho(3h+1)}, \\ c_{\mu, 3h+2} & \text{Anfangspunkt von} \quad a_{\mu+\varrho, 3^\varrho(3h+2)+1}, \\ & \text{Endpunkt von} \quad a_{\mu+\varrho, 3^\varrho(3h+2)}. \end{cases} \qquad (\varrho \geqq 0)$$

Man setze

$$(116.) \quad \frac{a_{n+1, 3k+1}}{a_{nk}} = p_{nk}, \quad \frac{a_{n+1, 3k+2}}{a_{nk}} = q_{nk}, \quad \frac{a_{n+1, 3k+3}}{a_{nk}} = r_{nk},$$

und mache die vereinfachende Annahme, dass p_{nk}, q_{nk}, r_{nk} nur von n abhängen:

$$(117.) \quad p_{nk} = p_n, \quad q_{nk} = q_n, \quad r_{nk} = r_n.$$

Nun sei

$$(118.)\qquad \prod_0^\infty p_n = P,\quad \prod_0^\infty q_n = Q,\quad \prod_0^\infty r_n = R.$$

Es ist dann der Grenzwerth der oberen Richtungscoefficienten

$$(119.)\qquad \begin{cases} \text{für}\quad c_{\mu,3h+1} = \lim\limits_{\varrho=\infty} a_{\mu+\varrho,3^\varrho(3h+1)+1} = a_{\mu,3h+2}\prod\limits_\mu^\infty p_n, \\ \text{,,}\quad c_{\mu,3h+2} = \lim\limits_{\varrho=\infty} a_{\mu+\varrho,3^\varrho(3h+2)+1} = a_{\mu,3h+3}\cdot\prod\limits_\mu^\infty p_n; \end{cases}$$

und der Grenzwerth der unteren Richtungscoefficienten

$$(120.)\qquad \begin{cases} \text{für}\quad c_{\mu,3h+1} = \lim\limits_{\varrho=\infty} a_{\mu+\varrho,3^\varrho(3h+1)} = a_{\mu,3h+1}\cdot\prod\limits_\mu^\infty r_n, \\ \text{,,}\quad c_{\mu,3h+2} = \lim\limits_{\varrho=\infty} a_{\mu+\varrho,3^\varrho(3h+2)} = a_{\mu,3h+2}\cdot\prod\limits_\mu^\infty r_n. \end{cases}$$

Ferner ist immer

$$\frac{3h+1}{3^\mu} = \frac{\varepsilon_0}{3}+\frac{\varepsilon_1}{3^2}+\frac{\varepsilon_2}{3^3}+\cdots+\frac{\varepsilon_{\mu-2}}{3^{\mu-1}}+\frac{1}{3^\mu},$$
$$\frac{3h+2}{3^\mu} = \frac{\varepsilon_0}{3}+\frac{\varepsilon_1}{3^2}+\frac{\varepsilon_2}{3^3}+\cdots+\frac{\varepsilon_{\mu-2}}{3^{\mu-1}}+\frac{2}{3^\mu},$$

wo die ε völlig bestimmt und je gleich 0, 1 oder 2 sind. Und dementsprechend ist

$$(121.)\quad a_{\mu,3h+2} = \prod_{\varrho=0}^{\mu-2} t_\varrho\cdot q_{\mu-1},\quad a_{\mu,3h+3} = \prod_{\varrho=0}^{\mu-2} t_\varrho\cdot r_{\mu-1},\quad a_{\mu,3h+1} = \prod_{\varrho=0}^{\mu-2} t_\varrho\cdot p_{\mu-1},$$

wo $t_\varrho = p_\varrho,\ q_\varrho$ oder r_ϱ, je nachdem $\varepsilon_\varrho = 0$, 1 oder 2 ist in dem Ausdrucke für $\frac{3h+1}{3^\mu}$ oder $\frac{3h+2}{3^\mu}$, also

$$(122.)\quad a_{\mu,3h+2} = \prod_{n=0}^{\mu-2}\left\{\tfrac{1}{2}(1-\varepsilon_n)(2-\varepsilon_n)p_n+\varepsilon_n(2-\varepsilon_n)q_n+\tfrac{1}{2}\varepsilon_n(\varepsilon_n-1)r_n\right\}\cdot q_{\mu-1}$$

u. s. w.

Wir gehen nun zur Darstellung von Functionen $f(x)$ über, für welche *jede primäre Stelle Maximum- oder Minimumstelle ist.* Das hierbei angewandte Verfahren ist übrigens so beschaffen, dass die primären Stellen schon für die Functionen $f_n(x)$ diese Eigenschaft haben, und ausserdem so, dass wenn A, B, C consecutive Abscissen in S_n sind, und also B Maximumstelle, A und C Minimumstellen, oder umgekehrt, so gilt für $f(x)$ wie für $f_n(x)$, dass die Ordinate für B die grösste bez. kleinste in der ganzen Strecke AC ist, mit anderen Worten dass die ganze Strecke AC zum „*Prioritätsbereiche*“ von B gehört (s. § 3).

Wir nehmen an, dass

(123.) $p_n > 0,\quad r_n > 0,\quad q_n < 0,\quad P > 0,\quad R > 0,\quad Q = 0$

sind; betrachten aber nur den einfachen und typischen Fall, dass die Interpolation, wie wir kurz sagen können, *symmetrisch* ist, d. h. dass wenn x_i und x_k consecutive Abscissen in S_n sind,

$$f_{n+1}\Big(\frac{x_i+x_k}{2}+a\Big)+f_{n+1}\Big(\frac{x_i+x_k}{2}-a\Big) = 2f_n\Big(\frac{x_i+x_k}{2}\Big)$$

ist, für alle $a \leqq \frac{1}{2}(x_k-x_i)$. Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen hierfür sind offenbar:

(124.) $$r_n = p_n;\quad f_{n+1}\Big(\frac{x_i+x_k}{2}\Big) = f_n\Big(\frac{x_i+x_k}{2}\Big).$$

[Die zweite Bedingung ist gleichbedeutend damit, dass das mittlere *CD* der drei Glieder der gebrochenen Linie $(S_{n+1}T_{n+1})$, welche einem Gliede *AB* in $(S_n T_n)$ entsprechen, durch den Mittelpunkt von *AB* geht; zufolge der Bedingung $r_n = p_n$ wird dieser Punkt auch Mittelpunkt von *CD*, und daher auch für ein entsprechendes Glied in jedem folgenden Systeme $(S_n T_n)$; es ist mit anderen Worten für alle $m > n$

$$f_m\Big(\frac{x_i+x_k}{2}\Big) = f_n\Big(\frac{x_i+x_k}{2}\Big),\quad \text{also auch}\quad f\Big(\frac{x_i+x_k}{2}\Big) = f_n\Big(\frac{x_i+x_k}{2}\Big);$$

die Mittelpunkte der Glieder der successiven gebrochenen Linien theilen somit die Eigenschaft der Eckpunkte, *fest* zu liegen.]

Wir können also setzen

(125.) $$p_n = r_n = 1+u_n,\quad q_n = -(1-v_n),$$

wo u_n und $v_n > 0$ sind, $v_n < 1$, und die Reihe Σu_n convergirt, aber Σv_n divergirt.

Zunächst werden wir nun die Proportionen der interpolirten Abscissenstrecken bestimmen. Es seien x_l und x_m die Abscissen der Punkte C und D, und man setze $\frac{1}{2}(x_i+x_k) = \xi_{ik}$. Eine einfache Rechnung zeigt, was auch aus (26.) hervorgeht, dass

(126.) $$(x_l-x_i):(\xi_{ik}-x_l):(x_m-\xi_{ik}):(x_k-x_m) = (2-v_n):u_n:u_n:(2-v_n)$$

ist.

Hieraus folgt sofort die Condensirtheit der primären Abscissen: da $v_n < 1$, $\lim u_n = 0$ ist, muss wenigstens von einem gewissen n an $2u_n < 2-v_n$ sein; wenn dann x_k-x_i die grösste Abscissendifferenz in S_n bedeutet, so



wird zufolge (126.)

$$x_l - x_i = x_k - x_m < x_m - x_l, \quad \text{und also} \quad x_l - x_i < \tfrac{1}{2}(x_k - x_i),$$

und andererseits $x_l - x_i$ gleich dem grössten Intervalle in S_{n+1}; das grösste Intervall in S_{n+2} wird nachher auf dieselbe Weise kleiner als $\frac{1}{2}(x_l - x_i)$ u. s. w., also der Grenzwerth des grössten Intervalles gleich Null, d. h. die primären Abscissen sind condensirt. Hieraus folgt, da die Richtungscoefficienten der Glieder in $(S_n T_n)$ zwischen endlichen Grenzen bleiben, dass $f(x)$ stetig sein muss (§ 4).

Ferner werden wir zeigen, dass für $x_i < x < x_k$

$$(127.) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{|f(x) - f_n(x)|}{x_k - x_i} = 0$$

ist, wenn x_i, x_k auf beliebige Weise mit n variiren. Zu diesem Zwecke führen wir in dem Intervalle $x_i \dots \xi_{ik}$ eine folgendermassen definirte Hülfsfunction $F_{ik}(x)$ ein: Es sei

$$(128.) \qquad F_{ik}(x) = y_i + m \prod_{i=n}^{\infty} p_i \cdot (x - x_i) = y_i + m R_n (x - x_i), \quad \left(m = \frac{y_k - y_i}{x_k - x_i}\right).$$

Dann wird

$$(129.) \qquad \frac{|F_{ik}(x) - f_n(x)|}{x - x_i} = |m| . (R_n - 1), \quad \frac{|F_{ik}(x) - f_n(x)|}{x_k - x_i} < |m| (R_n - 1).$$

Aber $|m|(R_n - 1)$ ist für hinreichend grosse n beliebig klein, da ja $\lim R_n = 1$ ist, und $|m|$ endlich bleibt. Andererseits lässt sich zeigen, dass wenigstens für hinreichend grosse n

$$(130.) \qquad |f(x) - f_n(x)| < |F_{ik}(x) - f_n(x)|$$

ist. Aus (126.) folgt

$$(131.) \qquad \begin{cases} x_l - x_i = \dfrac{1}{2} \dfrac{2 - v_n}{2 - v_n + u_n} (x_k - x_i), \\[2ex] y_l - y_i = \dfrac{1}{2} \dfrac{2 - v_n}{2 - v_n + u_n} m(1 + u_n)(x_k - x_i), \end{cases}$$

$$(132.) \qquad y_k - y_l = m(x_k - x_i) \frac{2 - v_n + u_n v_n}{2(2 - v_n + u_n)}.$$

Sowohl $y_l - y_i$ als $y_k - y_l$ sind folglich, sobald $v_n < 2$, $\gtrless 0$ je nachdem $m \gtrless 0$. Zufolge der Symmetrie gilt dasselbe für $y_m - y_i$ und $y_k - y_m$. Es liegen somit die Ordinaten der zwei interpolirten Stellen zwischen y_i und y_k. Da für die fernere Interpolation ähnliches gilt, so wird für alle x zwischen x_i und x_k, $y_i < f(x) > y^k$ oder $y_i > f(x) > y_k$, je nachdem y_k

grösser oder kleiner als y_i ist. Hieraus folgt ja in der That, dass die primären Stellen Maximum-Minimum-Stellen für $f(x)$ werden, welche mit Bezug auf die Prioritätsbereiche die oben erwähnte Bedingung erfüllen. Es ist nun zunächst leicht zu sehen, dass für $x_i < x < \xi_{ik}$ die Gleichung (130.) stattfindet. Man nehme z. B. an, dass $m > 0$ $(y_k > y_i)$ ist. Dann ist für

$$x_i < x < x_m, \quad y_i > f(x) > y_m;$$

und da $|q_n| < 1$ ist, muss offenbar $f_n(x_i) < y_m$ sein. Aus diesen beiden Umständen folgt, dass in dem fraglichen Intervalle, $x_i < x < \xi_{ik}$,

$$|f(x)-f_n(x)| < f(x_i)-f_n(x_i)$$

ist. Andererseits ist offenbar $F_{ik}(x)-f_n(x) > F_{ik}(x_i)-f_n(x_i)$. Da überdies $F_{ik}(x_i)-f_n(x_i) > y_i-f_n(x_i)$ ist, so folgt (130.) Für die Strecke $x_i \dots x_i$ ergiebt sich dasselbe folgendermassen. Die Richtungscoefficienten der linearen Stücke, welche bei der Interpolation zwischen $(x_i y_i)$ und $(x_i y_i)$ eingeschoben werden, haben die Form $m.t_n \dots t_{n+\varrho}$, wo $t_i = p_i$ oder q_i ist, und sind also numerisch kleiner als mR_n. Für $m > 0$ folgt hieraus, dass alle Eckpunkte unterhalb der Geraden $y = F_{ik}(x)$ liegen, mit anderen Worten dass die Ordinaten aller primären Stellen kleiner als die entsprechenden F_{ik}-Werthe sind, also überhaupt $f(x) < F_{ik}(x)$. Wenigstens für $f(x) > f_n(x)$ wird folglich $|f(x)-f_n(x)| < |F_{ik}(x)-f_n(x)|$. Auch für Stellen mit $f(x) < f_n(x)$ findet man leicht, dass in der zweiten Hälfte $\xi_{il} \dots x_l$ des Intervalles $x_i \dots x_l$ dasselbe gilt; wenn nämlich $\xi_{il} < x < x_l$ ist, und $f(x) < f_n(x)$, so wird zufolge der Symmetrie $f(2\xi_{il}-x) > f_{n+1}(2\xi_{il}-x) > f_n(2\xi_{il}-x)$, also wenn wir $2\xi_{il}-x = x'$ setzen, $|f(x')-f_n(x')| < F_{ik}(x')-f_n(x')$, und andererseits

$$f(x')-f_n(x') > f(x')-f_{n+1}(x') = f_{n+1}(x)-f(x) > f_n(x)-f(x).$$

Hieraus folgt $|f(x)-f_n(x)| < F_{ik}(x')-f_n(x')$. Aber $F_{ik}(x')-f_n(x')$ ist kleiner als $F_{ik}(x)-f_n(x)$, da $x' < x$; also folgt (130.). Wenn ferner die Strecke $x_i \dots \xi_{il}$ bei der nächstfolgenden Interpolation in die Intervalle $x_i \dots x_r$, $x_r \dots \xi_{il}$ getheilt wird, so ist wie oben zu zeigen, dass die Gleichung (130.) für die Strecke $x_r \dots \xi_{il}$ und die zweite Hälfte $\xi_{ir} \dots x_r$ der Strecke $x_i \dots x_r$ gültig ist. Mit der Strecke $x_i \dots \xi_{ir}$ kann man nacher auf dieselbe Weise verfahren, und dies in infinitum forsetzen. Hieraus ergiebt sich, dass (130.), und folglich auch (127.) für das ganze Intervall $x_i \dots \xi_{ik}$ gilt. Zufolge der Symmetrie dehnt sich die Sache auch auf die Strecke $\xi_{ik} \dots x_k$ aus. [Wir nahmen oben $m > 0$ an; die Annahme $m < 0$ verändert nur unwesentlich die Beweisführung].

Aus (129.) und (130.) folgt übrigens, dass (127.) sich dahin erweitern lässt, dass

$$(133.)\qquad \lim_{n=\infty}\frac{|f(x)-f_n(x)|}{x-x_i}=0,\quad \lim_{n=\infty}\frac{|f(x)-f_n(x)|}{x_k-x}=0$$

ist.

Wenn man ferner die zwischen x_i und x_m durch die Gerade

$$x_i y_i \ldots x_m y_m$$

(AD) definirte Function mit $\varphi_n(x)$ bezeichnet, also [s. (131.), (132.)]

$$(134.)\quad \varphi_n(x)=y_i+m\left(1-\frac{u_n(2-v_n)}{2-v_n+2u_n}\right)(x-x_i)=y_i+m(1-u'_n)(x-x_i)$$

setzt, so ist leicht zu finden, dass

$$(135.)\qquad \lim_{n=\infty}\frac{|f(x)-\varphi_n(x)|}{x_m-x_i}=0,\quad \lim_{n=\infty}\frac{|f(x)-\varphi_n(x)|}{x-x_i}=0$$

ist. Da nämlich $\lim u'_n=0$ ist, so wird $\lim|f_n(x)-\varphi_n(x)|:(x-x_i)=0$; andererseits ist $(x_m-x_i):(x_k-x_i)>\frac{1}{2}$; hieraus und aus (127.) und (133.) folgt (135.).

Dagegen ist

$$(136.)\qquad \text{für } x_i \leqq x < x_m,\quad \lim_{n=\infty}\frac{|f(x)-\varphi_n(x)|}{x_m-x}=\lim|m(2-v_n)|.$$

Denn es ist

$$\varphi_n(x) = y_m-m(1-u'_n)(x_m-x),$$

und für $x_i \leqq x \leqq x_m$ ist

$$f_{n+1}(x) = y_m+m(1-v_n)(x_m-x),$$

also wird

$$f_{n+1}(x)-\varphi_n(x) = (x_m-x).m(2-v_n-u'_n).$$

Da $\lim u'_n=0$ ist, und zufolge (133.) $\lim|f(x)-f_{n+1}(x)|:(x_m-x)=0$, so folgt (136.). — Die Symmetrie giebt ähnliches für das Intervall $x_i \ldots x_k$.

Aus diesen Umständen geht hervor, wie sich die Derivirten an verschiedenen Stellen verhalten.

Es ist $\lim[(x_k-x_m):(x_m-x_i)]=1$; dies giebt im Verein mit (135.), dass an jeder primären Stelle $f'_-(x_i)$ einen bestimmten Werth $(=\lim \overset{+}{m}_n)$ hat. Ebenso $f'_+(x_i)$ $[=\lim m_n]$. Und zwar haben $f'_-(x_i)$ und $f'_+(x_i)$ immer verschiedene Vorzeichen.

Eine beliebige secundäre Stelle x correspondirt (wie bei Zweitheilung) eindeutig mit einer Reihe

$$\varepsilon_0,\quad \varepsilon_1,\quad \varepsilon_2,\quad \ldots,\quad \varepsilon_n,\quad \ldots,$$

wo die $\varepsilon = 0$, 1 oder 2 sind, und nicht alle gleich 0 oder alle gleich 2 für hinreichend grosse n. Die entsprechende Grösse U_i hat die Form

$$(137.)\quad \begin{cases} U_i = \prod_{n=0}^{\varrho_i-1} \{\tfrac{1}{2}(1-\varepsilon_n)(2-\varepsilon_n)p_n+\varepsilon_n(2-\varepsilon_n)q_n+\tfrac{1}{2}\varepsilon_n(\varepsilon_n-1)p_n\} \\ \qquad\qquad .[(2-\varepsilon_{\varrho_i})p_{\varrho_i}+(\varepsilon_{\varrho_i}-1)(1-u'_{\varrho_i})] \\ \quad = \prod_{n=0}^{\varrho_i-1} \{(1-\varepsilon_n)^2p_n+\varepsilon_n(2-\varepsilon_n)q_n\} \\ \qquad\qquad .[(2-\varepsilon_{\varrho_i})p_{\varrho_i}+(\varepsilon_{\varrho_i}-1)(1-u'_{\varrho_i})], \end{cases}$$

wo ϱ_i die i-te Grösse ε bedeutet, welche nicht gleich Null ist, und u'_{ϱ_i} dieselbe Bedeutung wie in (134.) hat. Man findet dies ebenso einfach, wie bei Zweitheilung die entsprechende Gleichung (51.). Die Zusammenfassung von Factoren, welche ε-Werthen gleich Null entsprechen, ist bei dem Grenzübergange ohne Bedeutung, $\lim p_{\varrho_i}$ ist gleich $\lim(1-u'_{\varrho_i}) = 1$, und man erhält also für $\lim U_i$, sowie offenbar auch für $\lim V_i$, den Ausdruck

$$(138.)\quad \lim U_i = \lim V_i = \lim m_n = \prod_{n=0}^{\infty} \{(1-\varepsilon_n)^2p_n+\varepsilon_n(2-\varepsilon_n)q_n\}.$$

Dem absoluten Betrage nach ist dieser Grenzwerth immer endlich und bestimmt, grösser als Null oder gleich Null. Das Vorzeichen bleibt aber unbestimmt, wenn Factoren q_n (d. h. Einsen in der ε-Reihe) niemals aufhören. Es werden also $\lim U_i$ und $\lim V_i$ auf dieselbe Weise unbestimmt, wenn in der ε-Reihe Einsen niemals aufhören, und die entsprechenden $|q_n|$ für sich ein von Null verschiedenes Product geben, obgleich $Q = 0$ ist. Letzteres setzt voraus, dass $\lim|q_n| = 1$ ist ($\lim v_n = 0$), aber findet in diesem Falle immer für eine überall condensirte, nicht-abzählbare x-Menge statt (s. § 9).

Wenn dagegen in der ε-Reihe von einem gewissen n an nur Nullen und Zweien vorkommen, so wird $\lim U_i$ immer bestimmt und grösser als Null. Aber $f'_-(x)$ hat nicht immer denselben Werth, sondern kann unbestimmt sein. In diesem Falle haben nämlich zwei consecutive Annäherungswerthe ξ_ϱ und $\xi_{\varrho+1}$ an x die Lage der oben mit x_i und x_m bezeichneten Abscissen. Diejenigen, welche x_k und x_l entsprechen, seien (wie in den vorigen Paragraphen) $\xi'_{\varrho+1}$ und $\xi^{(1)}_{\varrho 1}$. Bei diesen Bezeichnungen ist zufolge (136.) für $\xi^{(1)}_{\varrho 1} \leqq \xi^{(\lambda)}_{\varrho k} < \xi_{\varrho+1}$:

$$(139.)\quad \lim_{n=\infty} \frac{|\eta^{(\lambda)}_{\varrho k}-\varphi_n(\xi^{(\lambda)}_{\varrho k})|}{\xi_{\varrho+1}-\xi^{(\lambda)}_{\varrho k}} = \lim|m_n(2-v_n)| = \lim|U_\varrho|.(2-\lim v_n) > 0.$$

Wenn also $\xi'_{\varrho+2}-\xi_{\varrho+1}$ unendlich klein von derselben Ordnung wie $\xi_{\varrho+1}-\xi^{(1)}_{\varrho 1}$

(oder höherer Ordnung) ist, so wird (da $x < \xi'_{\varrho+2}$) auch

$$\lim \frac{|\eta^{(\lambda)}_{\varrho k} - \varphi_n(\xi^{(\lambda)}_{\varrho k})|}{x - \xi^{(\lambda)}_{\varrho k}} > 0 \quad \text{für} \quad 1 \geqq \lim[(\xi_{\varrho+1} - \xi^{(\lambda)}_{\varrho k}) : (\xi_{\varrho+1} - \xi^{(1)}_{\varrho 1})] > 0,$$

und somit $f'_-(x)$ unbestimmt (s. § 9). Aber die erwähnte Bedingung in Bezug auf $\xi'_{\varrho+2} - \xi_{\varrho+1}$ kann man (ganz wie im § 9) dadurch erfüllen, dass man in der ε-Reihe nach den resp. Zweien hinreichend viele Nullen folgen lässt. Es ist in der That zufolge (126.) und (131.)

$$(140.) \quad \begin{cases} \xi_{\varrho+1} - \xi^{(1)}_{\varrho 1} = \dfrac{u_n}{2 - v_n + u_n} (\xi'_{\varrho+1} - \xi_\varrho), \\ \xi'_{\varrho+1} - \xi_{\varrho+1} = \xi^{(1)}_{\varrho 1} - \xi_\varrho = \dfrac{2 - v_n}{2(2 - v_n + u_n)} (\xi'_{\varrho+1} - \xi_\varrho), \end{cases}$$

folglich

$$(141.) \quad \begin{cases} \xi'_{\varrho+2} - \xi_{\varrho+1} = (\xi'_{\varrho+1} - \xi_\varrho) \dfrac{2 - v_n}{2(2 - v_n + u_n)} \cdot \dfrac{2 - v_{n+1}}{2(2 - v_{n+1} + u_{n+1})} \cdots \\ \qquad \cdots \dfrac{2 - v_{n+s}}{2(2 - v_{n+s} + u_{n+s})} < \dfrac{\xi'_{\varrho+1} - \xi_\varrho}{2^{s+1}}, \end{cases}$$

wo s gleich der Anzahl der nach $\varepsilon_n = 2$ folgenden consecutiven Nullen ist, und also

$$(142.) \quad \frac{\xi'_{\varrho+2} - \xi_{\varrho+1}}{\xi_{\varrho+1} - \xi^{(1)}_{\varrho 1}} < \frac{2 - v_n + u_n}{u_n \cdot 2^{s+1}}.$$

Dieser Ausdruck bleibt endlich, wenn man s mit n so variiren lässt, dass $u_n . 2^s$ oberhalb einer positiven Grenze bleibt, was jedenfalls möglich sein muss (aber selbstverständlich voraussetzt, dass die Anzahl consecutiver Nullen keine endliche obere Grenze hat). Die Unbestimmtheitsstellen für $f'_-(x)$, welche auf diese Weise entstehen, sind überall condensirt und nicht abzählbar (vergl. oben). Analog für $f'_+(x)$; die Unbestimmtheit erfordert unendlich viele consecutive Zweien. Und da selbstverständlich die Unbestimmtheit von $f'_-(x)$ nicht ausschliesst, dass consecutive Zweien in beliebiger Anzahl auftreten (— sowie auch nicht, dass auch endlich bleibende Nullengruppen auftreten), und vice versa für $f'_+(x)$, so ist es denkbar, dass $f'_-(x)$ und $f'_+(x)$ gleichzeitig unbestimmt werden.

Andererseits ist es für die Bestimmtheit von $f'_-(x)$ hinreichend, wenn auch nicht nothwendig, dass die Anzahl consecutiver Nullen endlich bleibt (immer unter der Voraussetzung, dass von einem gewissen n an nur Nullen und Zweien vorkommen). Denn in diesem Falle ist, wie eine leichte Modi-

fication von (140.), (141.) und (142.) zeigt,

$$(143.)\qquad \lim \frac{\xi_{\varrho+2}-\xi_{\varrho-1}}{\xi_{\varrho+1}-\xi_{\varrho 1}^{(1)}} = \infty, \quad \text{und also} \quad \lim \frac{x-\xi_{\varrho+1}}{\xi_{\varrho+1}-\xi_{\varrho 1}^{(1)}} = \infty,$$

also zufolge (139.) für $\xi_{\varrho 1}^{(1)} \leqq \xi_{\varrho k}^{(\lambda)} < \xi_{\varrho+1}$

$$(144.)\qquad \lim \frac{|\eta_{\varrho k}^{(\lambda)} - \varphi_n(\xi_{\varrho k}^{(\lambda)})|}{x-\xi_{\varrho k}^{(\lambda)}} = 0,$$

und dass dies auch für $\xi_\varrho < \xi_{\varrho k}^{(\lambda)} < \xi_{\varrho 1}^{(1)}$ gilt, folgt daraus, dass für diese Strecke einerseits

$$\lim \frac{|f_{n+1}(\xi_{\varrho k}^{(\lambda)}) - \varphi_n(\xi_{\varrho k}^{(\lambda)})|}{x-\xi_{\varrho k}^{(\lambda)}} = 0$$

ist (denn $|f_{n+1}(x)-\varphi_n(x)|$ hat seinen Maximumwerth für $x = \xi_{\varrho 1}^{(1)}$), andererseits

$$\lim \frac{|f(\xi)-f_{n+1}(\xi)|}{\xi_{\varrho 1}^{(1)}-\xi} = 0 \quad \text{für} \quad \xi_\varrho < \xi < \xi_{\varrho 1}^{(1)},$$

nach (133.). — Analog für $f'_+(x)$. Und wenn sowohl consecutive Nullen, als auch consecutive Zweien in endlichbleibender Anzahl auftreten, so werden $f'_-(x)$ und $f'_+(x)$ beide bestimmt (und unter einander gleich). Die fraglichen x-Mengen, für welche $f'_-(x)$ bez. $f'_+(x)$ bez. beide bestimmt sind, bilden je eine überall condensirte und nicht abzählbare Menge (s. oben).

Auch wenn für beliebig grosse n sowohl Nullen als Einsen und Zweien in der ε-Reihe vorkommen, kann auf die oben beschriebene Weise Unbestimmtheit für $f'_-(x)$ oder $f'_+(x)$ eintreten, auch wenn $\lim U_i = \lim V_i$ bestimmt ist.

Wenn dagegen von einem gewissen n an nur Nullen und Einsen vorkommen, so wird $f'_-(x)$ immer mit $\lim U_i$ bestimmt, zufolge (133.); und ebenso, wenn nur Einsen und Zweien niemals aufhören, weil die Unbestimmtheit ja das Auftreten von (sogar unendlich vielen) consecutiven Nullen erfordert. Für $f'_+(x)$ giebt (133.) die Bestimmtheit, wenn nur Einsen und Zweien niemals aufhören; und sie folgt auch aus der Abwesenheit der Zweien.

Die Entscheidung darüber, inwieweit die Derivirten bestimmt sein können, obgleich $\lim m_n$ unbestimmt ist, ist von geringerem Interesse, da unabhängig hiervon, wie wir gesehen haben, sowohl Unbestimmtheits- als Bestimmtheitsstellen jedenfalls vorkommen müssen (die Unbestimmtheit von $\lim m_n$ kann ja übrigens nur für $\lim|q_n| = 1$ eintreten).

Die unter unseren jetzigen Annahmen entstehenden stetigen Func-

tionen $f(x)$ haben also folgende Eigenschaften: *Für eine überall condensirte, abzählbare x-Menge ist $f'_-(x)$ bestimmt und grösser als* 0, *$f'_+(x)$ bestimmt und kleiner als* 0, *oder umgekehrt, und diese Stellen sind somit Maximum- und Minimumstellen; für gewisse überall condensirte, nicht-abzählbare x-Mengen ist*

$$f'_-(x) = f'_+(x) > 0 \quad \text{bez.} \quad < 0;$$

für eine andere derartige Menge $f'_-(x) = f'_+(x) = 0$; *und für andere Mengen derselben Art $f'_-(x)$ oder $f'_+(x)$, oder beide unbestimmt.*

Beispiele:

$$(145.)\quad \begin{cases} 1) & p_n = r_n = 1 + \frac{1}{(n+1)^2}, \quad q_n = -\frac{n}{n+1}\left(v_n = \frac{1}{n+1}\right); \\ 2) & p_n = r_n = 1 + \frac{1}{2^n}, \quad q_n = -\frac{1}{2}\left(v_n = \frac{1}{2}\right); \\ 3) & p_n = r_n = e^{\frac{1}{n^2}}, \quad q_n = -\frac{1}{n+1}\left(v_n = \frac{n}{n+1}\right). \end{cases}$$

Die unter unseren obigen Annahmen unvermeidliche *Unbestimmtheit* der Derivirten an gewissen secundären Stellen, beseitigt man vielleicht am einfachsten dadurch, dass man auf geeignete Weise die Anzahl der zwischen zwei in S_n consecutiven Abscissen bei dem Uebergange zu S_{n+1} interpolirten Stellen, anstatt sie constant (gleich 2) zu nehmen mit n in infinitum wachsen lässt — wie es in der That *Köpcke*, Math. Ann. XXIX (s. § 1), versucht. Einige nähere Betrachtungen über diese Frage werde ich an anderer Stelle veröffentlichen.

Bemerkungen zu § 2. Die als Stetigkeitsbedingung angegebene Endlichkeit und Bestimmtheit von $\lim y_{\varrho_n}$ bei gegebenem Werth von $\lim x_{\varrho_n}$ (S. 3) ist in Bezug auf die *primären* Stellen so aufzufassen, dass, wenn $\lim x_{\varrho_n} = x_i$ ist, $\lim y_{\varrho_n}$ unabhängig davon sein soll, ob die Annäherung an x_i wirklich in infinitum fortgesetzt wird oder ob von einem gewissen n an alle $x_{\varrho_n} = x_i$ sind; es soll mit anderen Worten $\lim y_{\varrho_n} = y_i$ sein, was nicht daraus folgt, dass $\lim y_{\varrho_n}$ bei jeder wirklich unendlichen Annäherung bestimmt ist (und also auch für alle solche Annäherungen einen unveränderlichen Werth erhält).

S. 5 Z. 15 und 16 ist statt „punktirt unstetig" zu lesen: „total" oder „punktirt" unstetig.

Lund, 1896.

Sur les trajectoires isogonales des génératrices d'une surface développable.

(Par M. *Geminiano Pirondini* à Parme.)

1.

Dans la théorie des lignes à double courbure on trouve souvent la démonstration de la propriété suivante:

„Lorsqu'un cône et un cylindre se coupent suivant une hélice commune (hélice cylindro-conique), le cône est de révolution et la section droite du cylindre est une spirale logarithmique" *).

Cependant cette intersection n'est pas la seule ligne qui jouisse d'une telle propriété, puisqu'il y a d'autres hélices cylindriques qui, dans une partie finie ou infinie de leur étendue, peuvent être regardées comme des hélices coniques.

Voici un résultat assez remarquable qui paraît être échappé jusqu'ici aux recherches des géomètres.

Soient: x, y, z les coordonnées d'un point quelconque A d'une ligne à double courbure L, rapportée à un système d'axes coordonnés dont l'origine est O; H le rayon vecteur OA; Λ et R les projections des lignes L, H sur le plan coordonné $z = 0$; s l'arc de L.

Si l'on désigne par θ et i les inclinaisons de L sur les génératrices du cylindre et du cône, on a les conditions:

$$(1.)\qquad \begin{cases} z = s.\cos\theta - h, & (h = \text{constante}) \\ H = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = s.\cos i, \end{cases}$$

d'où l'on tire:

$$(2.)\qquad R = \sqrt{(\cos^2 i - \cos^2\theta)s^2 + 2h\cos\theta.s - h^2}.$$

---

*) Voir par exemple: *Vieille* — Compl. d'Analyse, p. 87. *P. Serret* — Nouvelle théorie des lignes à double courbure. Ch. VI.



Or une ligne à double courbure quelconque est définie par les équations:

$$(3.)\quad x = R.\cos\int\frac{\sqrt{1-(R'^2+\varphi'^2)}}{R}ds,\quad y = R.\sin\int\frac{\sqrt{1-(R'^2+\varphi'^2)}}{R}ds,\quad z = \varphi(s),$$

$\varphi(s)$ étant une fonction arbitraire de l'arc s. Si donc on porte dans ces égalités les valeurs de z et de R, on définit une ligne de l'espace L qui est à la fois une hélice du cylindre projetant la courbe sur le plan $z = 0$ et une hélice du cône projetant la courbe de l'origine O.

La détermination de L peut être effectuée au moyen de la ligne $\varLambda$; dans ce cas il est utile d'avoir l'expression du rayon de courbure ϱ de cette ligne $\varLambda$ en fonction de son arc σ. A ce but remarquons que si l'on suppose $\varphi(s) = 0$, dans les équations (3.), on obtient les équations:

$$x = R.\cos\int\frac{\sqrt{1-R'^2}}{R}ds,\quad y = R.\sin\int\frac{\sqrt{1-R'^2}}{R}ds,$$

donnant les coordonnées d'un point quelconque d'une ligne plane. Le rayon de courbure d'une telle ligne est donc lié au rayon vecteur issu d'un point fixe par la relation:

$$(4.)\qquad \varrho = \frac{R\sqrt{1-R'^2}}{1-R'^2-RR''}.$$

Si l'on remarque que:

$$s = \frac{\sigma}{\sin\theta},$$

la formule (2.) donne:

$$(5.)\qquad R = \sqrt{\frac{\cos^2 i-\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\sigma^2+\frac{2h\cos\theta}{\sin\theta}\sigma-h^2};$$

si donc on porte cette valeur de R dans l'équation (4.), on trouve:

$$(6.)\qquad \varrho = \sqrt{\frac{\cos^2 i-\cos^2\theta}{\sin^2 i}\sigma^2+\frac{2h\sin\theta\cos\theta}{\sin^2 i}\sigma-\frac{h^2\sin^2\theta}{\sin^4 i}}.$$

Cette équation définit la ligne $\varLambda$ d'une manière unique, ce qui entraîne la détermination de la ligne L.

Lorsque $h = 0$, l'équation (6.) définit une spirale logarithmique, et l'on tombe sur le cas considéré par les géomètres; la ligne L est à présent l'hélice cylindro-conique ordinaire.

Cherchons si, entre les lignes (6.) il y a des courbes cycloïdales (cycloïde, hypocycloïde, épicycloïde). Remarquons d'avance que pour ces courbes le coefficient de σ^2 doit être négatif. Cela posé, pour la cycloïde

on doit avoir:

$$\frac{\cos^2 i - \cos^2\theta}{\sin^2 i} = -1, \quad \text{d'où:} \quad \cos^2\theta = 1,$$

ce qui ne peut pas arriver.

Pour l'hypocycloïde on doit avoir:

$$\frac{\cos^2 i - \cos^2\theta}{\sin^2 i} < -1,$$

condition qui ne peut pas être vérifiée, puisqu'elle conduit à l'égalité absurde:

$$\cos^2\theta > 1.$$

Pour l'épicycloïde on doit avoir:

$$\cos^2 i - \cos^2\theta < 0, \quad \frac{\cos^2 i - \cos^2\theta}{\sin^2 i} > -1;$$

et puisque la deuxième condition est toujours vérifiée, on conclut: *„Entre les courbes cycloïdales, il n' y a que l'épicycloïde qui puisse être la section droite du cylindre contenant l'hélice L"*.

Si l'on suppose $i = \theta$, l'équation (6.) représente une développante d'un cercle dont le rayon est $h\cot\theta$.

Ces cas particuliers donnent une explication suffisante de la contradiction qui a lieu en apparence entre les résultats qu'on vient d'obtenir et ceux classiques des géomètres.

Dans l'équation (6.) de l'épicycloïde le coefficient de σ est négatif; par conséquent σ ne peut pas recevoir une valeur quelconque, puisqu'il y a des limitations qui sont nécessaires pour que l'expression de R résulte réelle. Il suit que l'équation (6.), et conséquemment l'équation (2.) en coordonnées R, s, ne représente pas toute l'épicycloïde, mais seulement une partie limitée de cette courbe.

La ligne L jouit donc de la propriété dont il s'agit seulement dans une portion finie de son étendue, portion qui ne contient pas le sommet du cône.

Quant à la développante du cercle, l'équation (5.) se réduit à:

$$R = \sqrt{2h\cot\theta.\sigma - h^2}$$

et σ peut recevoir une valeur positive quelconque plus grande que $\frac{h}{2\cot\theta}$. On doit cependant remarquer que l'orgine des rayons vecteurs R, c'est-à-dire le sommet du cône, est au centre de la développée circulaire. Conséquemment le cylindre et le cône ont une telle position réciproque, que leur intersection

effective L ne peut pas contenir le sommet du cône, car aucune génératrice du cylindre ne peut passer par ce point.

Pour les autres courbes, que l'on obtient en partant de l'équation (6.), subsistent des propriétés analogues.

On comprend donc qu'on ne peut pas appliquer à nos lignes la démonstration ordinaire, puisque celle-ci est fondée sur la supposition que le cylindre coupant le cône passe au sommet de cette surface.

Les résultats que l'on vient d'obtenir nous autorisent à dire que la dénomination d'*hélice cylindro-conique* n'appartient pas à une ligne unique, mais proprement à une famille entière de courbes.

Le rayon de courbure ϱ_L et celui de torsion r_L de ces lignes ont les expressions caractéristiques suivantes:

$$\varrho_L = \frac{\varrho}{\sin^2\theta} = \frac{1}{\sin\theta\sin i}\cdot\sqrt{(\cos^2 i-\cos^2\theta)s^2+2h\cos\theta.s-\frac{h^2}{\sin^2 i}},$$

$$r_L = \frac{\varrho}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{1}{\cos\theta\sin i}\cdot\sqrt{(\cos^2 i-\cos^2\theta)s^2+2h\cos\theta.s-\frac{h^2}{\sin^2 i}}.$$

Pour déterminer la nature du cône contenant l'hélice L, coupons cette surface par une sphère de rayon 1, ayant le centre au sommet. Si l'on a recours aux égalités (3.), on trouve que la ligne d'intersection L_0 est définie par les équations:

$$x_0 = \frac{R}{s.\cos i}\cdot\cos\int\frac{\sqrt{\sin^2\theta-R'^2}}{R}\cdot ds,$$

$$y_0 = \frac{R}{s.\cos i}\cdot\sin\int\frac{\sqrt{\sin^2\theta-R'^2}}{R}\cdot ds,$$

$$z_0 = \frac{s\cos\theta-h}{s\cos i}.$$

Dans l'hélice cylindro-conique ordinaire on a $h=0$ et conséquemment $z_0=$ constante; donc, dans ce cas, le cône est de révolution.

L'élimination de s entre les égalités (1.), (2.) conduit à l'équation:

$$\frac{\cos^2 i-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}\cdot(z+h)^2-R^2+2h(z+h) = h^2,$$

ce qui démontre cette propriété remarquable:

„Une hélice cylindro-conique, dans la rotation autour de la droite qui, passant au sommet du cône, est parallèle aux génératrices du cylindre, engendre une surface de deuxième ordre".

Dans l'hélice cylindro-conique ordinaire on a $h = 0$ et la surface de rotation se réduit à un cône..

Lorsque l'hélice est tracée sur un cylindre dont la section droite est une développante de cercle, on a $i = \theta$ et la surface de révolution est un paraboloïde.

2.

Je pose ici la question de voir s'il y a une ligne, qui puisse être une hélice de deux cônes.

Le sommet d'un des cônes soit à l'orgine 0 des axes coordonnés et le sommet V de l'autre cône soit sur l'axe des z, à la distance k du premier. Soit L la ligne à double courbure inconnue.

Puisque, après le déroulement des deux cônes sur un plan, la ligne L doit se réduire à des spirales logarithmiques, ont doit avoir:

$$(7.) \qquad \sqrt{x^2+y^2+z^2} = s.\cos i,$$

$$(8.) \qquad \sqrt{x^2+y^2+(z-k)^2} = s.\cos i_1 - m,$$

s étant l'arc de L, i et i_1 les inclinaisons de L sur les génératrices des cônes, m une constante arbitraire.

Éliminons d'abord $x^2+y^2+z^2$ entre les équations (7.), (8.), ce qui nous donne:

$$(9.) \qquad z = as^2+2bs-c,$$

a, b, c étant définis par les égalités:

$$(10.) \qquad a = \frac{\cos^2 i - \cos^2 i_1}{2k}, \quad b = \frac{m\cos i_1}{2k}, \quad c = \frac{m^2-k^2}{2k}.$$

Eliminons ensuite z entre les équations (7.), (9.), et nous avons l'égalité:

$$(11.) \qquad R = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{s^2\cos^2 i - (as^2+2bs-c)^2}.$$

Les équations (9.), (11.) servent à la solution complète du problème proposé.

Que l'on suppose de dérouler sur un plan le cylindre qui projette la ligne L sur le plan coordonné $z = 0$; la ligne plane L_0 que l'on obtient (transformée de L) est définie par les équations:

$$(12.) \qquad z_0 = z = as^2+2bs-c, \quad x_0 = \int\sqrt{1-z_0'^2}\,ds = \int\sqrt{1-4(as+b)^2}\,ds.$$

Et puisque ces équations après deux dérivations successives, donnent:

$$z_0'' = 2a, \quad x_0'' = -\frac{4a(as+b)}{\sqrt{1-4(as+b)^2}},$$

on trouve que le rayon de courbure ϱ_0 de L_0 est exprimé, en fonction de l'arc s, par l'équation:

$$\varrho_0 = \sqrt{\frac{1-4b^2}{4a^2} - \frac{2b}{a}s - s^2}.$$

On voit d'ici que la ligne plane L_0 est une cycloïde, dont le rayon du cercle générateur est

$$\pm\frac{1}{4}\cdot\frac{k}{\cos^2 i - \cos^2 i_1}.$$

La détermination de la section droite $\mathit{\Lambda}$ du cylindre qui projette la courbe L sur le plan $z=0$, peut s'effectuer à l'aide de l'èquation (11.). Si l'on désigne en effet par σ l'arc de $\mathit{\Lambda}$, on trouve:

$$d\sigma = \sin\omega . ds,$$

ω étant l'inclinaison de la tangente à L sur l'axe des z; et puisque:

$$\cos\omega = \frac{dz}{ds} = 2(as+b)$$

et conséquemment:

$$\sin\omega = \sqrt{1-4(as+b)^2},$$

il résulte:

$$d\sigma = \sqrt{1-4(as+b)^2}\, ds,$$

d'où par intégration:

$$(13.)\quad \sigma+h = \frac{as+b}{2a}\cdot\sqrt{1-4(as+b)^2} + \frac{1}{4a}\cdot\arcsin[2(as+b)],$$

h étant une constante arbitraire.

L'élimination de s entre les équations (11.), (13.) donne origine à une équation:

$$(14.)\quad F(R,\ \sigma) = 0$$

entre le rayon vecteur R et l'arc σ de $\mathit{\Lambda}$, ce qui conduit à la détermination de $\mathit{\Lambda}$, sans aucune incertitude.

En effet, si l'on résout l'équation (14.) par rapport à R et que l'on porte la valeur de R dans l'équation (4.), on obient, après le développement

des calculs:

$$\varrho = \psi(\sigma),$$

ψ étant le symbole d'une fonction connue.

La ligne plane $\varDelta$ est donc déterminée sans incertitude.

Conséquemment:

„*Il y a des lignes de l'espace jouissant de la propriété d'être des hélices de deux cônes*".

La construction revient à enrouler le plan d'une cycloïde sur un cylindre dont la section droite est la courbe que l'on vient de déterminer.

Si l'on élimine s entre les équations (7.), (8.), on obtient l'équation:

$$(15.)\quad [a(x^2+y^2+z^2)-\cos^2 i\, z - c.\cos^2 i]^2 = 4b^2\cos^2 i.(x^2+y^2+z^2);$$

celle-ci représente une surface de révolution autour de l'axe des z, dont la courbe méridienne est représentée par l'équation:

$$(16.)\qquad [a(\xi^2+\zeta^2)-(\zeta+c)\cos^2 i]^2 = 4b^2(\xi^2+\zeta^2).\cos^2 i.$$

On a donc le théorème:

„*Les lignes qui jouissent de la propriété d'être des hélices de deux cônes, dans la rotation autour de la droite joignant les sommets, engendrent la surface du quatrième ordre dont la ligne méridienne est représentée par l'équation* (16.)".

Si l'on remarque que le système des équations (7.), (8.) équivaut au système des équations (7.), (15.), on peut énoncer le théorème:

Lorsqu'une ligne tracée sur la surface de quatrième ordre (15.) *est une hélice d'un cône, elle est aussi une hélice d'un autre cône*".

On peut recourir à cette propriété pour la résolution de notre problème; il suffit pour cela de déterminer les hélices coniques qui sont placées sur la surface (15.)

Les lignes déterminées jouissent, en général, de leur propriété caractéristique seulement dans une portion, finie ou infinie, de leur étendue. On pourrait, à l'aide des équations (3.), déterminer leur rayon de courbure; et, par l'application des considérations développées au No 1, on pourrait aussi déterminer la nature des cônes dont ces lignes sont les hélices.

3.

Cas particuliers. — L'ordre de la surface (15.) peut s'abaisser; il se réduit alors au deuxième, et cela arrive lorsque $a = 0$, ou bien $b = 0$.

A) *Soit* $a = 0$ (c'est-à-dire $i_1 = i$).

Puisque les équations (12.) deviennent:

$$z_0 = 2bs - c, \quad x_0 = \sqrt{1-4b^2}.s,$$

la ligne L_0, transformée de L, est une droite et L est une hélice du cylindre projetant la ligne sur le plan coordonné $z = 0$.

L'équation (11.) se réduit à:

$$(17.) \qquad R = \sqrt{(\cos^2 i - 4b^2)s^2 + 4bc.s - c^2};$$

et on peut toujours identifier cette expression de R à celle donnée par l'équation (2.); il suffit pour cela de vérifier les conditions:

$$\cos\theta = 2b = \frac{m\cos i}{k}, \quad h = c = \frac{m^2 - k^2}{2k}.$$

Et puisque ces équations nous donnent:

$$m = \frac{2h\cos i\cos\theta}{\cos^2\theta - \cos^2 i}, \quad k = \frac{2h\cos^2 i}{\cos^2\theta - \cos^2 i},$$

on a le théorème remarquable:

„*Si une ligne à double courbure est une hélice d'un cylindre et d'un cône, elle est aussi une hélice d'un autre cône. Les génératrices rectilignes de ces deux cônes coupent l'hélice sous des angles égaux*".

Remarque. — Lorsque $h = 0$, on a $k = 0$, $m = 0$ et le deuxième cône coïncide avec le premier.

Lorsque $i = \theta$, la formule $\cos\theta = \frac{m\cos i}{k}$ donne $m = k$ et conséquemment:

$$c = 0, \quad \cos^2 i - 4b^2 = \cos^2 i - \cos^2\theta = 0.$$

En force de ces résultats, l'équation (17.) donne $R = 0$, ce qui ne peut pas arriver.

Donc:

„*L'hélice cylindro-conique ordinaire et celle placée sur un cylindre dont la section droite est une développante de cercle sont les seules lignes de cette famille de courbes qui ne peuvent pas être des hélices d'un deuxième cône*".

B) *Soit* $b = 0$ (c'est-à-dire $m = 0$).

L'équation:

$$(18.) \qquad a(\xi^2 + \zeta^2) = (\zeta + c)\cos^2 i.$$

à laquelle se réduit l'équation (16.), représente un cercle.

On a donc le théorème:

„Lorsqu'une ligne tracée sur une sphère est une hélice d'un cône, elle est aussi une hélice d'un autre cône".

Allons maintenant résoudre le problème suivant:

„Déterminer une ligne sphérique jouissant de la propriété d'être une hélice conique".

Soit $L(x, y, z)$ une ligne quelconque et $\varLambda$ sa projection sur le plan coordonné $z = 0$; si R, u sont les coordonnées polaires des points de $\varLambda$, l'origine O des axes étant le pôle, on a:

$$(19.)\qquad x = R\cos\varphi,\quad y = R\sin\varphi,\quad z = U,$$

R, U et φ étant trois fonctions de u.

Les cosinus directeurs de la tangente T à la ligne L sont:

$$\frac{R'\cos\varphi - R\sin\varphi.\varphi'}{\sqrt{R'^2+R^2\varphi'^2+U'^2}},\quad \frac{R'\sin\varphi + R\cos\varphi.\varphi'}{\sqrt{R'^2+R^2\varphi'^2+U'^2}},\quad \frac{U'}{\sqrt{R'^2+R^2\varphi'^2+U'^2}}$$

et ceux du rayon vecteur H issu de O sont:

$$\frac{R\cos\varphi}{\sqrt{R^2+U^2}},\quad \frac{R\sin\varphi}{\sqrt{R^2+U^2}},\quad \frac{U}{\sqrt{R^2+U^2}}.$$

En désignant donc par i l'angle constant formé par les droites H, T, on doit vérifier la condition:

$$\frac{RR'+UU'}{\sqrt{R^2+U^2}.\sqrt{R'^2+R^2\varphi'^2+U'^2}} = \cos i.$$

Et puisque cette équation, par le procédé ordinaire, donne:

$$(20.)\quad \varphi = \frac{1}{\cos i}\int\sqrt{\frac{(RR'+UU')^2-(R^2+U^2)(R'^2+U'^2)\cos^2 i}{R^2+U^2}}\cdot\frac{du}{R},$$

on a le théorème:

„Les équations (19.), *où* φ *est donné par l'équation* (20.), *définissent l'hélice du cône, ayant le sommet à l'origine des axes, qui est placée sur la surface de révolution dont la ligne méridienne est la courbe déterminée par les équations:*

$$x_0 = R,\quad z_0 = U.$$

La surface de révolution soit une sphère; on a:

$$R = \sqrt{r^2-(U-h)^2},$$

r étant le rayon, h une constante arbitraire, et l'équation (20.) se réduit à:

$$(21.)\quad \varphi = \frac{1}{\cos i}\int\sqrt{\frac{(r^2-h^2)(h^2-r^2\cos^2 i)+2h(h^2-r^2\cos^2 i)U-h^2U^2}{(r^2-h^2)+2hU}}\cdot\frac{dU}{r^2-(U-h)^2}.$$

La courbe méridienne de la sphère est représentée par l'équation:

$$\xi^2+(\zeta-h)^2 = r^2;$$

celle-ci, comparée à l'équation (18.) donne:

$$2h = \frac{\cos^2 i}{a}, \quad r^2-h^2 = \frac{c.\cos^2 i}{a}$$

et, à cause des valeurs (10.) de a et c:

$$k = \frac{h^2-r^2}{h}, \quad \cos i_1 = \frac{r}{h}\cos i.$$

On a donc le théorème:

„*Les équations* (19.), *dans lesquelles* φ *est donné par l'égalité* (21.), *définissent les lignes placées sur la sphère* $x^2+y^2+(z-h)^2=r^2$ *qui sont des hélices de deux cônes.*

L'un de ces cônes a le sommet à l'origine des axes, l'autre sur l'axe des z *à la distance* $\frac{h^2-r^2}{h}$ *du premier. Les inclinaisons* i, i_1 *des lignes sur les génératrices du premier et du deuxième cône sont liées entre elles par la relation* $\cos i_1 = \frac{r}{h}\cos i$."

4.

On sait que les trajectoires isogonales des génératrices d'une surface développable à cône directeur de révolution sont des hélices cylindriques. Je me propose ici de voir s'il y a d'autres développables jouissant de la même propriété.

Soit S une surface développable, L l'arête de rebroussement et L_1 une trajectoire isogonale des génératices.

Soient:

$$(x,\ y,\ z), \quad (\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma), \quad (\cos\lambda,\ \cos\mu,\ \cos\nu), \quad \varrho, \quad s$$

les coordonnées d'un point quelconque A de L, les cosinus directeurs de la tangente et de la normale principale de cette courbe, le rayon de courbure et l'arc.

Les coordonées x_1, y_1, z_1 du point A_1 de L_1 qui correspond au point A de L sont:

$$x_1 = x+H\cos\alpha, \quad \text{etc.}$$

H étant la distance AA_1.

On dérive de ces équations:

$$\frac{dx_1}{ds_1} = \left\{(1+H')\cos\alpha + \frac{H}{\varrho}\cos\lambda\right\}\frac{ds}{ds_1}, \quad \text{etc.}$$

d'où:

$$\frac{ds_1}{ds} = \sqrt{(1+H')^2 + \frac{H^2}{\varrho^2}}.$$

Conséquemment:

$$\frac{dx_1}{ds_1} = \frac{(1+H')\cos\alpha + \frac{H}{\varrho}\cos\lambda}{\sqrt{(1+H')^2 + \frac{H^2}{\varrho^2}}}, \quad \text{etc.}$$

Si donc on désigne par θ l'inclinaison de L_1 sur les génératrices de S, on a:

$$(22.) \qquad \cos\theta = \Sigma\cos\alpha\frac{dx_1}{ds_1} = \frac{1+H'}{\sqrt{(1+H')^2 + \frac{H^2}{\varrho^2}}}.$$

Puisque l'équation:

$$z_1 = z + H\cos\gamma,$$

après une dérivation par rapport à s_1, donne:

$$\frac{dz_1}{ds_1} = \left[(1+H')\cos\gamma + \frac{H}{\varrho}\cos\nu\right]\frac{ds}{ds_1},$$

si l'on désigne par i l'angle que la tangente à la ligne L_1 forme avec l'axe des z, on a:

$$(23.) \qquad \cos i = \frac{(1+H')\cos\gamma + \frac{H}{\varrho}\cos\nu}{\sqrt{(1+H')^2 + \frac{H^2}{\varrho^2}}}.$$

Et pour la solution du problème on doit chercher de vérifier les deux conditions (22.), (23.) par des valeurs constantes de θ et i.

Les équations (22.), (23.), après la division membre à membre, donnent:

$$\frac{(1+H')\cos\gamma + \frac{H}{\varrho}\cos\nu}{1+H'} = \frac{\cos i}{\cos\theta},$$

d'où l'on tire:

$$(24.) \qquad (1+H')(\cos\theta\cos\gamma - \cos i) = -\frac{H}{\varrho}\cos\nu.\cos\theta.$$

D'ailleurs l'équation (22.) donne origine à l'autre:

$$(25.)\qquad 1+H' = \frac{H}{\varrho}\cot\theta;$$

et si l'on divise les équations (24.), (25.) membre à membre, on obtient:

$$(26.)\qquad \cos i = \cos\theta\cos\gamma+\sin\theta\cos\nu.$$

On peut donc remplacer les équations (22.), (23.) par les autres (25.), (26.). L'intégration de l'équation différentielle linéaire et du premier ordre (25.) peut s'effectuer sans peine et donne:

$$(27.)\qquad H = \left(a-\int e^{-\cot\theta\int\frac{ds}{\varrho}}ds\right)e^{\cot\theta\int\frac{ds}{\varrho}},$$

a étant une constante arbitraire.

Il nous ne reste donc que de vérifier la condition (26.)

A cet effet, remarquons qu'on peut exprimer les coordonnées x, y, z d'un point quelconque d'une ligne à double courbure en fonction de l'arc par les équations:

$$(28.)\qquad x=\int\sin\varphi.\cos\psi.ds,\quad y=\int\sin\varphi.\sin\psi.ds,\quad z=\int\cos\varphi.ds,$$

φ et ψ étant des symboles de fonctions arbitraires.

Puisque ces équations nous donnent:

$$\frac{1}{\varrho^2} = \varphi'^2+\sin^2\varphi.\psi'^2,$$

$$\cos\gamma = z' = \cos\varphi;\quad \cos\nu = \varrho z'' = -\frac{\sin\varphi.\varphi'}{\sqrt{\varphi'^2+\sin^2\varphi.\psi'^2}},$$

la substitution dans l'équation (26.) conduit à l'égalité suivante:

$$\psi' = \frac{\sqrt{\sin^2\theta.\sin^2\varphi-(\cos\theta\cos\varphi-\cos i)^2}}{\sin\varphi(\cos\theta\cos\varphi-\cos i)}\cdot\varphi',$$

et celle-ci, après l'intégration, donne:

$$(29.)\qquad \psi = \int\frac{\sqrt{\sin^2\theta\sin^2\varphi-(\cos\theta\cos\varphi-\cos i)^2}}{\sin\varphi(\cos\theta\cos\varphi-\cos i)}\cdot d\varphi.$$

La surface développable S soit à cône directeur de révolution. La ligne L est, dans ce cas, une hélice cylindrique; on peut donc supposer $\cos\nu = 0$, et la condition (26.) se réduit à l'autre:

$$\cos i = \cos\theta\cos\gamma.$$

Celle-ci est vérifiée par identité.

En effet du centre O d'une sphère de rayon 1 menons les rayons

OM, *ON*, *OP*, parallèles respectivement à l'axe des z, à la génératrice de S et à la tangente de L_1.

Dans le triangle sphérique *MNP* on a:

$$MP = i, \quad NP = \theta, \quad MN = \gamma, \quad \text{angle } (MNP) = \text{un angle droit.}$$

L'égalité que l'on vient d'écrire se réduit donc à une identité. Par conséquent dans les surfaces développables à cône directeur de révolution une ligne L_1, trajectoire isogonale des génératrices, est *en tout cas*, une hélice cylindrique.

En dehors de ces surfaces il n'y a aucune autre développable jouissant de la même propriété, par rapport à *toutes* les trajectoires isogonales des génératrices.

Il y a cependant une famille de développables admettant *une seule* hélice pour trajectoire isogonale des génératrices.

Ces développables ont pour arête de rebroussement la ligne représentée par les équations (28.), $\psi(s)$ étant défini par l'égalité (29.) La surface développable déterminée, on construit aussitôt la trajectoire isogonale L_1 à l'aide de l'équation (27.).

Parme, février 1896.

Theorie der linearen Strahlencomplexe im Raume von r Dimensionen.

(Von Herrn *S. Kantor.*)

Es hat zwar der natürliche Weg die Geometrie von den Punktgebilden zu den R_i- und M_i-Gebilden*) im R_r geführt, aber die Geometrie des von R_i gebildeten Raumes erweist sich auch als praktisch erwünscht und unerlässlich. Denn schon die Theorie der algebraischen (und transcendenten) Punktmannigfaltigkeiten im R_3 wird in manchen Theilen schematischer und vollständiger durch die gleichzeitige Betrachtung der Geradencomplexe, welche sich ihr aus der algebraischen Invariantentheorie oder aus der Differentialgeometrie als ihr inneres Wesen kennzeichend zuordnen. Voraussichtlich steht den R_i-Complexen im R_r eine ähnliche Bedeutung bevor. Schon für die linearen Complexe, welche für Complexe höheren Grades dieselbe Rolle spielen wie die Tangentialebenen für die Punktflächen, lässt sich das behaupten. Ich erinnere an die Tangential- und Polarcomplexe und die hier erscheinenden linearen Systeme**). Auch die Mechanik im R_r dürfte eine Förderung von den linearen R_i-Complexen zu erwarten haben.

Der eigentliche Impuls zur nachstehenden Arbeit wurde mir aus meinen seit 1880 unternommenen Untersuchungen über lineare Systeme von Collineationen, Correlationen und quadratischen Transformationen, worin die linearen Complexsysteme vollständig enthalten sind, wobei aber in jedem Punkte die Theorie der linearen Systeme von Correlationen im R_r sehr viel reichere Ausbeute an geometrischen Sätzen liefert als die von ihr abhängige Theorie. Von den beiden speciellen linearen Correlationssystemen, welche im gesammten $\infty^{(r+1)^2-1}$ Systeme als „ausgezeichnet" enthalten sind,

*) Unter R_i ist immer ein linearer Raum von i Dimensionen, unter M_i eine Mannigfaltigkeit höherer als 1. Ordnung und von i Dimensionen verstanden.

**) *Plücker,* Neue Geometrie des Raumes 1869. — *F. Klein,* Math. Ann. V. Bd.

sind die Systeme von Polarsystemen (also von M_{r-1}^2) wenigstens im R_3 von *Reye* und *Sturm* weit und kräftig gefördert worden*), die Systeme von Nullsystemen nur gelegentlich der Büschel, Netze, etc. von linearen Complexen erwähnt worden**). Dieselben beiden Richtungen müssen im R_r verfolgt werden: die linearen Systeme von Polarsystemen oder M_{r-1}^2 und die linearen Systeme von Nullsystemen oder von linearen Strahlencomplexen.

Gegenwärtige Arbeit will in der zweiten Richtung soweit als möglich vordringen. Eine sämmtliche jetzt absehbaren Probleme umfassende Bearbeitung muss einem selbständigen Werke vorbehalten bleiben. Hier sollen hauptsächlich einzelne Irrthümer, von denen gewisse Arbeiten strotzen, aufgeklärt, grundlegende Verallgemeinerungen durchgeführt, Oerter constatirt und beschrieben, Abzählungsresultate gegeben, Constructionen von Complexen, Complex-Systemen und Connexen auf Grund der neuen Definitionen geliefert werden.

Da ich die Absicht habe, bald auch auf die R_i-Complexe einzugehen, schicke ich gleich die für sie geltenden allgemeinen Begriffe voraus.

§ 1.

Definitionen. Specielle und allgemeine R_i-Complexe.

1. Die R_i eines R_r bilden ein $\infty^{(i+1)(r-i)} = \infty^{i'r}$ System; denn durch irgend $i+1$ Punkte in $i+1$ linearen R_{r-i} ist ein R_i bestimmt, insofern dieselben die Schnittpunkte mit dem R_i sein sollen. Sieht man den R_i als Raumelement an, so kann man demselben Bedingungen (Gleichungen unter seinen Coordinaten) vorschreiben und so aus jener Mannigfaltigkeit eine

---

*) Dagegen geht *C. Segre*'s Studio sulle quadriche in uno spazio di *n* dimensioni, Acc. di Torino 1885 durchweg nur bis zu M_{r-1}^2-*Büscheln*.

**) Das Auftreten des Nullsystems mit ganzzahligen Coefficienten in der Theorie der Θ-Functionen ist bekannt. Es erscheint als diejenige Relation, welche die beiden Reihen von Periodenintegralen verbindet (in der Theorie der *Abel*schen Integrale) und dann als die Relation, welche den geraden oder ungeraden Charakter einer *Riemann*schen Charakteristik definirt (cf. *F. Prym,* Neue Grundlagen etc.). — *Kronecker,* der bekanntlich nach *Weierstrass,* eben von jener Periodenrelation ausgehend, ein gewisses Büschel von Correlationen vom Standpunkte der Aequivalenz eingehender Behandluug unterzog (cf. *Frobenius* dieses Journal Bd. 84), ist zwar in einer anderen Mittheilung an die Berliner Akademie auf den einen besonderen Fall, den des Polarsystemes, eingegangen, die Büschel von Nullsystemen hat er jedoch ganz bei Seite gelassen. — Ueber das Vorkommen beim *Pfaff*schen Problem s. die Arbeit von Herrn *Frobenius* d. J. Bd. 82.

∞^k Mannigfaltigkeit ausscheiden. Diese soll ein $\infty^k R_i$-Complex heissen. Die erwähnten Bedingungen bewirken, das von den $\infty^{(i+1)(r-i-1)} = \infty^{i_{r-1}}$ durch einen allgemeinen Punkt O gehenden R_i nur ∞^{k+i-r} in den Complex gehen, welche durch den Schnitt mit einem R_{r-1} zu untersuchen sind, in welchem ein $\infty^{k+i-r} R_{i-1}$-Complex entsteht.

Theorem I. Die in einem allgemeinen R_{r-1} enthaltenen R_i eines $\infty^k R_i$-Complexes Γ bilden daselbst einen $\infty^{k-i-1} R_i$-Complex.

Denn Γ entsteht durch Hinzunahme von $i_r - k$ Bedingungen zu den sämmtlichen R_i des R_r und dieselbe Anzahl wird den R_i des R_{r-1} auferlegt, sodass von diesen nur $\infty^{i_{r-1}-i_r+k}$ übrig bleiben, was eben ∞^{k-i-1} ist.

Corollar. Die in einem R_{r-l} enthaltenen R_i von Γ bilden einen $\infty^{k-(i+1)l}$ Complex.

Wenn Γ durch eine einzige Bedingung ausgeschieden, also $k = i_r - 1$ ist, so werde ich ihn einen vollständigen R_i-Complex oder kurz einen R_i-Complex nennen. — Wenn dann die in irgend einem R_{i+1} enthaltenen R_i durch einen Punkt F laufen, so soll der Complex linear heissen. Diese Definition hat zur Folge:

Die in irgend einem R_{r-l} enthaltenen R_i eines linearen R_i-Complexes bilden daselbst wieder einen linearen Complex.

Als einen linearen $\infty^k R_i$-Complex bezeichne ich den Schnitt von $i_r - k$ linearen R_i-Complexen. Von ihm ist in einem R_x ein linearer $\infty^{i_x - i_r + k} R_i$-Complex, also in $R_{r-\frac{k}{i+1}}$ sind einzelne R_i.

2. *Theorem II. Jeder ∞^k R_i-Complex bestimmt in $i+1$ allgemein gegebenen R_{r-i} eine $(i+1)$-grediente Punkt-Punkt...verwandtschaft.*

Ich bezeichne als $(l+1)$-grediente Punkt-Punkt...verwandtschaft unter $l+\lambda$ Räumen (oder Mannigfaltigkeiten) R_r (oder M_r) eine Verwandtschaft, vermöge deren l willkürlichen in l beliebigen der $l+\lambda$ Räume angenommenen Punkten eine Anzahl bestimmter Punkte in jedem der λ übrigen Räume angehört. Analoge Constructionen solcher Verwandtschaften mittelst Complexen von Mannigfaltigkeiten von M_i sind leicht zu bilden; die Frage nach der allgemeinsten Entstehung und Definition derselben bedarf aber einer neuen Erörterung. Der Begriff ist noch weiter zu verallgemeinern auf solche $(l+\lambda)$-grediente Verwandtschaften unter den Punkten von $l+\lambda$ Räumen, wo l willkürlichen in l der $l+\lambda$ Räume angenommenen Punkten in jedem der übrigen Räume nicht nur eine endliche Anzahl sondern

∞^i Punkte entsprechen, welche eine M_i bilden. Es ist dies eine Verallgemeinerung der von *S. Lie* Math. Ann. Bd. V. S. 159 als *n* Arten *Plücker*scher bezeichneten Verwandtschaften.

Der Beweis von II folgt nun daraus, dass nach Annahme von i Punkten nicht mehr der $(i+1)$-te Punkt im $(i+1)$-ten R_{r-i} willkürlich ist. Er unterliegt i_r-k Bedingungen und wenn $r-i<i_r-k$, greifen dieselben zurück auf den i-ten R_{r-i}, sodass auch schon der $i$te Punkt nicht willkürlich ist, und wenn $i_r-k>\lambda(r-i)$, so ist auch der Punkt im $(i+1-\lambda)$-ten R_{r-i} nicht mehr willkürlich und es sind zu je $i-\lambda$ willkürlichen Punkten in den ersten $i-\lambda$ R_{r-i} in jedem anderen R_{r-i} eine Anzahl oder ein Ort von Punkten consequent. Umgekehrt ist wahr:

Jede l-grediente Correspondenz unter $i+1$ R_{r-i} bestimmt durch die Verbindung entsprechender Punkt-$(i+1)$-tupel zu Räumen R_i einen $\infty^{(l-1)(r-i)}$ R_i-Complex.

Die Dimension des Complexes erhöht sich, wenn die Correspondenz statt einer Punkt...Punkt-, eine Punkt...Curvencorrespondenz ist etc. Die Ordnungen des Complexes auch in dem Falle, wo die Träger M_{r-i} sind, sollen anderwärts bestimmt werden*).

Theorem III. Die durch einen Punkt gehenden R_i eines linearen $\infty^k R_i$-Complexes schneiden einen R_{r-1} in einem linearen $\infty^{i+k-r} R_{i-1}$-Complexe, die durch R_l einen R_{r-l-1} in einem $\infty^{k-(r-i)(l+1)} R_{i-l-1}$-Complexe.

Denn nach der Definition in 1. ist dieser R_{i-1}-Complex Schnitt von i_r-k Complexen, welche Schnitte des R_{r-1} mit den durch O laufenden R_i aus R_i-Complexen sind. Ein einzelner solcher Schnitt hat in einem R_i des R_{r-1} einen vollständigen Bündel von R_{i-1} eines Centrums A, weil in dem R_{i+1} durch OR_i die R_i des Complexes, welche in O laufen, durch eine Gerade OF gehen (Def.), welche eben R_{r-1} in A schneidet.

3. Von den R_i-Complexen sind namentlich jene als ganz singuläre oder specielle zu bezeichnen, für welche (ohne dass der allgemeinste Fall es verlangt) eine Mannigfaltigkeit besteht, die von sämmtlichen R_i des Complexes in einem oder mehreren Punkten getroffen wird**). So bilden alle R_i, welche eine M_k^n treffen, einen $\infty^{(i-1)_{r-1}+k}$-Complex, dessen Ord-

---

*) In meiner Abhandlung über l-grediente Verwandtschaften.

**) Dass es im R_3 nicht richtig ist, solche Complexe als ohne Focalvarietät zu bezeichnen, zeigt Herr *Sturm* in der Festschrift der Math. Gesellschaft, Hamburg 1890.

nungen*) anderwärts angegeben werden sollen. Statt dann aus einem solchen durch Hinzunahme weiterer Träger M_i niedere Complexe auszuscheiden, kann auch mehrfaches Schneiden mit *einem* gegebenen M_i gefordert werden, ebenso das Hindurchgehen durch unbestimmte Curven oder M_h eines gewissen in der M_i enthaltenen Systemes. Insbesondere folgt also aus der Definition des linearen Complexes:

Theorem IV. Die sämmtlichen R_i, welche einen gegebenen R_d in einem R_h treffen, bilden einen linearen $\infty^{h_d+(i-h)_{r-h-1}}$-Complex.

Eine etwas allgemeinere Art entsteht, wenn man die R_h des Th. IV nicht nur in einem R_d sondern über den ganzen R_r hin in bestimmter Weise variiren lässt.

Theorem V. Die sämmtlichen R_i, welche von einem gegebenen $\infty^k R_h$-Complex irgend einen R_h enthalten, bilden einen $\infty^{k+(i-h)_{r-h-1}}$-Complex.

Corollar. Ist der R_h-Complex linear, so ist doch der R_i-Complex nur unter bestimmten Annahmen linear. Die Dimension k muss jedenfalls $< h_r$ sein.

Theorem VI. Die sämmtlichen R_i, welche λ gegebene $R_{l_1}, \ldots, R_{l_\lambda}$ je in einem Punkte schneiden, bilden einen linearen $\infty^k R_i$-Complex, wo

$$k = i_r - \sum_a (r-l_a) : (i+1).$$

Denn derselbe ist der Schnitt von λ-Complexen, welche je nur einen $R_{l_1}, \ldots, R_{l_\lambda}$ als Focalraum haben und jeder dieser ist der Schnitt von $(r-l_1):(i+1)$-Complexen, von denen jeder einen R_{r-i-1} als Focalraum hat, vorausgesetzt, dass diese R_{r-i-1} sich in dem R_{l_a} durchschneiden.

Theorem VII. Die sämmtlichen R_i, welche λ gegebene $R_{l_1}, \ldots, R_{l_\lambda}$ je in einem $R_{h_1}, \ldots, R_{h_\lambda}$ schneiden, bilden einen $\infty^k R_i$-Complex, wo

$$k = \Sigma h_l + \Sigma (i-l)_{r-h-1} - (\lambda-1) i_r.$$

Dieser ist der Schnitt von λ Complexen der Art des Theorems IV. Jeder ist der Schnitt von $i_r - (h_{1_{l_1}} + (i-l_1)_{r-h_1-1})$ vollständigen Complexen, daher sind insgesammt $\lambda i_r - \Sigma(\ldots)$ zum Schnitt zu bringen. — Es könnten auch $h_a = l_a$ sein.

4. Eine andere Art, um R_i-Complexe zu construiren, ist die, dass

*) Ueber die Gradzahlen eines R_i-Complexes sehe man *H. Schubert*: „Lösung des Charakteristikenproblems". Jedes seiner „Grundgebilde" ist ein specieller linearer R_i-Complex.

man in jedem R_h eines $\infty^k R_h$-Complexes in irgend bestimmter Weise einen $\infty^{k'}$-Complex festsetzt, was einen $\infty^{k+k'}$-Complex giebt $(i < h)$.

Sind ferner ∞^{k_1}, ∞^{k_2}, ..., ∞^{k_λ}-Complexe von R_{h_1}, ..., R_{h_λ} gegeben und verbindet man alle R_{h_1} mit allen R_{h_2} etc. mit allen R_{h_λ} durch je einen $R_{\Sigma h+\lambda-1}$, so erhält man einen $\infty^{k_1+k_2+\cdots+k_\lambda+\sigma}$-Complex, wenn jedesmal $\infty^\sigma R_{\Sigma h+\lambda-1}$ durch die R_h gehen.

Aus der ersten Construction folgt insbesondere: Nimmt man in den $\infty^{i+1} R_{r-1}$ durch einen R_{r-i-2} in bestimmter Weise je einen $\infty^{i_{r-1}-1} R_i$-Complex, so erhält man einen $\infty^{(i+1)(r-1-i)+(i+1)-1} = \infty^{i_r-1} R_i$-Complex.

§ 2.

Die linearen $\infty^{i_r-1} R_i$-Complexe.

1. *Theorem VIII. In einem linearen R_i-Complexe erfüllen die sämmtlichen durch einen R_{i-1} gehenden R_i einen R_{r-1}.*

Denn dieselben schneiden einen R_{r-i} in Punkten eines linearen Punkt-Complexes, das ist eines R_{r-i-1} und dieser mit dem Axen-R_{i-1} verbunden liefert den R_{r-1}. Ebenso folgt aus der Definition des linearen $\infty^k R_i$-Complexes als Schnitt von linearen R_i-Complexen:

Theorem IX. In einem linearen $\infty^k R_i$-Complexe erfüllen die sämmtlichen durch einen R_{i-1} gehenden R_i einen linearen R_{r-i-i_r+k}.

2. Es ist ferner eine sofortige Folge, dass, wenn zwei Strahlen eines linearen R_1-Complexes sich schneiden, das ganze Büschel dem R_1-Complexe angehören muss, und wenn 3, 4, 5 Strahlen des Complexes einem R_3 angehören, die ganze durch sie bestimmte Regelschaar, Congruenz oder der lineare Complex dem R_1-Complexe angehören muss.

Wenn zwei R_i eines linearen R_i-Complexes sich in einem R_{i-1} schneiden, so gehören alle R_i ihres Büschels dem Complexe an und wenn es möglich ist, durch eine gewisse Anzahl R_i in einem R_l einen linearen R_i-Complex zu bestimmen, so kann jene Anzahl von R_i nicht in einen R_l fallen, ohne dass der ganze durch sie bestimmte R_i-Complex in dem Gesammtcomplex enthalten sei.

3. Nach VIII ordnen sich die R_{r-1} den R_{i-1} so zu, dass zu jedem R_{i-1} ein R_{r-1} gehört, also zu jedem R_{r-1} $\infty^{i(r-i+1)-r} R_{i-1}$ gehören, welche

in ihm enthalten sind. Wenn auch nur ein R_i, der ausserhalb des R_{r-1} gelegen ist, diesen in einem jener R_{i-1} schneidet, so müssen wegen No. 2, alle durch einen solchen R_{i-1} gehenden R_i des R_r dem Complexe Γ angehören. Die R_i von Γ durch O schneiden R_{r-1} in einem $\infty^{i(r-i)-1}$-Complexe von R_{i-1} und dieser hat mit jenem $\infty^{i(r-i)-(r-i+1)} R_{i-1}$ gemeinsam. Ich nenne nun einen R_{i-1}, dessen sämmtliche R_i dem Complexe Γ angehören, einen singulären R_{i-1} desselben. Also wegen Theorem I:

Theorem X. Jeder lineare R_i-Complex besitzt einen $\infty^{(i-1)_r-(r-i+1)}$-Complex von singulären R_{i-1}.

Indem ich die Eigenschaft des R_1-Complexes, im R_{2q} stets einen singulären Punkt, dagegen keinen im R_{2q+1} zu besitzen, aus dem § 4 anticipire, schneide ich die durch einen R_{i-2} gehenden R_i von Γ mit einem R_{r-i-1} und erhalte daselbst einen linearen R_1-Complex. Ist dann $r-i+1=2q$, also $r-i$ ungerade, so entsteht ein singulärer Punkt F und der $R_{i-1}(FR_{i-2})$ ist ein singulärer R_{i-1} von Γ, ist $r-i$ gerade, so nicht. Also:

Theorem XI. Von dem Complexe der singulären R_{i-1} des linearen R_i-Complexes geht, wenn $r-i$ ungerade, durch jeden R_{i-2} ein einziger R_{i-1}, wenn $r-i$ gerade, keiner und wenn dennoch einer geht (bei specieller Lage des R_{i-2}) so gehen gleich ∞^1, welche einen R_{i-1} bilden).*

4. Das Theorem VIII kann noch anders ausgesprochen werden:

Theorem XII. Ein linearer R_i-Complex ist identisch mit einem lineolinearen Connexe unter R_{i-1} und Punkten, welcher die Beschaffenheit hat, dass der R_{r-1}, welcher die dem R_{i-1} entsprechenden Punkte enthält, durch diesen R_{i-1} selbst hindurchgeht.

Ich werde einen solchen Connex einen (R_{i-1}, Punkt) Incidenzconnex nennen, was von den *Clebsch*schen Hauptcoincidenzen wohl zu unterscheiden ist. Man könnte ihn jedoch auch einen (R_{i-1}, R_0) Null*connex***) nennen, müsste ihn aber dann sehr scharf von den (R_{i-1}, R_0) Null*systemen* unterscheiden, welcher letztere Begriff allein etwa durch die bisher vorliegenden Untersuchungen von *Voss* und *Sturm* gegeben wäre.

---

*) Jeder lineare R_i-Complex ist also einer von der Art des Theoremes V.

**) Ich definire allgemeiner als einen vollständigen (R_i, $R_{i'}$)-Incidenzconnex einen solchen, wo der einem R_i entsprechende $R_{i'}$-Complex jenen R_i selbst enthält, wenn $i'=i$, oder alle $R_{i'}$ enthält, welche durch jenen R_i hindurchgehen, wenn $i'>i$, oder alle $R_{i'}$ enthält, welche in jenem R_i enthalten sind, wenn $i'<i$. Der letztere Fall liegt oben im Texte vor.

Diese Incidenzconnexe (aus XII) sind in Coordinaten durch eine bigrediente Form in zwei Reihen Variabeln dargestellt, von denen eine R_{i-1}-, eine R_0-Coordinaten sind. Enthalten jene diese, so verschwindet die Form identisch.

Nehmen wir hier die Construction mittelst der l-gredienten Correspondenz aus § 1 wieder auf, so erhalten wir:

Theorem XIII. Unter irgend $i+1\,R_{r-i}$ bringt der lineare R_i-Complex eine $(i+1)$-lineare Form hervor.

Aber nicht umgekehrt bringt jede $(i+1)$- lineare Form (jeder $(i+1)$-lineare Connex) durch die Verbindung der $(i+1)$-tupel zu R_i einen linearen Complex hervor. Derselbe ist von der Ordnung $i+1$, die durch einen R_{i-1} gehenden R_i bilden einen Kegel der Ordnung $i+1$.

5. Neben XI stellt sich die andere Frage, ob R_{i+1} im Complexe enthalten sind, deren sämmtliche R_i dem Complexe angehören. Die Complex-R_i in einem R_{i+1} gehen durch einen Punkt F, und so ist jedem F ein Complex von $\infty^{(i+2)(r-i-1)-r}R_{i+1}$ durch ihn zugeordnet. In einem R_{r-1} ausserhalb F erscheint der Complex $\infty^{(i+2)(r-i-1)-r}$ von Schnitt-R_i mit diesen R_{i+1} und gleichzeitig der Complex der R_i, die aus Γ auf ihn entfallen; diese beiden haben $\infty^{(i+2)(r-i-1)-r-1}R_i$ gemeinsam. Wenn aber ein R_{i+1} ausser dem Bündel durch F einen weiteren R_i enthält, gehören alle seine R_i dem Γ an. Daher sind durch F $\infty^{(i+2)(r-i-1)-(r+1)}$ der gesuchten R_{i+1} zu rechnen, und indem ich diese R_{i+1} *vollständige* R_{i+1} der Complexe nenne:

Das gewöhnliche *Voss*sche Nullsystem erscheint so als ein (R_0, R_0') Connex mit Incidenz. Ich habe aber den Begriff des gewöhnlichen Nullsystems noch anders verallgemeinert:

Ein (R_i, R_i') Null- oder Incidenzsystem ist eine Verwandtschaft, wo einem jeden R_i eine Anzahl R_i' entspricht, welches ihn nach einem anormalen $R_{i+i'-r+\lambda}$ schneiden und zwar nenne ich es ein λfaches Nullsystem. Ich nenne es ein vollständiges (R_i, R_i') Nullsystem, wenn (bei $i' > i$) die R_i' den R_i vollständig enthalten. In diesem Sinne ist das gewöhnliche Nullsystem ein (R_0, R_{r-1}) Nullsystem. Die verallgemeinerten Begriffe dürften sich in der Theorie der Differentialgleichungen nützlich erweisen, namentlich jene, wo in den obigen Definitionen noch an Stelle der R_i Mannigfaltigkeiten M_i ganz unbestimmter, ja transcendenter oder aber analytisch eingeschränkter Art gesetzt sind.

Man kann in die Definitionen, wenn einmal M_i eingeführt sind, auch statt des Schneidens die lineare Bedingung eintragen, dass, sei es in dem Systeme (Verwandtschaft), sei es in dem Connexe zugeordnete Elemente durchaus apolar sein sollen. Dies ist jedoch wesentlich verschieden von dem *Reye*schen Nullsystemo im Gebiete der algebraischen Flächen 2. Ordnung; denn Herrn *Reyes* Nullsysteme sind eigentlich doch durchaus (Punkt-R_{r-1})-Nullsysteme nur mit der Besonderheit, dass als Punkt (Raumelement) hiebei die F^2 angesehen wird.

Theorem XIV. Jeder lineare R_i-Complex besitzt einen $\infty^{(i+2)(r-i-2)}$-Complex von vollständigen R_{i+1}, ist also ein Complex von der Art aus § 1 *No.* 4.

6. Die beiden Singularitäten aus X und XIV können verallgemeinert werden. Ich nenne einen Punkt, dessen sämmtliche R_i dem Γ angehören, einen singulären Punkt. Es kann dann einen R_λ geben, der die Eigenschaft hat, dass alle R_i, die den R_λ in einem Punkte schneiden, dem Complexe Γ angehören. Ein solcher kann also als aus ∞^λ singulären Punkten zusammengesetzt gedacht werden. Dagegen soll ein $R_{i-\lambda}$ der Eigenschaft, dass alle R_i durch ihn dem Γ angehören, ein *singulärer* $R_{i-\lambda}$ heissen. Es kann dann wieder einen R_μ geben der Lage, dass alle R_i, welche ihn in irgend einem $R_{i-\lambda}$ treffen, dem Γ angehören; dann ist R_μ aus singulären $R_{i-\lambda}$ zusammengesetzt.

Andererseits kann es geschehen, dass alle R_i, welche einem $R_{i+\lambda}$ angehören, zu Γ gehören, das soll ein „vollständiger $R_{i+\lambda}$" des Complexes sein. Es wird sich das Studium der singulären $R_{i+\lambda}$ und der vollständigen $R_{i+\lambda}$, ihres Vorkommens und gegenseitigen Verhaltens als wichtig und als der Angelpunkt der Theorie erweisen*).

7. *Theorem XV. Wenn l singuläre Punkte in einem linearen R_i-Complexe vorhanden sind, so ist der ganze von ihnen gebildete Raum aus singulären Punkten zusammengesetzt.*

Denn der R_{r-1} eines jeden R_{i-1} (Th. VIII) muss durch alle l Punkte, also durch ihren ganzen Raum gehen, sodass jeder Punkt derselben mit R_{i-1} einen Complex-R_i liefert, also überhaupt nur Complex-R_i trägt.

Theorem XVI. Wenn in einer Ebene drei unabhängige singuläre Geraden vorhanden sind, so sind alle Geraden der Ebene singulär, aber nicht die Punkte.

Denn es folgt, dass für die R_{i-1}, welche die Ebene in jenen drei Ecken treffen, die R_{r-1} aus VIII durch die Ebene gehen und daraus das Gleiche für die R_{i-1}, welche die Ebene in irgend einem Punkte treffen.

Theorem XVII. Wenn zwei vollständige $R_{i+\lambda}$ sich in einem $R_{i+\lambda-1}$ durchschneiden, so ist jeder durch sie bestimmte $R_{i+\lambda}$ vollständig im Complexe.

Denn jeder $R_{i+\lambda}$, welcher durch den Schnitt-$R_{i+\lambda-1}$ in dem $R_{i+\lambda+1}$

*) Es ist vielleicht vorzuziehen, ältere (*Plücker*sche) Analogieen zu verlassen und singuläre $R_{i-\lambda}$ mit vollständigen $R_{i+\lambda}$ gemeinsam unter dem Namen „vollständige R_μ" zusammenzufassen, für die oben erwähnten R_μ aber die Beziehungen punktsingulär, geradensingulär, ebenensingulär, ... $R_{i-\lambda}$-singulär einzuführen.

geht, enthält einen vollständigen $R_{i+\lambda-1}$ und ausser diesem noch R_i in den Schnitten mit den R_{r-1}, welche zu den R_{i-1} des $R_{i+\lambda-1}$ (gemäss VIII) gehören.

Auch XVI lässt sich verallgemeinern und giebt:

Theorem XVIII. Wenn in einem R_λ $\lambda+1$ allgemein gelegene $R_{\lambda-1}$ singulär für den R_i-Complex sind, so sind alle $R_{\lambda-1}$ dieses R_λ singulär für den R_i-Complex.

Ebenso (cf. § 2 No. 2): Wenn in einem R_3 3, 4, 5, 6 singuläre Geraden des R_i-Complexes enthalten sind, so sind alle Geraden des durch sie bestimmten ∞^1-(Regelschaar), ∞^2-(Congruenz), ∞^3-Complexes oder des ganzen R_3 singulär. Ebenso für R_μ etc.

8. Ausser diesen vollständigen R_μ kann es bei ∞^k-Complexen, wo $k < i_r - 1$, noch andere besondere R_μ geben, nämlich $R_{i+\lambda}$, in welchen die Dimension des enthaltenen R_i-Complexes übernormal (gegen § 1) ist, und $R_{i-\lambda}$, durch welche ein R_i-Complex von übernormaler Dimension hindurchgeht.

§ 3.

Fortsetzung.

1. Mit jedem linearen R_i-Complexe ist gleichzeitig ein linearer $R_{i+\lambda}$-Complex verbunden. Zieht man nämlich durch jeden R_{i-1} in dem zugeordneten R_{r-1} alle $R_{i+\lambda}$, so bilden diese einen linearen Complex $\infty^{(i+\lambda)_r-k}$ und dieser ist speciell. Insbesondere muss man sich hüten, die auf diese Art mit dem Geradencomplexe (oder Nullsysteme) verbundenen R_i-Complexe als die allgemeinsten ihrer Art anzusehen.

Theorem XIX. Hat man in einem R_{r-1} einen linearen R_i-Complex und projicirt seine sämmtlichen R_i von einem Punkte O des R_r durch R_{i+1}, so bildet die Gesammtheit aller in diesen R_{i+1} enthaltenen R_i einen linearen R_i-Complex Γ. O ist ein singulärer Punkt von Γ.

Denn durch irgend einen Punkt P von R_r geht in diesen Complex ein linearer R_i-Complex, indem die Gerade PO den R_{r-1} in P' trifft, durch P' in den R_i-Complex von R_{r-1} ein linearer Complex geht, in welchen R_i alle enthaltenen R_{i-1} genommen werden müssen und dieser R_{i-1}-Complex ist der Schnitt mit dem durch P gehenden R_i-Complex. Dieser letztere ist also ein Complex derselben Entstehungsweise wie Γ und verfährt man dann wieder so, indem man mit R_{r-2} schneidet und setzt dies fort, so gelangt man endlich zu einem Geradencomplex, welcher die vollständigen Ebenen

durch einen Punkt $P^{(\lambda)}$ enthält, die einen linearen Complex bilden. Dann ist aber sofort klar, dass die Geraden durch einen weiteren Punkt $P^{(\lambda+1)}$ einen R_{r-1} erfüllen. — O ist singulär, weil jeder R_i durch O den R_{r-1} in in einem R_{i-1} schneidet, durch welchen R_i des Complexes in R_{r-1} gehen.

Theorem XX. Hat man in einem $R_{r-\lambda}$ des R_r einen linearen $\infty^{i\,r-\lambda-1}R_i$ Complex und projicirt die sämmtlichen R_i desselben aus einem $R_{\lambda-1}$ des R durch $R_{i+\lambda}$, so bildet die Gesammtheit aller in diesen $R_{i+\lambda}$ enthaltenen R_i einen linearen R_i-Complex, für welchen $R_{\lambda-1}$ ein singulärer Raum ist.

Der R_i-Complex in $R_{r-\lambda}$ enthält $\infty^{(i+1)(r-\lambda-i)-1}R_i$ und jeder $R_{\lambda+i}$ enthält $\infty^{(i+1)\lambda}R_i$, daher insgesammt $(i+1)(r-i)-1$ entstehen. Durch einen Punkt P und $R_{\lambda-1}$ geht R_λ, welcher $R_{r-\lambda}$ in P' schneidet, aus welchem ein linearer R_i-Complex in den von $R_{r-\lambda}$ geht und sämmtliche $R_{i-\lambda}$ in dieser R_i sind die Schnitte mit R_i durch P oder durch irgend einen Punkt des $R_\lambda(PR_{\lambda-1})$. Also die aus allen Punkten eines solchen R_λ gehenden R_i-Complexe schneiden $R_{r-\lambda}$ im selben $R_{i-\lambda}$-Complexe. Der Complex ist also zurückgeführt auf den aus XIX.

Theorem XXI. Hat man in einem $R_{r-\lambda}$ des R_r wie in XX einen R_i-Complex und bestimmt wie in XX die $R_{i+\lambda}$, so bilden auch alle $R_{i-\mu}$ dieser $R_{i+\lambda}$ einen linearen Complex.

Man combinirt den vorigen Beweis mit der im Anfange des § gemachten Bemerkung.

Theorem XXII. Zieht man durch jeden Punkt einer Geraden g die in einen R_i-Complex gehenden R_i, so schneiden dieselben einen gegebenen R_{r-1} in ∞^1 linearen R_{i-1}-Complexen, welche ein lineares System bilden.

Denn durch irgend einen R_{i-1} gehen im R_r die R_i eines R_{r-1}, welcher die g in einem Punkte O schneidet und dieser liefert jenen Complex welcher durch den angenommenen R_{i-1} hindurchgeht. In diesem Complexbüschel ist auch jener enthalten, welcher entsteht, wenn O in den Schnittpunkt A von g und R_{r-1} fällt. Dieser besteht aus allen R_{i-1}, welche in den durch A im R_{r-1} gehenden R_i des R_i-Complexes aus dem R_r enthalten sind, ist also ein Complex der Art des Theorems XIX. So kommt man also auf die natürlichste Art zur Kenntnis der R_i-Complexe aus XIX.

Theorem XXIII. Zieht man durch jeden Punkt eines R_λ im R_r die R_i eines linearen R_i-Complexes Γ, so schneiden dieselben einen festen R_{r-1} in R_{i-1}-Complexen eines linearen ∞^1 Systemes. Die für sämmtliche Punkte des R_r entstehenden R_{i-1}-Complexe im R_{r-1} bilden ein lineares ∞^r System.

Der Beweis folgt in vielfach angewandter Form durch Aufbau des Systemes aus den ∞^1-Systemen. In diesem merkwürdigen ∞^r-Systeme sind also ∞^{r-1} enthalten, welche je einen singulären Punkt besitzen.

Man kommt so auf die folgende Construction eines R_i-Complexes im R_r: Man nehme im R_{r-1} ein lineares ∞^{r-i}-System von linearen R_{i-1}-Complexen und beziehe dasselbe linear auf die Punkte O eines R_{r-i}. Dann verbinde man die O mit ihren R_{i-1}-Complexen zu R_i-Complexen, so werden diese $\infty^{r-i} R_i$-Complexe einen vollständigen R_i-Complex liefern und wenn dieser linear sein soll, ist nothwendig und hinreichend, dass im $R_{r-1} \infty^{r-i-1}$ Complexe mit singulären Punkten in einem R_{r-i-1} sind, der R_{r-i} durch diesen R_{r-i-1} gehe und diese Complexe ihren singulären Punkten als Punkten O entsprechen.

Theorem XXIV. Zieht man durch jeden $O_{\lambda-1}$ eines linearen $R_{\lambda-1}$ Büschels die sämmtlichen R_i des gegebenen R_i-Complexes, so schneiden dieselben einen $R_{r-\lambda}$ in je einem linearen $R_{i-\lambda}$-Complexe und alle diese $\infty^1 R_{i-\lambda}$-Complexe bilden ein (lineares) Büschel.

Denn durch irgend einen $R_{i-\lambda}$ des $R_{r-\lambda}$ gehen in den R_r solche R_i des Complexes, welche einen $R_{r-i+\lambda-1}$ in $R_{\lambda-1}$ eines linearen Complexes schneiden, von welchem in jenem $R_{\lambda-1}$-Büschel ein einziger $R_{\lambda-1}$ enthalten sein wird, wenn angenommen wird, dass der $R_{r-i+\lambda-1}$ durch den R_λ (Träger des $R_{\lambda-1}$-Büschels) hindurchgeht. Denn in einem R_λ bilden die $R_{\lambda-1}$ des Complexes ein Bündel und von diesem geht durch einen $R_{\lambda-2}$ nur ein einziger $R_{\lambda-1}$.

Theorem XXV. Beschreibt im vorigen Theoreme der $R_{\lambda-1}$ ein lineares ∞^k-System um eine gemeinsame Axe, so bilden die wie in XXIV gebildeten $R_{i-\lambda}$-Complexe ein lineares ∞^k-System.

Der Beweis folgt aus dem vorigen Theoreme durch Aufbau des ∞^k- aus dem ∞^1-System.

Theorem XXVI. Beschreibt aber $O_{\lambda-1}$ einen linearen ∞^k-Complex in dem $R_{r-1-(i-\lambda)}$, so beschreibt der $R_{i-\lambda}$-Complex ebenfalls ein lineares ∞^k-System.

Auch dieses Theorem kann man zur Construction eines R_i-Complexes anwenden. Nimmt man nämlich in einem $R_{r-\lambda}$ ein lineares ∞^k-System von linearen $R_{i-\lambda}$-Complexen und ausserhalb ein ∞^k-System von $R_{\lambda-1}$ und bezieht die Systeme collinear und verbindet jeden $R_{\lambda-1}$ mit den $R_{i-\lambda}$ des zugewiesenen Complexes, so bilden alle diese R_i einen vollständigen R_i-Complex. Die Bedingung, dass dieser linear wird, ergiebt sich in folgender Weise.

In XXVI ist zu beachten, dass der $O_{\lambda-1}$-Complex im $R_{r-\lambda}$ einen gewissen Schnitt-R_{r-1}-Complex besitzt, für welche jener $R_{r-\lambda}$-Complex ein singulärer wird, derart nämlich, dass der $R_{\lambda-1}$ die Eigenschaft hat, dass alle R_r, welche durch ihn hindurchgehen, mit $R_{r-\lambda}$ erfüllt sind, welche alle dem $R_{r-\lambda}$-Complexe angehören. In Folge dessen gehört überhaupt jeder $R_{r-\lambda}$ durch den $R_{\lambda-1}$ dem Complexe an.

§ 4.

Die vollständigen linearen Strahlencomplexe.

1. Dieselben sind nach § 2 identisch mit dem linearen (Punkt-Ebenen) Nullsystem oder dem lineo-linearen (R_0, R'_0) Incidenzconnexe des R_r. Dieser und der Strahlencomplex können also gleichzeitig behandelt werden.

Theorem XXVII. In irgend einem R_λ schneidet das Nullsystem des R_r wieder ein Nullsystem aus und ruft ein Nullsystem unter den $R_{\lambda+1}$ jedes R_λ hervor.

Denn einem Punkte P von R_λ entspricht der Schnitt $\Pi_{\lambda-1}$ von R_λ mit seinem R_{r-1} und es sind P und $\Pi_{\lambda-1}$ incident, und wenn P sich in einer Geraden bewegt, beschreibt $\Pi_{\lambda-1}$ ein Büschel mit einem $R_{\lambda-2}$ als Axe.

Theorem XXVIII. Im R_{2q} besitzt der lineare Strahlencomplex einen singulären Punkt O und gleichzeitig das Nullsystem, dieses so, dass dem O jeder R_{r-1} des R_r entspricht und der R_{r-1} eines jeden Punktes P durch O geht.

Zunächst folgt aus XXVII, dass in jedem R_{r-1}, der einem Punkte P entspricht, das enthaltene Nullsystem singulär ist, nämlich P als singulären Punkt besitzt, aber i. A. nur einen singulären Punkt. Da nun aber leicht nachgewiesen ist, dass *jedes* Nullsystem (oder Strahlencomplex) in R_{r-1} in einem Nullsystem (oder Strahlencomplex) des R_r durch den R_{r-1} enthalten sein kann, so müsste *jedes* Nullsystem in R_{r-1} einen singulären Punkt besitzen, ausser wenn *jedes* im R_r einen solchen besitzt, da in diesem Falle die R_{r-1} durch den singulären Punkt des R_r hindurchgehen könnten. Entweder haben also *alle* Nullsysteme im R_{2q} oder *alle* Nullsysteme im R_{2q+1} einen singulären Punkt. Der Fall R_3 entscheidet für das erstere*).

*Theorem XXIX. In jedem R_r schneidet ein $R_{2\lambda}$ seinen entsprechenden $R_{r-2\lambda-1}$ (vermöge des Nullsystems) in einem Punkte, ein $R_{2\lambda+1}$ schneidet jedoch seinen entsprechenden $R_{r-2\lambda-2}$ nicht***).

*) Dieser Beweis ist ein mit Absicht etwas umgeformter Schluss von n auf $n+1$.

**) Hiermit ist ein Irrthum in zwei Noten über das Nullsystem im R_r aufgeklärt und berichtigt. Es sind dies *G. Bordiga* in Atti Veneti 1885—86 und *F. Deruyts*,

Im $R_{2\lambda}$ entsteht ein Nullsystem, das also nach XXVIII einen singulären Punkt F besitzt, der diesem F entsprechende R_{r-1} enthält $R_{2\lambda}$, es sind also $R_{2\lambda}$ und der $R_{r-2\lambda-1}$ in einem R_{r-1} enthalten und schneiden sich folglich mindestens in einem Punkte und dieser muss F sein. Aus demselben Grunde wird der $R_{2\lambda+1}$ seinen conjugirten i. A. nicht schneiden.

Im Strahlencomplexe nenne ich zwei Räume entsprechend, wenn sie in dem denselben definirenden oder vertretenden Nullsysteme entsprechend sind. Aus XXIX folgt an Stelle eines ganz falschen Ausspruches von *Bordiga:*

Corollar. Im R_{4p+1} schneiden sich zwei in einem linearen Strahlencomplexe entsprechende R_q, R'_q wo $q = 2p$ stets in einem Punkte, im R_{4p+3} schneiden sich zwei solche entsprechende R_q, R'_q, wo jetzt $q = 2p+1$, i. A. nicht in einem Punkte. —

Theorem XXX. Ein linearer Strahlencomplex im R_{2q} kann nur punktsinguläre $R_{2\lambda}$, nicht $R_{2\lambda-1}$, im R_{2q+1} aber nur punktsinguläre $R_{2\lambda+1}$, nicht $R_{2\lambda}$ besitzen.

Denn besitzt im R_{2q} ein linearer Strahlencomplex einen punktsingulären $R_{2\lambda-1}$, so würde ein $R_{2q-(2\lambda-1)-1} = R_{2(q-\lambda)}$ gelegt werden können, welcher diesen $R_{2\lambda-1}$ nicht schnitte und dennoch einen für ihn selbst singulären Punkt F enthielte. Durch F gehen nun als Complexstrahlen alle Geraden, welche $R_{2\lambda-1}$ treffen und alle, welche im $R_{2(q-\lambda)}$ liegen, sein R_{r-1} muss also den $R_{2\lambda-1}$ und den $R_{2(q-\lambda)}$ enthalten, d. i. der ganze R_r sein. Nach Theorem XV ist dann der ganze $R_{2\lambda}$ durch F und $R_{2\lambda-1}$ punktsingulär. Genau so wird der Beweis im R_{2q+1} geführt.

Corollar I. Hat ein*) Strahlencomplex im R_r genau einen punktsingulären R_λ, so hat der von ihm in einem R_{r-1} durch den R_λ enthaltene Strahlencomplex einen punktsingulären $R_{\lambda+1}$, der in einem freien R_{r-1} enthaltene Strahlencomplex einen punktsingulären $R_{\lambda-1}$**); und allgemeiner der in einem $R_{r-2\mu-1}$ durch den R_λ enthaltene einen punktsingulären $R_{\lambda+1}$, dagegen der im $R_{r-2\mu}$ durch R_λ einen singulären***) R_λ.

Mémoires de l'Académie de Belgique t. LII. Es wird daselbst gesagt, dass immer zwei conjugirte Räume sich nicht schneiden. Auch die sämmtlichen *Deruyts*schen Folgerungen sind nach XXIX zu corrigiren.

*) Von nun an soll, wenn die Ordnungen des Strahlencomplexes nicht ausdrücklich angegeben werden, stets ein linearer Strahlencomplex verstanden werden.

**) Für $r = 2q+1$ nennt Herr *Frobenius* d. J. Bd. 82 S. 248 die Zahl $r+1-2\lambda+1$ oder $r+1-2\lambda$ die Invarianz p des von Γ und R_{r-1} gebildeten Formenpaares.

***) Unter singulär soll von nun an stets punktsingulär verstanden werden, falls besonderer Anweis fehlt.

Corollar II. Die entsprechenden R_q, R'_q aus dem Corollar zu XXIX können sich also nur in $R_{2\lambda}$ oder $R_{2\lambda+1}$ schneiden, je nachdem $r = 4p+1$ oder $4p+3$.

2. Die durch solche Strahlencomplexe definirten Nullsysteme sind sogenannte exceptionelle Correlationen und zwar in der *Sturm-Hirst*schen Ausdrucksweise*) vom 2λ. bezüglich $(2\lambda+1)$. Typus. Es entsteht, indem man in einem R_{2q+1} ein Nullsystem ohne singulären Punkt construirt und es von einem ausserhalb befindlichen $R_{2\lambda}$ oder $R_{2\lambda+1}$ projicirt. In ihm gehen die irgend einem Punkte entsprechenden R_{r-1} alle durch den singulären $R_{2\lambda}$ oder $R_{2\lambda+1}$. (Th. XX.).

Es ist jedoch wichtig zu beachten, dass dies nicht die einzigen singulären oder exceptionellen Nullsysteme im R_r sind, sobald $r > 3$. Denn dem Strahlencomplexe steht dual der R_{r-2}-Complex gegenüber, welcher definirt ist dadurch, dass in jedem R_{r-1} die R_{r-2} des Complexes durch einen Punkt laufen. Einem Strahlencomplex mit singulärem R_μ entspricht ein R_{r-2}-Complex mit singulärem $R_{r-\mu-1}$, die Dimension wechselt den arithmetischen Charakter.

Aber auch der R_{r-2}-Complex definirt immer gleichzeitig ein Nullsystem. Wenn er nicht singulär ist, ist es mit dem obigen identisch und in der That tritt nach § 3. Nr. 1 mit jedem Strahlencomplex sofort ein R_{r-2}-Complex auf**). Wenn aber der R_{r-2}-Complex einen singulären R_λ hat, so ist das Nullsystem vom obigen verschieden, also stets im R_{2q}. Der singuläre R_λ hat dann die Eigenschaft, dass jeder R_{r-2}, welcher ihn in einem $R_{\lambda-1}$ scheidet, dem Complex angehört und der einem jeden R_{r-1} entsprechende Punkt ist in dem R_λ enthalten. Dieses Nullsystem entsteht, indem man unter den R_{r-1} eines Bündels der Dimension $2p+1$ ein nichtsinguläres Nullsystem construirt und es mit einem die Bündelaxe nicht treffenden R_λ des R_r zum Schnitt bringt.

Theorem XXXI. Im $R_{r=2q}$ giebt es Nullsysteme mit singulären R_λ jeder Dimension; aber wenn $\lambda \equiv r$ (mod. 2), so sind die Nullpunkte im ganzen R_r variabel, die Null-R_{r-1} auf das Bündel durch R_λ beschränkt, wenn $\lambda \equiv r-1$ (mod. 2), so sind die Null-R_{r-1} im ganzen R_r variabel, die Nullpunkte auf die

---

*) Cf. *R. Sturm* „Ueber correlative oder reciproke Bündel“, Math. Ann. Bd. XII.

**) und dieser entspricht dem R_1-Complex in seinem (also dem gemeinsamen) Nullsystem.

Punkte des R_λ beschränkt. Im $R_{r=2q+1}$ muss $\lambda \equiv r$ (mod. 2) sein, aber für jedes λ giebt es zwei Arten von Nullsystemen.

Zudem entspricht im ersten Fall einem Punkte von R_λ der ganze R_r (d. h. jeder R_{r-1} des R_r), im zweiten Falle einem R_{r-1} durch R_λ der ganze R_r (d. h. jeder Punkt des R_r).

Corollar. Die ersteren definiren keine R_{r-2}-Complexe, die letzteren keine R_1-Complexe. Oder:

Theorem XXXII. Nur der nicht singuläre Strahlencomplex Γ im R_{2q+1} bestimmt mit seinem Nullsystem gleichzeitig einen R_{r-2}-Complex. Dessen R_{r-2} sind jene, in welchen der enthaltene Complex aus Γ eine singuläre Gerade bekommt.

Theorem XXXII'. Wenn in den sämmtlichen Seiten-$R_{2\mu-1}$ eines vollständigen $(r+1)$*-Eckes die aus Γ enthaltenen Strahlencomplexe singulär sind, aber nicht in allen Seiten-$R_{2\mu-3}$, so hat der Complex Γ einen singulären $R_{r-2\mu+2}$.*

Denn in den durch einen Seiten-$R_{2\mu-2}$ gehenden $r+2-2\mu$ Seiten-$R_{2\mu-1}$ erscheinen singuläre R_1 i. A., weil singuläre R_3 in allen $R_{2\mu-2}$ singuläre R_2 und also in den $R_{2\mu-3}$ singuläre R_1 verursachen würden. Jene singulären R_1 können den $R_{2\mu-2}$ in verschiedenen Punkten schneiden, und wenn in μ', so hat er einen singulären $R_{\mu'-1}$, aber das ist wegen Voraussetzung nicht in allen möglich. Es giebt $R_{2\mu-2}$ (mindestens einen), in dem die R_1 einen einzigen Punkt ausschneiden. Dann ist aber der von diesen $r-2\mu+2$ R_1 gebildete $R_{r-2\mu+2}$ mit dem singulären Raume von Γ identisch.

Corollar. Die Hauptunterdeterminanten der Determinante Γ sind die Determinanten der in den Seitenräumen des Coordinaten-$(r+1)$-Eckes enthaltenen Strahlencomplexe. Somit ist XXXII' der geometrische Ausdruck des Theorems III in § 5 der Abhandlung von Herrn *Frobenius* „Ueber das *Pfaff*sche Problem" dieses Journal Bd. 82*).

3. Ein Strahlencomplex bestimmt auf jedem Paare von R_{r-1} eine

*) Der Beweis von XXXII' zeigt aber, dass an Stelle des Theorems II l. c. gesetzt werden kann: „Wenn in einer schiefen Determinante eine Hauptunterdeterminante $2r$ten Grades nicht Null ist, aber alle Hauptunterdeterminanten $(2r+2)$-ten Grades verschwinden, welche entstehen, wenn man zu einer jene enthaltenden Hauptunterdeterminante $(2r+1)$-ten Grades irgend eine Zeile und die gleichnamige Colonne hinzufügt, so verschwinden alle partialen Determinanten $(2r+2)$-ten Grades", und dass man im Theorem I l. c. nicht alle Paare ϱ, σ sondern nur ϱ fest und alle $\sigma > 2r$ zu nehmen braucht.

Correlation (§ 1). In dieser ist jedem Punkt des Schnitt-R_{r-2} ein ihm incidenter R_{r-2} im zweiten R_{r-1} entsprechend. Es gilt aber auch:

Theorem XXXIII. Sind zwei R_{r-1} im R_r correlativ so bezogen, dass jeder Punkt des Schnitt-R_{r-2} mit dem ihm entsprechenden R_{r-2} im einen (und also auch im anderen) R_{r-1} incident ist, so liefern die Verbindungsstrahlen aller Paare entsprechender Punkte) einen linearen Complex**).*

Denn projicirt man von einem Punkte F des R_r den ersten R_{r-1} in den zweiten, so entsteht daselbst eine Correlation, deren Incidenz-R_{r-2}^2 in den Schnitt-R_{r-2} und in einen zweiten R_{r-2} zerfällt, welcher mit F verbunden den diesem im entstehenden Strahlencomplexe zugeordneten R_{r-1} liefert.

Corollar. Lässt man F über den ganzen R_r variiren, so variirt die Correlation im R_{r-1} in einem linearen ∞^r-System. In diesem ist, wenn $r=2q$, ein Nullsystem enthalten und dieses entsteht, wenn F mit dem singulären Punkte des Complexes zusammenfällt.

Theorem XXXIV. Der lineare Strahlencomplex im R_r ist durch $\frac{(r+2)(r-1)}{2}$ Strahlen eindeutig bestimmt.

Kennt man von einer Correlation zwischen zwei R_{r-1} ∞^{r-2} Paare zugeordneter Punkte, welche zwei R_{r-2} erfüllen, so sind dies $\frac{r(r-1)}{2}$ unabhängige einfache Bedingungen. Aber die Correlation ist durch r^2-1 Bedingungen bestimmt, sodass noch $\frac{(r+2)(r-1)}{2}$ bleiben, welche ebenso viele Strahlen verlangen.

Die *Construction* des Strahlencomplexes ist also darauf reducirt, eine durch die normale Anzahl Punktepaare bestimmte Correlation zu construiren, ein Problem, das in der Ebene durch *Schröter* gelöst worden ist***), dessen

---

*) Dies sind die „Nullpaare" des Herrn *Rosanes*.

**) Der lineare Complex ist durch Theorem XXXIII als ein Degenerationsfall eines quadratischen Strahlencomplexes aufgewiesen, der entsteht, wenn in zwei ganz allgemein correlativ bezogenen R_{r-1} des R_r die Paare zugeordneter Punkte durch Strahlen verbunden werden. Ich will ihn den *Hirst*schen *Complex im R_r* nennen, weil er im R_3 zuerst von *T. A. Hirst* (Collectanea Mathematica in Memoriam Dom. Chelinii Roma 1880) untersucht worden ist. Auch im R_r lässt sich die Untersuchung von Unterarten anknüpfen, was zu beachten scheint, weil im R_r bisher überhaupt mit Ausnahme des Tangentencomplexes der M_{r-1}^2 kein quadratischer Complex untersucht ist.

***) Problematis etc. solutio nova, dieses Journal Bd. 62.

Lösung im R_{r-1} ersichtlich linear ist, aber hier zu weit führen würde, so dass ich sie voraussetzen muss und wohl auch kann*).

Wird unter Beachtung der Bedingung aus XXXIII die Correlation exceptionell, d. h. als zwei reciproke $\infty^{r-\lambda-2}$ R_{r-2}-Bündel genommen, so entsteht nicht immer der allgemeine Complex, sondern die beiden Axen R_λ schneiden den Schnitt-R_{r-2} je in einem $R_{\lambda-1}$ und diese beiden durchsetzen sich in einem $R_{2\lambda-r}$ und dieser wird ein singulärer Raum des erzeugten Complexes sein. Also es muss $2\lambda < r$ sein.

Aber im R_{2q+1} kann man auch stets zwei R_{r-1} in solcher Correlation erreichen. Man nehme irgend zwei in dem Strahlencomplexe einander entsprechende R_q, R'_q, lege durch R_q einen R_{r-1} und durch R'_q einen R'_{r-1}; dann sind die beiden R_{r-1} durch den Strahlencomplex oder das Nullsystem in solche exceptionelle Correlation gebracht, in welcher R_q, R'_q die beiden Axenräume sind. Im R_{2q} darf man sogar die Axenräume höchstens als R_{q-1}, R'_{q-1} annehmen und wenn man beide Axen in den R_{r-2} verlegen will, darf man im $R_{2q=r}$ nicht höher als $q-2$ und im $R_{2q+1=r}$ nicht höher als $q-1$ gehen. Jeder solche Fall lässt sich aber wirklich auch bei jedem Nullsystem im R_r durch passende Wahl von R_{r-1}, R'_{r-1} erreichen. Es ist also durch die eben erwähnten die *Sylvester*sche Construction in vielfacher Art verallgemeinernden *Constructionen auch der allgemeinste lineare Strahlencomplex construirbar.*

4. Durch ein einfaches $(r+2)$-Eck, dessen Eckpunkte a_i die ihnen anliegenden R_{r-1} zu entsprechenden hätten, kann das Nullsystem (wie Herr *Reye* für $r=3$ gelehrt hat) *construirt* werden. Dann gilt: *Es giebt im R_{2q+1} nur eine Art von einfachen $(r+2)$-Ecken $a_1, \ldots, a_{r+2}$, welche die Eigenschaft haben, dass jeder Punkt a_i einem bestimmten durch ihn gehenden Seitenraume R_{r-1} entspricht.*

Für R_{2q} ist es nicht möglich, weil vom singulären Punkte F in R_{2q-1} projicirt die Figur eine andere liefern müsste, welche ganz in einem R_{2q-2} wäre, woraus folgen würde, dass im R_r schon alle Seiten-R_{r-1} coincidiren.

Im R_{2q+1} beweist man für alle Voraussetzungen, wo nicht der zu a_i gehörige R_{r-1} rechts wie links von a_i gleich viele Eckpunkte enthält,

*) Bereits im R_3 liefert jene Construction *eine neue Construction*, welche denen, die von Herrn *Sturm* ausgeführt werden, hinzugefügt werden muss, umsomehr, da sie die *Sylvester*sche Construction als Degenerationsfall liefert.

dass alle $(r+2)(r+1):2$ Seiten des vollständigen $(r+2)$-Ecks Complexstrahlen sein müssten, was wieder R_{r-1} durch $a_1, \ldots, a_{r+2}$ bedingte.

In jenem symmetrischen Falle aber folgt aus der Voraussetzung zuerst, dass alle Seiten mit Ausnahme von $a_i a_{i+\varrho+1}$ und $a_i a_{i+\varrho+2}$ Complexstrahlen sein müssen. Dann sind aber die Räume $R_\varrho(a_i a_{i+1}, \ldots, a_{i+\varrho})$ vollständig im Complex enthalten; die beiden vollständigen R_ϱ: $(a_i a_{i+1}, \ldots, a_{i+\varrho})$ und $(a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{i+\varrho-1})$ schneiden sich in einem vollständigen $R_{\varrho-1}$ $(a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{i+\varrho-1})$ und also:

Theorem XXXV. Die $r+2$ Seiten-R_ϱ eines einfachen $(r+2)$-Eckes sind vollständige R_ϱ eines dadurch bestimmten linearen Strahlencomplexes. Dass mehrere Punkte a_i in R_λ anormal gelegen sind, ist zulässig, nur wird dann Γ singulär.

5. *Theorem XXXVI. Dagegen kann der Strahlencomplex (oder das Nullsystem) nicht construirt werden, wenn zwei entsprechende R_i, R_{r-i-1} und in jedem der entstehende Strahlencomplex (oder das enthaltene Nullsystem) bekannt sind, sofern i oder $r-i-1>0$.*

Verbindet man einen Punkt P mit R_i, so trifft der R_{i+1} den R_{r-i-1} in P', dem ein R_{r-i-1} in R_{r-i-2} entspricht, und der $R_{r-i}(PR_{r-i-1})$ trifft R_i in P'', welchem in R_i ein R_{i-1} entspricht. Die bekannten Räume R_{r-i-2}, R_{i-1} und der Punkt P verbunden geben nicht einen R_{r-1}, sondern einen den P von selbst enthaltenden R_{r-2}. Dies gilt, wenn sich R_i, R_{r-i-1} nicht schneiden. *Es giebt dann ∞^1 Nullsysteme.* Wenn sich R_i, R_{r-i-1} schneiden, so führt die Construction zu keinem Resultate. *Wenn man aber überhaupt die Verwandtschaft unter den R_{i+1} durch R_i und den R_{r-i-2} in R_{r-i-1} sowie jene unter den R_{r-i} durch R_{r-i-1} und den R_{i-1} in R_i kennt, so können sich R_i, R_{r-i-1} schneiden.*

Denn dann ist das Schneiden mit den Axenräumen nicht nothwendig; es stellt sich eben über das in einem solchen R_i (oder R_{r-i-1}) nach XXVII hervorgerufene Nullsystem eine völlig und ohne Ausnahmeelemente bestimmte Correlation.

6. Die Angabe von Punkt und entsprechendem R_{r-1} vertritt $r-1$ Bedingungen. Sind R_0, R_{r-1} nicht incident gegeben, so wird R_0 ein singulärer Punkt, also: ein singulärer Punkt gilt für r Bedingungen. Sind 2 Paare R_0, R_{r-1} gegeben, so dass sie incident sind, vertritt es $2(r-1)$ Bedingungen. Wird eine nicht incident, so ist R_0 singulär, der andere R_{r-1} muss diesen R_0 enthalten, sonst wird auch der zweite R_0 singulär. Angabe von 2 incidenten R_0, R_{r-1}, ist dasselbe wie Angabe von entsprechenden R_1, R_{r-2}.

Giebt man 3 Paare R_0, R_{r-1} (sei es auch mit Incidenz) und es schneiden sich nicht die 3 R_{r-1} in der Ebene der 3 R_0, so wird die R_2 vollständig, die 3 R_0 werden singulär, also R_2 ganz singulär. Ebenso wird allgemein bewiesen:

Theorem XXXVII. Wenn bei Angabe von λ Paaren R_0, R_{r-1} irgend ein Paar nicht incident ist, genügt nur ein Complex mit singulärem R_0 daselbst. Wenn die $2\nu+1$ R_0 entsprechenden R_{r-1} sich nicht in einem Punkte des von den $2\nu+1$ Punkten gebildeten $R_{2\nu}$ schneiden, ist dieser $R_{2\nu}$ punktsingulär. Wenn von den übrigen (gegebenen) R_{r-1} μ nicht durch diesen $R_{2\nu}$ gehen, ist der durch μR_0 und den $R_{2\nu}$ bestimmte $R_{2\nu+\mu}$ punktsingulär.

7. Alle Geraden, welche die Punkte eines R_i mit allen Punkten des entsprechenden R_{r-i-1} verbinden, sind Strahlen des Complexes, *sofern R_i, R_{r-i-1} sich nicht schneiden.* Sie vertreten dann, weil in jedem Punkte von R_i $r-i$ Geraden zur Bestimmung der dortigen hinreichen, $(i+1)(r-i)$ unabhängige Bedingungen. Für mehrere solche Angaben hat man zu bilden $\Sigma(i+1)(r-i)$ und hiervon die $\Sigma(k+1)(r-k)$ bezüglich der sämmtlichen R_k, in welchen sich irgend zwei der R_i schneiden, zu subtrahiren. Es gilt ferner die Verallgemeinerung von XXIX:

Theorem XXXVIII. Entsprechende R_i, R_{r-i-1}, die sich in einem R_λ schneiden, wo $\lambda \equiv i+1$, schneiden sich sofort in einem $R_{\lambda+1}$, und dieser ist vollständig im Complex des R_r enthalten.

Der Schnitt des Paares R_i, R_{r-i-1} ist für den Complex in jedem der beiden Räume ein singulärer Raum und es tritt also XXIX in Kraft*).

Wenn nun R_i, R_{r-i-1} sich in einem R_λ schneiden, so vertritt ihre Angabe $(\lambda+1)(r-\lambda)$ Bedingungen wegen R_λ und ausserdem $(i-\lambda)(r-i)$ wegen entsprechender $R_{i-\lambda-1}$, $R_{r-i-\lambda}$ in einem $R_{r-\lambda-1}$, also:

Theorem XXXIX. Entsprechende R_i, R_{r-i-1} zählen, wenn sie sich nicht schneiden, für $(i+1)(r-i)$ und wenn sie sich in einem R_λ schneiden, für $(\lambda+1)(r-\lambda)+(i-\lambda)(r-i)$ Bedingungen.

8. Wenn $i=1$, muss jeder Complexstrahl, welcher R_1 schneidet, auch den R_{r-2} schneiden, für $i>1$ gilt dies nicht mehr. Die Bestimmung des Complexes durch mehrere Paare R_1, R_{r-2} kann sofort auf 6. reducirt werden, indem jede Gerade durch zwei Punkte ersetzt wird, deren R_{r-1}

*) Es gilt auch: Wenn in einem R_i der enthaltene Complex einen singulären R_λ besitzt, so schneidet der dem R_i entsprechende R_{r-i-1} ihn im R_λ und hat diesen ebenfalls punktsingulär für seinen Complex.

dann bekannt sind. In Folge des Theoremes XXIX dürfen also schon nicht mehr zwei Paare von R_1, R_{r-2} willkürlich gegeben werden. Denn nimmt man zwei Punkte auf einer R_1, einen auf der zweiten, so kennt man für alle drei die R_{r-1} und wenn die Ebene also nicht singulär werden soll, muss die wegen XXX in No. 6 angeführte Bedingung befriedigt sein.

Die Behauptung von *Bordiga* und *Deruyts*, dass durch $r-1$ Paare von R_1, R_{r-1} das Nullsystem erst bestimmt ist, ist also zu berichtigen.

Aber wenn allen aus XXIX folgenden Bedingungen genügt ist, so kann die Construction schon mittelst $q+1$ Paaren R_1 und R_{r-2} durchgeführt werden, wie XXXIX lehrt. Also:

*Theorem XL. Der lineare Strahlencomplex (das Nullsystem) im R_{2q+1} kann aus $q+1$ Paaren entsprechender R_1, R_{r-2} construirt werden, sofern diese allen aus XXIX folgenden Bedingungen gemäss gegeben sind**).

Nämlich zunächst kennt man in jedem R_3, welcher zwei der R_1 enthält, sofort in Folge des Schnittes mit den entsprechenden R_{r-1} zu den Punkten dieser R_1 den ganzen R_1-Complex, hierauf sofort in jedem R_5 durch 3 der R_1 u. s. w., bis man ganz von selbst zum R_1-Complex im R_r kommt.

Die Construction durch verschiedene Paare R_i, R_{r-i-1}, welche insgesammt nach No. 7 gezählt, die $\frac{(r+2)(r-1)}{2}$ Bedingungen des Complexes erschöpfen, ist allerdings weniger einfach, weil man in dem R_i nicht direct das Nullsystem als Consequenz hat, höchstens noch für $r=2$, wo man, da die Bedingung XXX befriedigt sein muss, im Schnittpunkte F schon das Strahlbüschelcentrum hat. Also wenn $\alpha_1.2(r-1)+\alpha_2.(3r-4)=\frac{(r+2)(r-1)}{2}$ und XXX befriedigt ist, so kann die Construction aus α_1 Paaren R_1, R_{r-1} und α_2 Paaren R_2, R_{r-2} sofort auf No. 6, d. i. auf Paare R_0, R_{r-1} reducirt werden.

---

*) Diese Lagenbedingungen zu befriedigen, erfordert noch keine Construction des Nullsystemes. Aber $r-1$ Paare zu kennen, wie sie *G. Bordiga* und *F. Deruyts* ohne Einschränkung voraussetzen, involvirt an sich schon eine Construction, da ja nach XL schon aus $q+1$ dieser $r-1$ Paare die übrigen $q-1$ Paare construirt werden können (und müssen).

Die Construction aus $r-1$ Paaren führt i. A. zu einem Nullsysteme viel höherer Ordnung und zwar der $r$ten und kann aber verallgemeinert werden, indem man $r-1$ Strahlencomplexe ∞^{r-1} der 1. Ordnung und der 1. Klasse nimmt und durch einen Punkt P in sie die $r-1$ Strahlen zieht, welche dann den dem P entsprechenden R_{r-1} bestimmen. Das System ist birational.

9. Unter den übrigen Bestimmungsarten ist namentlich jene von Interesse, wo zwei entsprechende R_q vorkommen. Sie gelten, wenn sie sich nicht schneiden, also sicher nur wenn $q=2p+1$, für $(q+1)^2$, wenn in einem R_0, für $q(q+3)$ Bedingungen.

Theorem XLI. Die Geraden, welche drei sich nicht schneidende R_q treffen, bilden eine M_{q+1}^{q+1}, welche $\infty^1 R_q$ enthält, die alle jene Geraden treffen. Durch die Stützpunkte dieser werden irgend zwei R_q collinear auf einander bezogen. Wenn unter den $\infty^1 R_q$ irgend eine quadratische Involution eingerichtet wird, so sind diese Paare entsprechende Paare in einem ganz bestimmten linearen Strahlencomplexe, falls $q=2p+1$. Für $2p=q$ reducirt man auf $r-2$.

Zwei allgemeine Paare R_q geben $2q^2+4q+2$ Bedingungen, also wegen $\frac{(r+2)(r-1)}{2}=2q^2+3q$, um $q+2$ zu viel, wovon noch die $q+1$ allen vier R_q gemeinsamen Transversalen zu subtrahiren sind. Wenn aber ∞^q gemeinsame Strahlen da sind, also $q+2$ unabhängige (da die Collineation unter $2R_q$ durch $q+2$ Transversalen bestimmt ist), so bestimmen sie gerade einen Complex. Die den ∞^q-Geraden in ihm entsprechenden R_{r-2} schneiden jeden der vier R_q in einem R_{q-1} (als dual zu den Geraden) und da also je q von diesen R_{r-2} sich in einer Geraden durchschneiden, welche sich auf die $4R_q$ stützt, so setzen sie sich überhaupt aus solchen Geraden zusammen und schneiden also auch die anderen $\infty^1 R_q$, welche nach dem 1. Theil des Theorems existiren, je in R_{q-1}, d. h. ihre R_q-Reihe ist mit der ersten identisch, oder: die R_q sind unter einander durch den Strahlencomplex gepaart.

Jener erste Theil des Theorems aber ist eine Folge eines viel allgemeineren Theoremes, von dem ich anderwärts spreche, von dem aber nur Theile bekannt sind*), denn die Collineation folgt daraus, dass von P in R_q über zwei andere R_q', R_q'' nur eine Gerade geht, welche also R_q' in P' schneidet, und wenn P eine Gerade g verfolgt, der Raum gR_q'' den Raum R_q' in einer Geraden schneidet.

10. *Theorem XLII. Ein vollständiger R_λ ist ganz in dem ihm entsprechenden $R_{r-\lambda-1}$ enthalten.* Denn ist P in R_λ, so sind alle Geraden von P in R_λ im Complexe, sein R_{r-1} geht durch R_λ, also alle $\infty^\lambda R_{r-1}$ gehen durch R_λ, ihr Schnitt-$R_{r-\lambda-1}$ also ebenfalls**).

---

*) *Kötter*, Preisschrift der K. Akademie der Wissenschaften, Berlin 1888.

**) Zu berichtigen sind auch drei von *Deruyts* ausgesprochene Sätze über die Räume,

Corollar. Der Complex, welcher im $R_{r-\lambda-1}$ enthalten ist, hat den R_λ als punktsingulär.

Theorem XLIII. Alle $R_{\lambda+\mu}$, welche durch einen vollständigen R_λ in den diesem entsprechenden $R_{r-\lambda-1}$ hinein gezogen werden, haben den R_λ als punktsingulär in ihrem Complexe, sind also vollständig in Γ nur für $\mu=1$.

Denn von jedem Punkte P des R_λ gehen in den $R_{\lambda+\mu}$ die Geraden, welche auch in seinem R_{r-1} enthalten sind, das sind aber alle des $R_{\lambda+\mu}$, weil der R_{r-1} durch den $R_{r-\lambda-1}$ hindurchgeht, also ist P singulär.

Corollar I. Hiermit ist vollständig die Aufgabe gelöst, den Complex $\Gamma_{\lambda,\mu}$ jener R_μ zu bestimmen, deren aus Γ enthaltener Complex einen punktsingulären R_λ besitzt. Es kann wegen XLIII. μ nicht grösser als $r-\lambda-1$ sein und es ist $\mu+\lambda\equiv 0$ (mod. 2).

Anderwärts*) habe ich „Tangential-R_l-Complexe" eines R_i-Complexes $n$ter Ordnung definirt und kann nun sagen, dass die R_μ des Corollars für $\lambda=1$ und μ ungerade den Tangential-R_μ-Complex von Γ bilden. Ich behaupte nun:

Theorem XLIII'. Die Tangential-R_μ-Complexe von Γ sind lineare Complexe für μ ungerade und erweitern sich auf der ganzen R_r für μ gerade.

Denn die durch einen $R_{\mu-1}$ gehenden R_μ, welche von ihren entsprechenden $R_{r-\mu-1}$ in einer Geraden geschnitten werden, verbinden den $R_{\mu-1}$ mit den Punkten seines entsprechenden $R_{r-\mu}$, erfüllen also für μ ungerade wegen XXIX einen R_{r-1}, für μ gerade den ganzen R_r.

Corollar I. Ein R_μ-Complex aus Corollar I für irgend ein λ ist in dem R_μ-Complexe für $\lambda-1$ enthalten.

Corollar II. Für einen R_μ-Complex aus Corollar I (für irgend ein λ) *ist der $R_{\mu-1}$-Complex für dasselbe λ der singuläre Complex, den er nach Theorem XL besitzen muss.* Für diesen ist wieder der $R_{\mu-2}$-Complex singulär u. s. w. bis zum Complex der vollständigen R_λ herab.

Corollar III. Die R_μ des $\Gamma_{\lambda,\mu}$ sind vollständige Räume für den $\Gamma_{\lambda-1,\mu-1}$.

„welche sich selbst entsprechen", nämlich die drei letzten Sätze in No. 18. — Ich bemerke hier, dass, während ich *G. Bordigas* Abhandlung seit 1893 kenne, ich erst Anfang Mai 1895 die Abhandlung von *F. Deruyts* in Brüssel selbst gelesen habe. Aber am 15. April hatte ich meine gegenwärtige Abhandlung bereits bis zu den letzten Paragraphen ausgearbeitet. Die Sätze VI., VII., VIII. in *F. Deruyts'* ebenfalls analytischer Abhandlung: Soc. de Liège, Mém. XVII pag. 1 sind zu berichtigen.

*) Sitzungsber. der k. Bayer. Akademie der Wissenschaften 5. Dec. 1896: „Ueber $n$te Momente von R_i-Complexen im R_r".

11. *Theorem XLIV. In einem allgemeinen Strahlencomplexe des* R_{2q+1} *sind keine vollständigen* R_{q+1}, $\infty^{\binom{q+2}{2}}$ *vollständige* R_q, $\infty^{\frac{(q-\lambda+1)(q+3\lambda+2)}{2}}$ *vollständige* $R_{q-\lambda}$ *enthalten.*

In einem allgemeinen Strahlencomplexe des R_{2q} *sind keine vollständigen* R_{q+1}, $\infty^{\binom{q+1}{2}}$ *vollständige* R_q, $\infty^{\frac{(q+3\lambda)(q-\lambda+1)}{2}}$ *vollständige* $R_{q-\lambda}$ *enthalten.*

1. Beweis. Wenn im R_{2q-1} ein vollständiger R_λ vorhanden ist, giebt es im R_{2q} vollständige $R_{\lambda+1}$ wegen § 3; und zwar die gleiche Mächtigkeit. Nun sind im $R_{2q+1}\infty^{2q+1}R_{2q}$, durch einen vollständigen R_λ gehen $\infty^{2q-\lambda}R_{2q}$, daher: wenn im R_{2q} ∞^x vollständige R_λ vorhanden sind, so giebt es im R_{2q+1} $\infty^{x+\lambda+1}$, im R_4 ∞^3 R_2, also im R_5 ∞^6 R_2, im R_6 ∞^6 R_3, im R_7 ∞^{10} R_3, ... im R_{2q} $\infty^{\binom{q+1}{2}}$ R_q, im R_{2q+1} $\infty^{\binom{q+2}{2}}$ R_q. Durch $R_{q-\lambda}$ gehen im R_{2q+1} $\infty^{2\lambda(q-\lambda+1)}$ $R_{2q-2\lambda+1}$ und in $R_{2q-2\lambda+1}$ giebt es $\infty^{\binom{q-\lambda+2}{2}}$ vollständige $R_{q-\lambda}$, daher bleiben wesentlich verschieden $\infty^{\binom{q-\lambda+2}{2}+2\lambda(q-\lambda+1)}=\infty^{\frac{(q-\lambda+1)(q+3\lambda+2)}{2}}$ $R_{q-\lambda}$. Im R_{2q+2} giebt es dann $\infty^{\frac{(q-\lambda+1)(q+3\lambda+2)}{2}+q-\lambda+1}=\infty^{\frac{(q-\lambda+1)(q+3\lambda+4)}{2}}$ $R_{q-\lambda}$, nämlich über jedem $R_{q-\lambda}$ des Complexes von R_{2q+1} so viele als im $R_{q-\lambda+1}$ aus dem singulären Punkte nach dem $R_{q-\lambda}$ solcher enthalten sind.

2. Beweis. Ist x_λ die gesuchte Dimension der vollständigen R_λ, so leite ich aus XLIII ab, dass $x_\lambda = x_{\lambda-1}+(r-2\lambda)-\lambda$, woraus die gemeinsame Formel $x_\lambda = (\lambda+1)(2r-3\lambda):2$.

Ein vollständiger R_{q+1} kann aber im R_{2q+1} nicht vorhanden sein, weil nach XLIII der entsprechende Raum R_{q-1} ihn enthalten müsste, während sich dieser zu einem grösseren Raume nur für singuläre R_λ erweitern kann*).

Corollar I. Ein vollständiger R_q des Complexes in R_{2q} muss den singulären Punkt enthalten.

Corollar II. Das λ im Corollar zu XLIII kann nicht grösser als q sein.

Theorem XLV. Wenn ein linearer Strahlencomplex im R_{2q} *einen singulären* $R_{2\lambda}$ *besitzt, so enthält er keine vollständigen* $R_{q+\lambda+1}$, $\infty^{\binom{q-\lambda+1}{2}}$ *vollständige*

*) Herr *Frobenius* hat in diesem Journal Bd. 85 „Ueber adjungirte lineare Differentialausdrücke" den Beweis eines *Jacobi*schen Satzes auf die Auffindung von $q+1$ Werthsystemen, welche paarweise eine alternirende bilineare Form im R_{2q+1} befriedigen, reducirt. Das sind aber die oben behandelten vollständigen R_q des Γ im R_{2q+1}; ihre Construction erfolgt also aus XLII und XLIV.

$R_{q+\lambda}$, $\infty^{\frac{(q-\lambda-\mu+1)(q-\lambda+3\mu)}{2}}$ $R_{q+\lambda-\mu}$. *Wenn ein linearer Strahlencomplex im R_{2q+1} einen singulären $R_{2\lambda+1}$ besitzt, so enthält er keine vollständigen $R_{q+\lambda+1}$, $\infty^{\binom{q-\lambda+2}{2}}$ vollständige $R_{q+\lambda}$, $\infty^{\frac{(q-\lambda-\mu+1)(q-\lambda+3\mu+2)}{2}}$ vollständige $R_{q+\lambda-\mu}$.*

Man hat nur statt der Zahlen in XLIV die auf einen (den $R_{2\lambda}$ oder $R_{2\lambda+1}$ ergänzenden) $R_{2q-2\lambda-1}$ oder $R_{2q-2\lambda}$ bezüglichen zu setzen.

Im R_{2q} schneiden die vollständigen Complex-$R_{q+\lambda-\mu}$ den singulären $R_{2\lambda}$ in einem (variablen) $R_{2\lambda-\mu}$, im R_{2q+1} die $R_{q+\lambda-\mu}$ den $R_{2\lambda+1}$ in einem $R_{2\lambda+1-\mu}$.

Theorem XLVI. Wenn im R_{2q} ein Complex einen vollständigen $R_{q+\lambda}$ enthält, besitzt er einen singulären $R_{2\mu}$ ($\mu \geqq \lambda$), welcher den $R_{q+\lambda}$ in einem $R_{\mu+\lambda}$ schneidet.

Wenn im R_{2q+1} ein Complex einen vollständigen $R_{q+\lambda}$ enthält, besitzt er einen singulären $R_{2\mu+1}$ ($\mu \geqq \lambda$), welcher den $R_{q+\lambda}$ in einem $R_{\lambda+\mu-1}$ schneidet.

Denn nach XLII muss z. B. im R_{2q+1} der dem $R_{q+\lambda}$ entsprechende $R_{q-\lambda}$ sich mindestens zu einem $R_{q+\lambda}$ erweitern, was nur geschieht, wenn $R_{q+\lambda}$ mindestens durch einen $R_{2\lambda-1}$, welcher singulär für den Complex ist, hindurchgeht. Allgemein erweitert sich der $R_{q-\lambda}$ eines $R_{q+\lambda}$ zu einem $R_{q+2\mu-\lambda}$, wenn der $R_{q+\lambda}$ durch einen singulären $R_{2\mu-1}$ hindurchgeht. Ebenso im R_{2q} erweitert sich der $R_{q-\lambda-1}$ eines $R_{q+\lambda}$ zu einem $R_{q+2\mu-\lambda}$, wenn der $R_{q+\lambda}$ durch einen singulären $R_{2\mu}$ hindurchgeht.

Anmerkung. Die $\infty^{(q+1)^2}$ R_q des R_{2q+1} lassen sich als Individuen auf einen $R_{(q+1)^2}$ abbilden, die Zuordnung entsprechender R_q durch einen Complex bildet sich als eine involutorische Transformation ab und die vollständigen R_q als die Punkte der Doppelpunktsvarietät $M_{\frac{(q+2)(q+1)}{2}}$. Die Fundamentalgebilde der Involution werden nur durch die Abbildung hervorgerufen*).

12. *Theorem XLVII. Die Geraden, welche drei vollständige R_q des Complexes im R_{2q+1} treffen, bilden eine M_{q+1}^{q+1}, welche ∞^1 vollständige R_q des Complexes enthält, sowohl für $q=2p$, als $=2p+1$.*

Denn irgend zwei in zwei R_q (von den drei) durch die Collineation (Siehe Th. XLI) projectivisch gemachte Geraden bringen ein Hyperboloid hervor, dessen andere Geraden derselben Schaar in den übrigen R_q der

*) Auch die allgemeinen Correlationen bewirken unter den R_q des R_{2q+1} eine Transformation, welche sich im $R_{(q+1)^2}$ als eine nicht involutorische Transformation abbildet.

M_{q+1}^{q+1} enthalten sind und aber, weil für den im R_3 des Hyperboloides enthaltenen Partialcomplex des ganzen Complexes gilt, dass die durch drei Strahlen bestimmte Schaar ganz im Complexe enthalten ist, hat man bereits in jedem der $\infty^1 R_q$ einen Strahl und da man auf diese Art jedem Strahle des ersten R_q entsprechend in jedem einen Strahl erhalten kann, hat man alle Strahlen jedes R_q, q. e. d.

13. Die Geraden über zwei vollständige R_q, R'_q entsprechen R_{r-2}, welche diese in R_{q-1} treffen und schneiden mit den R_{r-2} in einem willkürlichen R_{r-1} eine Correspondenz unter ∞^{r-1} Punkten und jenen $\infty^{r-1} R_{r-3}$ aus, welche zwei gegebene R_{q-1} in je einem R_{q-2} treffen. Diejenigen Complexstrahlen, welche R_q, R'_q treffen, liefern in R_{r-2} die Incidenzpunkte und da die von einem Punkte P des R_q ausgehenden Strahlen in R'_q einen R'_{q-1} ausschneiden, so hat man unter R_q, R'_q eine Correlation und es gilt aber als letzte Consequenz des verallgemeinerten *Hirst*schen Complexes (cf. Anmerkung zu XXIII):

Die Nullpaare von Punkten einer Correlation unter zwei R_q, R'_q geben verbunden Strahlen, welche im R_r, wenn $r < 2q+1$ einen quadratischen Complex ∞^{2q-1}, und wenn $r = 2q+1$ eine M_{r-1}^2 erfüllen.

Der Schnitt dieser M_{r-1}^2 mit dem R_{r-1} ist dann die Incidenz $-M_{r-2}^2$ der Verwandtschaft. Die Geraden über einem R_λ des R_{r-2}, welche R_q, R'_q begegnen, liefern eine $M_{\lambda+1}^{\lambda+1}$ in einem $R_{2\lambda+1}$ und setzen sich in ein System von R_{r-2} um, das ebenfalls $(\lambda+1)$ter Ordnung ist, so lange $\lambda < q+1$. R_{q+1} trifft bereits R_q, R'_q in zwei Punkten uud der Strahlenort ist daher nur M_{q+1}^{q-1}. Ebenso für $M_{q+\lambda}^{q-\lambda}$. Daher:

Theorem XLVIII. Die Geraden und R_{r-2} mit zwei vollständigen R_q, R'_q als Directricen schneiden einen R_{r-1} in Punkten und R_{r-3}, welche gemäss dem Entsprechen jener in einer Verwandtschaft sind, wo einem $R_{q\pm\lambda}$ von Punkten eine $\infty^{q\pm\lambda}$-Varietät der Ordnung $q\mp\lambda$ von R_{r-3} entspricht.

Nimmt man, um an XLI anzuknüpfen, zwei entsprechende R_q, R'_q als Directricen, so wird die gleich definirte Verwandtschaft im R_{r-1} ein Nullsystem, daher:

*Theorem XLIX. Sind R_q, R'_q einander entsprechende Räume, so entsteht im R_{r-2} dieselbe Verwandtschaft wie in XLVIII aber als (R_0, R_{r-3}) Nullsystem**).

*) Dasselbe Problem kann für das Polarsystem gestellt werden, indem man 1.) zwei in der M_{r-1}^2 enthaltene R_q, R'_q nimmt und die Verwandtschaft der Geraden und R_{r-2},

14. Diese Untersuchung erfährt eine Verallgemeinerung, indem man i vollständige R_{q-i+2} oder R_x, wo $x=(r-i+1):i$, im Complexe nimmt, welche sich nicht gegenseitig schneiden und keine anormal niederen Räume bestimmen.

Es gilt: Die R_{i-1} und R_{r-i}, welche jeden von i vollständigen R_{q-i+2} in einem Punkte und R_{q-2i+3} schneiden, werden durch das Nullsystem unter einander verwandelt und bilden je einen $\infty^{i(q-i+2)}R_{i-1}$-Complex und $\infty^{i(q-i+2)}R_{r-i}$-Complex.

Denn der R_{r-i}, welcher dem R_{i-1} entspricht, muss mit jedem der iR_{q-i+2} einen R_{r-1} bestimmen, ihn also in einem R_{q-2i+3} schneiden.

Theorem XLIX'. Die R_{i-1}, welche $i+1$ vollständige R_x treffen, bilden eine M_{x+i-1}, welche ∞^{i-1} vollständige R_x enthält.

Denn die R_{i-1}, welche jeden von i R_x in einem R_0 treffen, bilden ein solches System, dass durch jeden R_0 des R_r ein einziger R_{i-1} geht. Für $i+1$ R_x tritt dann, weil die $\infty^x R_{i-1}$ durch die Treffpunkte collinear bezogen sind, das in XLI citirte allgemeine Princip in Kraft. Dass dann die $\infty^{i-1}R_x$ vollständig sind, wird wie in XLVII bewiesen.

Ebenso: Wenn die R_{i-1}, welche $i+\lambda$ vollständige R_μ je in einem Punkte schneiden, eine $M_{\mu+i-1}$ bilden, so enthält dieselbe ∞^{i-1} vollständige R_μ.

Sind i R_{q-i+2} in solcher Lage, dass der entsprechende R_{q+i-2} jedes durch die $i-1$ übrigen hindurchgeht, so sind alle R_{i-1}, welche jeden der i R_{q-i+2} in einem Punkte schneiden, vollständig im Complexe enthalten.

Denn ist P ein Treffpunkt, so geht ein R_{r-1} durch die übrigen R_{q-i+2} und durch ihn, also durch jeden der R_{i-1}, welcher P enthält; dies gilt für alle i Treffpunkte des R_{i-1} mit den Directrixräumen, also ist R_{i-1} vollständig*). Derselbe Beweis gilt aber auch für R_x, also:

Theorem L. Sind i R_μ in solcher Lage, dass der entsprechende $R_{r-\mu-1}$ jedes durch die $i-1$ übrigen geht, so sind alle R_{i-1}, welche jeden der i R_μ in einem Punkte schneiden, vollständig im Complexe enthalten.

Hier kann μ nach Bedarf bestimmt werden.

Besonders bemerkenswerth sind die $(q+1)$-tupel von Geraden,

---

die sich auf sie stützen, mit einem R_{r-1} schneidet 2) dieses für zwei bezüglich M^2_{r-1} entsprechende R_q, R'_q vornimmt.

*) Es sei erwähnt, dass die vollständigen R_q auch für den simultanen R_{r-2}-Complex vollständig sind. Herrn *Frobenius*' Satz I § 7 letzt cit. Abh. drückt dasselbe aus.

welche man wohl als Pol-$(q+1)$-tupel bezüglich des Complexes bezeichnen kann. Alle R_q, welche sie treffen, sind vollständig. Aus den Directrixgeraden der in XLVII gefundenen M_{q+1}^{q+1} lassen sich unendlich viele solche $(q+1)$-tupel bilden.

Auch noch die Pol-q-tupel von Ebenen, Pol$(q-1)$tupel von R_3, u. s. w. bis Pol$\left(\frac{q}{3}+3\right)$tupel von $R_{\frac{2q}{3}-1}$ sind interessant, weil sich die i R_{q-i+2} bis dahin nicht gegenseitig schneiden. Diesen sind hinzuzufügen die i-tupel von R_x, welche aber nur möglich sind, wenn $r-i+1$ durch i theilbar ist. Sie existiren also nicht, wenn $r+1$ oder $(r+1):2$ eine Primzahl ist. In Räumen solcher Dimension kann man Pol-tupel aufstellen, deren constituirende Räume nicht alle dieselbe Dimension besitzen.

Theorem LI. Wenn unter den R_q, welche $q+1$ gegebene Complexstrahlen schneiden, zwei Paare entsprechender sind, giebt es ∞^1, enthalten in einer M_{q+1}^{q+1}.

Beweis kann auf Grund von XLVI geführt werden, oder aber durch den Schluss von r auf $r+2$.

15. An diese in sich transformirten R_q-Systeme knüpft sich eine andere Construction des Complexes, indem man ihn aus speciellen ∞^{2q}-Strahlencomplexen zusammensetzt, welche alle je zwei Directrix-R_q besitzen. Es bedarf ∞^{2q-1} solcher Paare, am besten eines in sich transformirten ∞^{2q-1}-R_q Complexes, von dem also durch jeden Punkt $\infty^{q-2}R_q$ gehen. Die Construction desselben gehört in die Theorie der R_q-Complexe. Es sei noch angeführt:

Theorem LII. Für $r>3$ lässt sich das Nullsystem aus einem willkürlichen Paare von ein- und umgeschriebenen $(r+1)$-Ecken nicht construiren.

Denn es müssen die Bedingungen XXIX noch befriedigt sein, während sich Paare ohne diese Bedingung construiren lassen. Auch zeigt die Construction, wo man b_1 in R_{r-1} $(a_2, \ldots, a_{r+1}) = A_1$, R_{r-1} $(b_2, \ldots, b_{r+1}) = B_1$ durch a_1 willkürlich annimmt, dass man nur noch in B_1 auf den r Schnitt-R_{r-2} mit den in a_1 zusammentreffenden A_i r Punkte zu nehmen hat, deren Verbindungs-R_{r-2} durch bestimmte r Punkte, Schnittpunkte mit den Geraden b_1a_2, b_1a_3, $\ldots$, b_1a_{r+1} hindurchgehen. Dies erfordert nur in R_3 die bekannte Bedingung und liefert nach sofortiger Abzählung eine weit grössere Unendlichkeit von Polyederpaaren. A_1, B_1 schneiden sich in einem R_{r-2} C_{11},

in welchem die beiden $(r+1)$-Ecke $b_1 a_2, \ldots, a_{r+1}$ und $a_1 b_2, \ldots, b_{r+1}$ *zwei Configurationen* $\binom{r+1}{2}_{\binom{r-1}{2}}$ von Punkten und R_{r-3} ausschneiden, jede zusammengesetzt aus einem vollständigen r-Eck (Schnitt mit $\overline{b_1 a_2}, \ldots, \overline{b_1 a_{r+1}}$ und $\overline{a_1 b_2}, \ldots, \overline{a_1 b_{r+1}}$) und einem ihm eingeschriebenen vollständigen r-Flach (Schnitt mit $[a_2, \ldots, a_{r+1}]$ und $[b_2, \ldots, b_{r+1}]$) und so, dass das r-Flach der einen dem r-Eck der andern *um*geschrieben ist. Nimmt man aber in C_{11} zwei Configurationen in solcher Lage, so bilden zwei über ihnen in A_1, B_1 construirte $r+1$-Ecke zusammen (in anderer Folge) zwei ein- und umgeschriebene $(r+1)$-Ecke des R_r. Da nun auch im R_{2q} solche Paare von Configurationen construirbar sind, wie eine Discussion beweist, so folgt: „Es gibt für $q > 1$ auch im R_{2q} Paare sich ein- und umgeschriebener $(r+1)$-Ecke".

16. *Theorem LIII. Soll ein R_λ singulär für einen Complex sein, so gilt dies für* $(\lambda+1)(2r-\lambda):2$ *Bedingungen.*

Denn er ist durch $(\lambda+1)$ Punkte P_i bestimmt. P_1 erfordert r Gerade durch ihn, P_2 erfordert ausser $P_1 P_2$ nur mehr $r-1$ Gerade, P_3 ausser $P_3 P_1$, $P_3 P_2$ nur noch $r-2$ u. s. w. bis $r-\lambda$, also insgesammt $(\lambda+1)r-(\lambda+1)\lambda:2$.

17. *Kronecker* hat Berl. Mon. 1874 die Bemerkung gemacht, dass zu jeder Correlation A ein Nullsystem $A-A'$ und ein Polarsystem $A+A'$ gehöre. Mit dem letzteren stimmt ein Satz von *Schröter* in diesem Journal Bd. 77 überein. Ich werde überhaupt $A+\lambda A'$ das „natürliche Büschel" von A nennen.

Theorem LIV. Wenn eine Correlation ein lineares System bildet, variirt sowohl ihr Nullsystem N als ihr Polarsystem P je in einem linearen Systeme.

Durch Entwicklung wird $(A+\lambda B)' = A'+\lambda B'$ und also

$$(A+\lambda B)+(A+\lambda B)' = (A+A')+\lambda(B+B'),$$

sowie

$$(A+\lambda B)-(A+\lambda B)' = (A-A')+\lambda(B-B').$$

Theorem LV. Jedes Nullsystem mit jedem Polarsystem combinirt setzt ein natürliches Büschel zusammen.

Denn $(P+\lambda N)' = P'+\lambda N'$ und $(P+\lambda N)+(P+\lambda N)' = 2P$,

$$(P+\lambda N)-(P+\lambda N)' = 2\lambda N,$$

also enthält das natürliche Büschel jeder Correlation in $P+\lambda N$ diese P, N.

Anmerkung. Im Raume R_{r^2+2r} aller Correlationen bilden alle natürlichen Büschel die Strahlen eines linearen ∞^{r^2+2r-1} Complexes. Nämlich

es sind zwei Räume $R_{\frac{r(r+3)}{2}}$, $R'_{\frac{(r+2)(r-1)}{2}}$ Raum der Polarsysteme und Raum der Nullsysteme vorhanden, welche als Directricen dienen; jeder Strahl, welcher beide Räume trifft, ist wegen LV ein Complexstrahl. LIV sagt dann aus, dass die Complexstrahlen, welche von den Punkten eines R_λ ausgehen, auf den Directrix R, R' lineare Stützräume liefern*). — Ein allgemeines ∞^k Correlationssystem enthält erst bei $k = \frac{r^2+3r+2}{2}$ ein Nullsystem und erst bei $k = \frac{r^2+r}{2}$ ein Polarsystem.

18. Mit jeder Correlation im R_r ist ein linearer Strahlencomplex verbunden, der durch N vertretene. Da aber der R_{r-1} eines P durch den Schnitt der in A und A' entsprechenden R_{r-1} hindurchgeht, folgt:

Theorem LVI. Die Geraden, welche in einer Correlation involutorische Punktreihen tragen, bilden einen allgemeinen linearen Strahlencomplex).*

Dies folgt auch aus dem Resultate für die ebene Correlation, dass der Punkt σ von ∞^1 Correlationen eines Büschels eine Gerade beschreibt**). Cf. meine „Bemerkung etc.“ Math. Ann. Bd. XIX.

19. Wenn der $\left\{\begin{matrix}\text{Strahlencomplex}\\ R_{r-2}\text{-Complex}\end{matrix}\right\}$ ein lineares System durchläuft, so auch sein Nullsystem, aber nicht der verbundene $\left\{\begin{matrix}R_{r-2}\text{-Complex}\\ \text{Strahlencomplex}\end{matrix}\right\}$. Denn es giebt zweierlei lineare Systeme von Nullsystemen, je nachdem der einem P entsprechende R_{r-1} ein lineares System beschreibt oder der einem R_{r-1} entsprechende P. Umgekehrt also lautet es: Beschreibt N ein lineares

---

*) Die vollständigen R_λ dieses Complexes sind jene, in welchen die enthaltene Correlation ein Polarsystem wird. — Es giebt $\infty^{\frac{(r+1)(r+2)}{2}}$ Correlationen, aus denen ein gegebener Complex Γ wie in LVI entsteht.

**) *Theorem. Die Geraden, welche in einer willkürlichen Correlation des R_r projectivische Punktreihen von gegebenem characteristischen Doppelverhältnisse D tragen, bilden einen quadratischen Complex Γ_D der als Singularitätenfläche zwei M^2_{r-1} besitzt. Alle diese ∞^1 Complexe bilden einen Büschel, und auch die ∞^1 M^2_{r-1} bilden ein und dasselbe Büschel, in welchem auch die beiden Incidenz-M^2_{r-1} der gegebenen Correlation vorkommen.* Γ_D ist der Tangentencomplex einer Incidenz-M^2_{r-1}, $\Gamma_{D=0,\infty}$ der Complex der „Wechselstrahlen“, $\Gamma_{D=-1}$ ist $(\Gamma)^2$. Beim Polarsystem degenerirt der lineare Complex in den Geradenraum, daher vereinigen sich alle Γ_D in den Tangentencomplex der Kernfläche, beim Nullsystem vereinigen sie sich in den Complex des Nullsystemes, zweimal gezählt.

Theorem. Sind irgend zwei Correlationen im R_r gegeben, so bilden die Geraden, auf denen zwei Projectivitäten entstehen, die apolar sind, einen quadratischen Complex.

System im einen oder andern Sinne, so beschreibt entweder der Strahlencomplex oder der R_{r-2}-Complex ein lineares System.

20. *Theorem LVII. Die vollständigen R_λ eines linearen Strahlencomplexes bilden von $\lambda = 1$ bis $\lambda = q$ je einen linearen R_λ-Complex von der in XLIV angegebenen Dimension.*

Zunächst für R_q. Um die durch P_1 gehenden vollständigen R_q zu haben, verbinde man P_1 mit den in einem R_{r-2} seines R_{r-1} enthaltenen vollständigen R_{q-1}, weil die R_q in dem R_{r-1} enthalten sein und einen R_{r-2} in jenen R_{q-1} schneiden müssen. Im R_{r-2} wird P_2 angenommen und man geht wieder so vor. Nach Annahme von $P_1, \ldots, P_{q-1}$ erhält man die durch sie gehenden vollständigen R_q, indem man sie mit den Strahlen in einer Ebene des ihrem R_{q-2} entsprechenden R_{q+2} verbindet, sodass sich der in dieser Ebene enthaltene Punkt F mit einstellt und aber die R_q die Ebene mit enthalten, einen R_{q+1} bilden.

Ebenso für R_λ. Man beginnt mit P_1 und setzt fort bis $P_{\lambda-1}$, durch deren $R_{\lambda-2}$ gehen vollständige R_λ, welche eine $R_{r-2\lambda+3}$ des dem $R_{\lambda-2}$ entsprechenden $R_{r-\lambda+2}$ in Strahlen des linearen Complexes schneiden, also selbst einen linearen Complex um den $R_{\lambda-2}$ als Axe bilden*).

21. *Theorem LVIII. Irgend $r-1$ ∞^2-Bündel von R_{r-1} mit Axen R_{r-3}, welche unter einander $(r-1)$-linear bezogen sind, bringen durch den Schnitt von je $r-1$ zusammengehörigen R_{r-1} einen Strahlencomplex der Ordnung und Klasse $r-1$ hervor. Wenn aber die durch sie entstehende M_{r-1}^{r-1} in $r-1$ R_{r-1} durch die $r-1$ Axen zerfällt, wird der Complex linear***).

In jeder Ebene R_2 entsteht durch Schnitt eine $(r-1)$-lineare Verwandtschaft unter den Geraden und die Incidenzcurve ist von der Klasse $r-1$, ebenso schneiden die Büschel von R_{r-1} durch einen Punkt P einen R_{r-1} in $r-1$ Büscheln, welche $(r-1)$-linear sind und daher eine M_{r-1}^{r-1} hervorbringen. — Andererseits ruft jeder lineare Complex unter $r-1$ Bündeln eine $(r-1)$ lineare Verwandtschaft hervor, welche, wenn man $r-2$ R_{r-1} mit der Axe R_{r-2} des letzten R_{r-1} Büschels schneidet, eine M_{r-1}^{r-1} hervorbringt, die in $r-1$ R_{r-1} durch die Axen R_{r-3} zerfällt. Der etwas umständliche Beweis, dass die Bedingung auch hinreicht, muss des Raumes wegen wegbleiben.

*) Es gilt auch das reciproke Theorem von XLIII. [Corr.]

**) Die Auffassung des Geradenraumes als Schnitt von $r-1$ ∞^2-Systemen von R_{r-1} ist nur dual zur Auffassung und Abbildung des R_{r-2}-Raumes auf Grund der Schnittpunkte der R_{r-2} mit $r-1$ gegebenen Ebenen des R_r.

§ 5.

Die Abbildung von Complex und Geradenraum auf Punkträume.

1. Es kommen hauptsächlich zwei Wege in Betracht. Entweder es wird zuerst der Geradenraum abgebildet und hiermit der Complex auf eine unicursale M_{r-1}, deren Abbildung auf R_{r-1} nachher erfolgt, oder es wird erst der Complex abgebildet und der Geradenraum aus ∞^1 Complexen zusammengesetzt.

Erstes Abbildungsverfahren.

Indem ich No. 3 aus § 4 wieder aufnehme, schneide ich alle Complexstrahlen mit zwei $R_{r-1}: A'_{r-1}$, A''_{r-1} in Punkten a', a'' und beziehe diese collinear auf zwei $R_{r-1}: B'_{r-1}$, B''_{r-1}, welche in einem R_{2r-1} enthalten sind, sodass den a', a'' die Punkte b', b'' entsprechen, und weise dem Strahle $a = \overline{a'a''}$ den Strahl $b = \overline{b'b''}$ zu. Die Correlation (XXXIII) unter a', a'' überträgt sich in eine Correlation unter b', b'', und die Geraden b', b'' erfüllen also eine M^2_{2r-2}*), welche einen R_{2r-2} in dem R_{2r-1} in einer M^2_{2r-3} schneidet, $b'b''$ in einem Punkte β_1. Dann ist β_1 das Bild von a. Gleichzeitig ist der ganze Strahlenraum von R_r auf die Punkte des R_{2r-2} abgebildet. Die M^2_{2r-3} enthält zwei feste R_{r-2}, Schnitte des R_{2r-2} mit den beiden B'_{r-1}, B''_{r-1}. Dem Schnitte D_{r-2} von A'_{r-1}, A''_{r-1} entsprechen in den Collineationen zwei Räume D'_{r-2}, D''_{r-2}, welche collinear sind und durch die Verbindungslinien (h) entsprechender Punkte eine M^{r-1}_{r-1} hervorbringen, welche den R_{2r-2} in einer M^{r-1}_{r-2} schneidet, die also B', B'' je in einem R_{r-3} trifft.

Theorem LIX. Der Strahlenraum des R_r kann auf einen Punktraum R_{2r-2} derart abgebildet werden, dass den linearen Strahlencomplexen M^2_{2r-3} entsprechen, welche zwei sich nicht schneidende R_{r-2} und eine M^{r-1}_{r-2}, die jene in zwei R_{r-3} trifft, gemeinsam haben.

Einem ebenen Strahlbüschel von R_r entspricht eine M^2_1 in R_{2r-2} und daher ein Complex zweiten Grades einem R_{2r-3}; wenn dieser durch einen fundamentalen R_{r-2} geht, wird jener Complex linear. Das Strahlbüschel

*) Wenn dagegen zwei R_{r-1} im R_{2r-1} durch eine Reciprocaltransformation auf einander bezogen sind, so erfüllen die Verbindungsgeraden eine M^{2r-1}_r (cf. XLVII oben). Allgemein ist die $M_{r+\lambda}$, welche durch Verbindung je zusammengehöriger Punktepaare entsteht, wenn man unter den R_{r-1} eine solche Verwandtschaft von Punkten und R_λ hat, die der Schnitt von $r-1-\lambda$ simultan gegebenen Correlationen ist, von der Ordnung $2^{r-1-\lambda}$. Jede dieser Mannigfaltigkeiten ist unicursal.

hat sein Centrum in A'' und seine Ebene trifft A' in einer Geraden, wenn ihm eine Gerade über B' entspricht; daher: Geht R_{2r-3} durch (B', R_{2r-2}), enthält der entsprechende Complex in R_r vollständig den A'', und resp. für (B'', R_{2r-2}) und A'. Dem Complexe, welcher (A', A'') als singulären R_{r-2} hat, entspricht der Raum R_{2r-3} der M^{r-1}_{r-2} doppelt gezählt.

2. Die Räume D', D'' sind in einem $\varDelta_{2r-3}$. Benutzt man einen R_{2r-2} durch $\varDelta$ statt des obigen allgemeinen R_{2r-2}, so folgt:

Theorem LX. Der Strahlenraum des R_r kann auf einen Punktraum R_{2r-2} derart abgebildet werden, dass den linearen Strahlencomplexen M^2_{2r-3} entsprechen, welche durch eine feste M^{r-1}_{r-1} gehen, die selbst in einem R_{2r-3} enthalten ist.

Jetzt entsteht zu einem ebenen Strahlenbüschel von R_r zunächst eine M^2_2, welche aber den R_{2r-2} schon in einer h und also nur weiter in einer Geraden schneidet, die jene h trifft: Hieraus folgt, dass den Strahlen einer Ebene R_2 die Punkte einer Ebene durch eine Gerade h entsprechen. Ein allgemeiner Punkt von $\varDelta$ ist Bild einer Geraden von D_{r-2}, also entspricht einem R_{2r-3} des R_{2r-2} ein linearer Complex $\varGamma$, welcher D_{r-2} vollständig enthält. Zu Strahlenbündeln von R_r entstehen die M^r_r, welche durch M^{r-1}_{r-1} gehen, also sind jetzt die Bilder wieder R_{r-1}. Hat $\varGamma$ einen singulären R_0 in D, so entspricht ihm eine M^2_{2r-3}, welche eine h als Doppelgerade hat; hat er einen singulären R_λ in D, so hat M^2_{2r-3} alle ∞^λ h als doppelt, also auch deren $R_{2\lambda-1}$ als doppelt. Es ist so ein Complex mit singulärem R_λ auf eine M^2_{2r-3} mit Doppel-$R_{2\lambda-1}$ abgebildet. Projicirt man eine M^2_{2r-3} von einem gemeinsamen Punkte aus auf R_{2r-3}, so erhält man: *Der lineare Strahlencomplex $\varGamma$ im R_r kann auf einen Punkt-R_{2r-3} so abgebildet werden, dass den Schnitten von $\varGamma$ mit den übrigen linearen Complexen M^3_{2r-4} durch zwei feste R_{r-2}, eine M^2_{2r-5} und eine feste M^{r-2}_{r-2}, welche jene in zwei R_{r-3} schneidet, entsprechen.*

Und aus LX erhält man: Es können als Bilder der linearen Schnitte auch M^3_{2r-4} genommen werden, welche durch eine feste M^{r-2}_{r-1} und eine feste M^2_{2r-5} gehen. Nur für diese letztere Abbildung tritt eine Ausnahme ein und zwar bei $r = 3$, da die Schnitte der M^2_3 mit den anderen M^2_3 aus LIX sich in eine feste M^2_2 und bewegliche M^2_2 *zerlegen*, sodass die stereographische Projection M^2_2 durch einen festen M^2_1 liefert, also durch diese Zerlegung die Abbildung von *S. Lie* für R_3 aus Math. Ann. Bd. V*) als speciellen Fall.

---

*) Jedenfalls ist aus meinem Texte ersichtlich, dass sich für $r = 3$ an die Seite der

3. Irgend eine Collineation H im R_r bewirkt eine lineare Transformation unter dessen R_1, welche durch die Abbildung aus LX eine birationale Transformation im R_{2r-2} wird, in der das System der M_{2r-3}^2 invariant ist und alle Treffgeraden der M_{r-1}^{r-1} ebenfalls unter einander transformirt werden. Der vollständige D_{r-2} liefert einen R_{2r-6} im R_{2r-2}, welcher fundamental wird. Daher: *Die birationale Transformation ist quadrato-quadratisch; die homaloidalen M_{2r-3}^2 gehen durch M_{r-1}^{r-1} und je einen R_{2r-6}, welcher den R_{2r-3} der M_{r-1}^{r-1} in einem R_{2r-7} und die M_{r-1}^{r-1} in einer M_{r-3}^{r-3} schneidet**).

Wenn H den D in sich verwandelt, hat sie als Bild sogar eine Collineation im R_{2r-2}, welche die M_{r-1}^{r-1} invariant lässt.

Für die Abbildung LIX jedoch wird R_1 des R_{2r-2} in eine Regelschaar des R_3, diese durch H in eine andere Regelschaar verwandelt, deren Schnitte mit A', A'' zwei M_1^2 sind, deren Abbildung also eine M_1^4 wird. Die Transformation ist von vierter Ordnung und wird, wenn A' invariant bleibt, von dritter, wenn D invariant ist, von zweiter Ordnung. Im letzteren Falle besitzt sie M_{r-2}^{r-1} und je einen R_{2r-4} als fundamental.

Zweites Abbildungsverfahren.

Ich bringe den Geradenraum im R_r durch $r-1$ Bündel von je ∞^2 R_{r-1} hervor, jedes mit einer Axe $A_{r-3}^{(i)}$, beziehe diese Bündel willkürlich correlativ auf $r-1$ Bündel von je ∞^2 R_{2r-3} im R_{2r-2}, jedes mit einer Axe $A_{2r-5}^{(i)}$, also so, dass den R_{r-1} von $A^{(i)}$ die R_{2r-4} von $A^{(i)}$ linear entsprechen. Ein Strahl s bestimmt dann mit jedem $A^{(i)}$ $(r-1)$ R_{r-1}, diesen entsprechen $(r-1)$ R_{2r-4} und diese schneiden sich wegen $(r-1)(2r-4)-(r-2)(2r-2)=0$ in einem Punkte S, welcher als Bild von s verwendet wird. Wird S in einem $R_1=g$ bewegt, so beschreiben die R_{2r-4} $r-1$ projective Büschel, denen in R_r $r-1$ projective Büschel von R_{r-1} entsprechen. Diese letzteren erzeugen eine Regelfläche M_2^{r-1}, wie man sich durch den Schnitt des Ganzen mit einem R_{r-1} überzeugt. Nun sind allgemein aus einer Regelschaar M_2^n gerade n Geraden in einem Γ enthalten, *daher sind die Bilder der linearen Complexe M_{2r-3}^{r-1}*. Irgend ein Punkt P von $A^{(i)\prime}$ giebt mit den

Lie'schen Abbildung eine andere stellt, wo nämlich die linearen Congruenzen abgebildet sind durch M_2^3, welche eine zerfallende M_1^3 und eine diese zweimal treffende M_1^2, also eigentlich eine M_1^5 mit fünf scheinbaren Doppelpunkten (also $p=1$) gemeinsam haben.

*) Dem R_{2r-6} entspricht der R_{2r-3} von M_{r-1}^{r-1} und der M_{r-1}^{r-1} eine M_{2r-3}^2 durch M_{r-1}^{r-1} und R'_{2r-6}.

übrigen A verbunden $(r-2)$ R_{2r-4}, denen $(r-2)$ R_{r-1} entsprechen, die sich in einer Ebene schneiden, welche ∞^1 Geraden von Γ enthält und diese haben P als Bild. Also geht M_{2r-3}^{r-1} durch alle Axen $A^{(i)'}$. Ferner giebt es ∞^{2r-4} Geraden, welche alle $A^{(i)'}$ treffen, und jeder entspricht in R_r eine Gerade, deren Complex G_{2r-4} in allen Complexen enthalten ist, die den R_{2r-3} von R_{2r-2} entsprechen. Diese Complexe sind $(r-1)$-ten Gerades*), weil einem ebenen Strahlbüschel von s eine Curve $(r-1)$-ter Ordnung von S entspricht.

Die Strahlen s durch einen Punkt O sind Schnitte von R_{r-1} der Büschel durch O, die entsprechenden Büschel von R_{2r-4}, d. h. die entsprechenden R_{2r-3} schneiden sich in einem R_{r-1}, daher entsprechen den Strahlenbündeln solche R_{r-1} (Ω), welche die $A^{(i)'}$ in je einem R_{r-3} schneiden. Also entsprechen irgend einem R_{r-1} von R' Strahlencomplexe, von welchen durch jeden Punkt des R_r ein einziger Strahl geht. Ein R'_{r+1} schneidet einen Ω_{r-1} in einer Geraden, dieser entspricht ein Kegel der $(r-1)$-ten Ordnung, der dem R'_r entsprechende Complex hat also die Gradzahl $[0, r-1] = r-1$. — Den Strahlen s, welche $A^{(i)}$ treffen, entsprechen je ∞^1 Punkte einer Geraden σ, und wenn s in einem R_{r-2} durch $A^{(i)}$ ist, so ist σ in einem festen R_{2r-3} durch $A^{(i)'}$. — Wenn g in R' einen $A^{(i)'}$ schneidet, so ist die entsprechende Regelschaar des R_r ganz in einem R_{r-1} durch $A^{(i)}$ enthalten und nur noch von der Ordnung $r-2$, wenn g λ $A^{(i)'}$ schneidet, wird die Ordnung $r-\lambda-1$; *es folgt so, dass die $A^{(i)'}$ nur einfach für die M_{2r-3}^{r-1} sind.* — Wenn R'_{2r-4} einen $A^{(i)'}$ enthält, so entspricht ihm im R_r ein linearer Complex, der den entsprechenden R_{r-2} als punktsingulär besitzt. Die Mannigfaltigkeit von Geraden σ, welche den s entspricht, die $A^{(i)}$ treffen, ist also eine M_{2r-3}^{r-2}. — Wenn ein Strahlenbüschel von s einen $A^{(i)}$ in einem Punkte schneidet, entspricht ihm ausser der Geraden σ nur noch eine M_1^{r-2}, welche ganz in einem R_{2r-4} durch $A^{(i)'}$ enthalten ist. Die Geraden σ, sei erwähnt, schneiden jedesmal $r-2$ unter den $r-1$ $A^{(i)'}$.

Ich werde die Beschreibung, was einem R_λ des R' und andererseits den Complexen aller Strahlen, die einen gegebenen R_μ in R_r treffen, entspreche, nicht weiter führen und bemerke nur, dass man die Ordnung der M_{2r-3}^{r-1} durch angemessene Annahme der Correlationen und der Axen $A^{(i)}$ herabmindern kann.

---

*) d. h. die *Schubert*sche Gradzahl $[0, r-1] = r-1$.

Drittes Abbildungsverfahren.

1. Verbindet man im R_r die Paare entsprechender Punkte p, p' einer Collineation durch Geraden s, so entsteht ein ∞^r-Strahlencomplex von der Eigenschaft: *Alle seine Strahlen schneiden $r+1$ feste R_{r-1} in unter einander projectiven Punkt-$(r+1)$-tupeln.* Hat die Collineation einen R_λ von Doppelpunkten, so schneiden alle s den complementären $R_{r-1-\lambda} = D$, und es ist wie i. A. der Complex auf den Punktraum und gleichzeitig mit Incidenz abgebildet. Also auch für $\lambda = r-2$ ist der ∞^r-Complex aller Geraden, welche $R_1 = d$ treffen, auf die Punkte des R_r abgebildet.

Theorem LXI. Der ∞^r-Complex aller Treffstrahlen von d ist auf den Punktraum so abgebildet, dass die Schnitte mit den linearen Complexen von R_r sich als M^2_{r-1} durch 2 feste Punkte auf D und einen festen R_{r-2} abbilden.

Diejenigen Strahlen, welche auch einen R_{r-2} schneiden, vertheile ich in ∞^1 R_{r-1} durch diesen R_{r-2}. Diesen entsprechen ∞^1 R_{r-1} durch den in der Collineation entsprechenden R_{r-2}, und je zwei entsprechende R_{r-1} schneiden sich in einem R_{r-2}, der die Bildpunkte aller von einem festen Punkte in d nach dem R_{r-2} laufenden s enthält. Das Erzeugniss der beiden R_{r-1}-Büschel ist eine M^2_{r-1}, welche durch alle Doppelpunkte der Collineation geht. Da die Complexe mit singulären R_{r-2} linear den Gesammtraum der linearen Complexe bestimmen, so folgt das Theorem*).

Ich setze nun den ganzen Geradenraum aus ∞^{r-2} derartigen Complexen zusammen, deren Axen d in einem festen A_{r-1} durch einen festen Punkt O gehen, und beziehe den R_r collinear auf ∞^{r-2} B_r, welche einen R_{2r-2} erfüllen. Dann wird jeder Punkt S von R_{2r-2} Bildpunkt eines einzigen Strahles von R_r und umgekehrt. Um die collinearen Beziehungen $R_r - B_r$ zu vermitteln, projicirt man am einfachsten von einem festen O_{r-3} im R_{2r-2} die Punkte des R_r auf die B_r. Die für LXI schon benöthigten Hülfscollineationen mögen dann alle einen festen Doppelpunkts-$R^{(1)}_{r-2}$ und O als Doppelpunkt, den zweiten Doppelpunkt von d aber in einem festen X_{r-2} des A_{r-1} be-

*) Hiermit folgt für $r = 3$ eine Abbildung des speciellen Complexes auf den Punktraum, welche gänzlich verschieden ist von der *Sturm*schen Abbildung (in seinem Buche). Eine ebenso verschiedene Abbildung folgt hier noch weiter unten. Man kann übrigens leicht ganz direct den Complex $\infty^{r-1+\lambda}$ aller Geraden s des R_r, welche einen festen R_λ treffen, auf einen $R_{r-1+\lambda}$ abbilden. Man schneide sie mit einem Transversal-R_{r-1} und beziehe R_λ und R_{r-1} collinear auf T_λ und T_{r-1}, beide gelegen in einem $R_{r+\lambda}$, mache hiedurch jeder s eine Gerade über T_λ, T_{r-1} entsprechen und schneide diese Geraden mit einem Transversal-$R_{r+\lambda-1}$ des $R_{r+\lambda}$.

sitzen. Einem linearen Complexe Γ von R_r wird eine M_{2r-3} entsprechen durch den festen Ω_{2r-4}, der $R^{(1)}_{r-3}$ und O_{r-3} enthält.

Das ∞^{r-2}-System von Collineationen im R_r soll nun weiter dahin festgesetzt werden, dass die Partialcollineation im R_{r-1} $(R^{(1)}_{r-2}, O)$ fest bleibt, sodass die vollständige Bestimmung durch eine Projectivität H unter den R_{r-1} von $R^{(1)}_{r-2}$ geschehen kann. Wenn X_{r-2} durch den R_{r-3} $(R^{(1)}_{r-2}, A_{r-1})$ geht, hat H zwei feste Doppelelemente und es mögen den ∞^1 H, die übrig sind, ∞^1 $R^{(2)}_{r-2}$, in welche sich die Axen d vertheilen, entsprechen. Was entspricht nun einer geraden Punktreihe g von R_{2r-2}?

$(O_{r-3}\, g)_{r-1}$ schneidet den R_r in einer Geraden g', welche die Bildpunkte der ∞^1 Geraden S in gewissen ∞^1 Complexen enthalten muss. Diese Complexe haben ihre Axen d in einem Strahlenbüschel, welcher in der Zuweisung unter den d und B_r den durch die Punkte von g gehenden B_r entsprechen muss. Dieser Strahlenbüschel macht die $R^{(2)}_{r-2}$ projectiv zu den R_{r-1} durch $R^{(1)}_{r-2}$, und erzeugt dann mit diesem Büschel einen Kegelschnitt c, welcher die Stützpunkte der S enthält, die den Punkten von g' in den ∞^1 Complexen entsprechen. g und c bestimmen durch ihre Projectivität eine M^3_2, welche die der Punktreihe g entsprechenden S enthält. Hieraus folgt, dass die M_{2r-3} die Ordnung 3 haben, also:

***Theorem LXII.** Durch den beschriebenen Process wird der Geradenraum von R_r auf den Punktraum R_{2r-2} derart abgebildet, dass die linearen Complexe von M^3_{2r-3} durch einen festen R_{2r-4}, einen festen R_{r-1} und mit einem festen Doppelpunkte in diesem abgebildet werden.*

Viertes Abbildungsverfahren.

Man hätte jedoch die Grundidee der Zusammensetzung aus ∞^r Complexen noch anders ausführen können. Auf allen Geraden werden durch $r+1$ feste R_{r-1} ∞^{r-2} projectiv verschiedene Punkt-$(r+1)$-tupel bezeichnet und sie theilen sich demgemäss nach 1 in ∞^{r-2} $(r+1)$-edrale Strahlencomplexe Δ, deren jeder mit Incidenz auf den R_r abbildbar ist.

Ich nehme nun im R_{r+1} eine C_{r+1}, in dieser drei feste Punkte P_1, P_2, P_3, sodass $r-2$ weitere Punkte in ihr ein Punkt-$(r+1)$-tupel bestimmen, und diese werden alle projectiv verschieden sein, entsprechen also eindeutig den ∞^{r-2} Complexen Δ, oder da ihre Schmiegungs-R_r den $R^{(1)}_{r-2}$, Schnitt der Schmiegungs-R_r in P_1, P_2, P_3 in je einem Punkte Q durchschneiden, entsprechen die Punkte Q eindeutig den Δ. Die Strahlen durch Q schneiden nun R_r in Punkten p, welche ich als Bildpunkte von Δ

nehme, sodass die Strahlen jedes $\varDelta$ auf die Strahlen des Punktes Q abgebildet sind und der Geradenraum von R_r auf die Geraden von R_{r+1}, welche $R_{r-2}^{(1)}$ treffen. Diese letzteren werden dann einfach abgebildet, indem man den $R_{r-2}^{(1)}$ und einen Transversal-R_r des R_{r+1} collinear auf einen R'_{r-2} und einen R'_r in einem R_{2r-1} bezieht und deren Transversalgeraden mit einem Bild-R'_{2r-2} schneidet.

Die Complexe $\varDelta$ können aber auf folgende Weise individualisirt werden. Sei der Scheitel V des Complexkegels C fest. Der letztere ist von der Ordnung $r-1$ und schneidet also einen festen R_{r-2} durch $r-2$ der Doppelpunkte in einem freien Punkte K und mit $\varDelta$ ändert sich C, also auch K eindeutig, und durch K ist die Gerade KV, also ihr Punkt-$(r+1)$-tupel, also $\varDelta$ bestimmt.

Fünftes Abbildungsverfahren.

1. *Theorem LXIII. Alle linearen Strahlencomplexe Γ des R_r*), welche einen vollständigen**) R_{r-2} gemeinsam haben, bilden ein homaloidales ∞^{2r-2} System, d. h. je $2(r-1)$ unter ihnen schneiden sich in einem einzigen Strahle.*

Der R_{r-2} gilt für $\frac{(r-1)(r-2)}{2}$ Strahlen, daher ist die Dimension $\frac{(r+2)(r-1)}{2}-\frac{(r-1)(r-2)}{2}=2(r-1)$. Hätten $2(r-1)$ Complexe 2 gemeinsame Strahlen, S_1, S_2 so würden diese einen R_3 bestimmen, welcher R_{r-2} in einer Geraden schnitte und diese würde mit S_3, S_2 eine M_2^2 bestimmen, deren Leitstrahlen gemeinsam wären.

2. Hiermit ist aber jede Gerade des R_r auf die ∞^{2r-3}-Systeme von Complexen, jede auf das durch sie bestimmte, abgebildet, also auf die R_{2r-3} eines R_{2r-2} und durch Dualität auch auf die R_0 eines R_{2r-2}*). Es entsprechen dann den R_{2r-3} desselben die Geraden eines Γ durch R_{r-2} und da sich $2(r-1)-1$ dieser Γ in einer Regelschaar M_2^2 schneiden, entspricht diese den Punkten einer Geraden und einem allgemeinen linearen Complexe Γ entspricht also eine M_{2r-3}^2. Es sei A_{2r-3} der Raum, welcher dem Γ entspricht, dessen Strahlen alle den R_{r-2} treffen. Alle Strahlen S, welche R_{r-2} im selben Punkte F schneiden und im selben R_{r-1} durch R_{r-2} verlaufen, haben einen Punkt S als Bild, weil alle Complexe Γ', welche

*) Für $r=3$ erhält man das ∞^4-System der Complexe, welche einen festen Strahl enthalten und deren ∞^3-Systeme hiermit als Bilder der ihnen gemeinsamen zweiten Strahlen dienen können.

**) Cf. die Definition in § 2 Nro. 6.

einen dieser Strahlen enthalten, alle enthalten. Alle Punkte S, welche den Strahlen durch einen Punkt F von R_{r-2} entsprechen, bilden eine Gerade, weil jene Strahlen der Schnitt aller Γ' sind, welche in F einen singulären Punkt besitzen und die Gesammtheit dieser Complexe ist ∞^{2r-3}, die entsprechenden R_{2r-3} schneiden sich also in einer Geraden σ. Es erscheinen also in A_{2r-3} ∞^{r-2} Geraden σ, welche allen M_{2r-3}^2 gemeinsam sind. Es genügt, irgend zwei Complexe Γ' herauszunehmen, um zu sehen, dass sich zwei R_{r-2} in Collineation herausstellen, als deren Erzeugniss jene Geraden σ auftreten, sodass sie eine M_{r-1}^{r-1} bilden. Also:

Die Abbildung, die so gewonnen wird, führt auf das M_{2r-3}^2-System aus Theorem LX des ersten Verfahrens).*

Sechstes Abbildungsverfahren.

Im R_r wird ein A_{r-1} und ausserhalb ein Punkt O genommen. Der Geradenraum a von A wird auf einen A'_{2r-4} abgebildet, was als erledigt vorausgesetzt wird. Es werden drei R_{r-1} (B_{r-1}, C_{r-1}, D_{r-1}) im R_r angenommen und zum A' ein Punkt O' ausserhalb desselben, sowie zwei weitere R_{2r-4}: (C'_{2r-4}, D'_{2r-4}) welche im selben R_{2r-3} mit O' und A' sind. Dann wird das Bild S eines Strahles s von R_r wie folgt bestimmt:

Die Ebene Os schneidet den A in einer Geraden a, welche ein Bild α in A' hat. Die Gerade s schneidet A in einem Punkte P. Nun bestimme man unter jeder Geraden a und der $O'\alpha$ eine Projectivität, in welcher die Punkte auf B, C, D den Punkten auf A', C', D' entsprechen. In dieser wird dem P ein Punkt S entsprechen, welcher das gesuchte Bild ist.

Wenn nämlich nur ein Complex Γ abgebildet wird, so ist in Os ein Strahlenbüschel enthalten, von welchem durch P i. A. ein einziger s geht, so dass s durch P und die Ebene Os bestimmt ist. — Eine kleine Vereinfachung tritt ein, wenn in der Projectivität unter a und $O'\alpha$ stets der Punkt auf C dem Punkte O' entspricht, sodass C' entfällt.

Endlich kann speciell O im Raume A selbst genommen werden. — Bei der factischen Abbildung ist mit $r=3$ zu beginnen und dann successive auf Grund des Geradenraumes von A vorzuschreiten.

---

*) Mit Hülfe dieser sowie der ersten Abbildung ergiebt sich also auch: Die Construction eines linearen Complexes aus Strahlen kann erledigt werden gleichzeitig mit der Construction der M_{2r-3}^2 aus gegebenen Punkten. (Cf. oben § 4. nach XXXIV, sowie § 6.)

Siebentes Abbildungsverfahren.

1. *Theorem LXIV. Die einem festen R_{r-2} in Bezug auf die Complexe Γ' eines linearen $\infty^{2(r-1)}$-Systemes*) zugeordneten**) Geraden erfüllen vollständig und einfach den Geradenraum von R_r, wenn $r = 2q+1$.*

Ist s diese Gerade, so seien in ihr zwei Punkte P_1, P_2 genommen; es muss in dem Nullsysteme des zugehörigen Γ' den Räumen $R_{r-2}P_1$, $R_{r-2}P_2$ je der Punkt P_1, P_2 entsprechen. Das sind genau $2(r-1)$ Bedingungen, wodurch Γ' linear bestimmt ist.

2. Hiermit ist sofort eine Abbildung der s auf die Individuen eines linearen $R_{2(r-1)}$ gegeben. Beschreibt Γ' einen Büschel, so seien A, B zwei R_{r-1} durch R_{r-2}. Ist nun $r = 2q+1$, so entsprechen dem A in den Γ' ∞^1 Punkte einer Curve C_q, ebenso dem B, beide C_q sind projectiv und erzeugen eine M_2^{r-1}. Ist $r = 2q$, so beschreiben die singulären Punkte eine Curve C_q*), der dem R_{r-2} entsprechende Punkt in den Schnittcomplexen von A mit den Γ' beschreibt eine Curve C_{q-1}; C_q und C_{q-1} sind projectiv und erzeugen eine M_2^{r-1}. Hieraus folgt, dass für $r = 2q+1$ einem allgemeinen linearen Complexe Γ von s ein System $(r-1)$-ter Ordnung Σ von Γ' entspricht, während für $r = 2q$ die M_2^{r-1} aus Treffgeraden von R_{r-2} besteht.

Wenn für $r = 2q+1$ die singuläre Axe eines Complexes Γ' den R_{r-2} schneidet, so entspricht ihm nicht bloss die Axe, sondern eine ganze Ebene, d. h. alle Geraden derselben. Das System Σ geht also durch diese Complexe Γ'', welche Γ'_a heissen mögen, hindurch. Nun ist der Ort der singulären Axen eines linearen ∞^2 Systemes von Γ' eine $M_2^{\frac{r^2-1}{4}}$ diese schneidet R_{r-2} in $\frac{r^2-1}{4}$ Punkten, daher:

Theorem LXV. Die Geraden des R_{2q+1} können auf einen R_{2r-2} so abgebildet werden, dass den linearen Complexen von R_r M_{2r-3}^{r-1} entsprechen; welche eine $M_{2r-4}^{\frac{r^2-1}{4}}$ gemeinsam haben.

Achtes Abbildungsverfahren.

1. *Theorem LXVI. Die singulären Axen, welche in einem linearen ∞^{2r-1}-System von Complexen enthalten sind, erfüllen vollständig und einfach den Geradenraum des R_r, wenn $r = 2q-1$.*

*) Cf. den II. Theil der Abhandlung.

**) Sie besitzt vielfache Mannigfaltigkeiten.

Denn nach No. 9 § 4 gilt die Annahme eines singulären Punktes für Γ als r lineare Bedingungen und dann die Annahme eines zweiten singulären Punktes als $r-1$ lineare Bedingungen, beide reichen also hin zur linearen Bestimmung eines Γ.

Die Abbildung ist also bewerkstelligt auf das ∞^{2r-2}-System von singulären Complexen. Dieses ist von der Ordnung q (cf. § 6), also M^q_{4q-4} im R_{4q-3}. Es wäre also hier die Abbildung dieser Mannigfaltigkeit auf den R_{4q-2}*) zu suchen.

2. *Theorem LXVII. Wenn in einem R_{2q-1} die Complexe eines linearen ∞^{2r-2}-Systemes alle einen vollständigen R_r gemeinsam haben, so erfüllen ihre singulären Axen (cf. XLVI.) den Geradenraum dieses R_r einfach und vollständig.*

Nach XLVI besitzt jeder Γ eine singuläre Axe im R_r. Soll F in R_r singulär für Γ sein, so kennt man noch $r-1$ Gerade durch ihn und ausserhalb R_r, dasselbe für F' in R_r, wonach aber hier keine Gerade in Wegfall kommt, da FF' schon mit dem R_r gegeben ist, also absorbirt die singuläre Axe FF' $2(r-1)$ lineare Bedingungen.

In § 7 wird bewiesen, dass die Axen der Γ eines Büschels dieser Art eine M_2^{r-1} erfüllen, sodass das System, welches einem linearen Complexe von Axen entspricht, diese Ordnung hat. Ebendort wird bewiesen, dass in einem linearen ∞^2-Systeme dieser Art $\frac{r^2-1}{4}$ Complexe mit singulärem R_3 vorhanden sind, sodass es ein System ∞^{2r-4} der Ordnung $\left(\frac{r^2-1}{4}\right)$ giebt, durch welches jene Systeme hindurchgehen. Also:

Theorem LXVIII. Abbildung des Geradenraumes von R_r auf einen R_{2r-2} wird hier so erfolgen, dass den linearen Complexen Γ M_{2r-3}^{r-1} entsprechen mit einer gemeinsamen $M_{2r-4}^{\frac{r^2-1}{4}}$.

Neuntes Abbildungsverfahren**).

Ich nehme in einem R_{3r-1} einen R_r und einen R_{2r-2} (A_r, B_{2r-2}) und ein lineares ∞^{r-2}-System von Complexen Γ.

Dann gehen durch einen Punkt P von B_{2r-2} ∞^{2r-1} Strahlen, welche

*) Sie besitzt vielfache Mannigfaltigkeiten, indem sie die Discriminante von Γ ist.

**) Diese Abbildung ist besonders merkwürdig. Die Constructionen zur Erhaltung des Bildes sind durchaus linear.

den Γ gemeinsam sind, und bilden einen R_{2r}, Schnitt der dem P in den Complexen Γ entsprechenden R_{3r-2}. Dieser R_{2r} trifft B_r in einer Geraden s. Ist aber s gegeben, so gelangt man eindeutig zu P. Denn P muss in den der Geraden s vermöge der Γ entsprechenden R_{3r-3} enthalten sein. Diese $r-1$ R_{3r-3} schneiden sich in einem R der Dimension

$$(r-1)(3r-3)-(r-2)(3r-1) = r+1,$$

und dieser R_{r+1} trifft B in P.

Einer Geraden von B entspricht eine M_2^{r-1} von A_1, Erzeugnis von $r-1$ Büscheln von R_{3r-2} im Schnitte mit A_r, also den linearen Complexen von A_r M_{2r-3}^{r-1} in B. Gemeinsame Punkte sind jene, deren entsprechender R_{2r} den A sofort in einer Ebene e schneidet. Lässt man P in einer Ebene R_2 variiren, so erhält man $r-1$ Bündel von R_{3r-2}, welche in collinearer Beziehung sind und den A_r in $r-1$ Bündeln von R_{r-1} schneiden, die collinear sind und also $\left(\frac{r^2-1}{4}\right)(r-1)$-tupel von R_{r-1} geben, die sich in einer Ebene durchschneiden.

Die Abbildung erfolgt also so, *dass den linearen Complexen Γ von R_r M_{2r-3}^{r-1} durch eine gemeinsame $M_{2r-4}^{\frac{r^2-1}{4}}$ entsprechen**).

Anmerkung. Ist im R_n ein R_k und ein ∞^l System von Complexen Γ gegeben, so schneiden sich die einem Punkte P von R_k entsprechenden R_{n-1} in einem R_{n-1-l}, welcher einen festen R_{l+2} in einem R_1 schneidet. So entsteht im R_{l+2} ein ∞^k-Complex von Geraden, der direct auf den R_k abgebildet ist. Dasselbe Verfahren kann auf die Abbildung des R_i-Raumes und der R_i-Complexe angewendet werden.

Zehntes Abbildungsverfahren.

1. Jeder ∞_r-Complex des R_r mit der Gradzahl $[0, r-1] = 1$ kann mit Incidenz eindeutig auf die Punkte dieses R_r abgebildet werden, indem man seinen Geraden g die Fusspunkte G der aus einem festen Punkte O kommenden Senkrechten als Bilder zuweist.

Denn auch durch G ist g eindeutig als Schnittgerade der Complexebene und der in G zu GO senkrechten Ebene bestimmt. — Aus ∞^r-Complexen wird dann (unten No. 5. 6) der ∞^{2r-2}-Complex componirt.

2. Besonders elegant wird dies für $r = 3$. Ein ebenes Strahlenbüschel

*) Durch passende Wahl des Complexsystemes kann man jedoch die Ordnung $r-1$ noch vermindern.

Ebene π des Complexes und den Connexkegel in (2, 2), *so berühren sich stets Ebene und Kegel.*

Denn alle Bildkreise durch P schneiden die Schnittgerade von π und der zu PO in P senkrechten Ebene, haben also ihre Tangente in P nur dann in π, wenn sie jene Gerade berühren, und es giebt nur einen Kreis, der π berührt. Der Kegel muss also π berühren und zwar in jener Geraden t, welche P als u besitzt. Daher auch:

Theorem LXX. Die Complexstrahlen g als t genommen haben zwei unendlich nahe Punkte u.

Anmerkung. O darf nicht in die Hauptaxe von Γ verlegt werden, weil dann die Abbildung degenerirt.

4. Hält man eine Congruenz zz' fest bei Variirung von O, so beschreibt M_2^3 ein homaloidales ∞^3-System und jede M_2^3 geht durch den entsprechenden O. Sie haben $zz'K_\infty$, die Congruenzlinie in E_∞ gemeinsam und längs dieser gemeinsame Berührung.

Wenn Γ eine singuläre Axe a hat, so zerfällt n_3 in a und einen die a und O treffenden Kreis K.

Werden nun im R_r als Bilder G der Geraden g, welche eine Axe a treffen, die Fusspunkte der Senkrechten aus einem Punkte O angesehen, so sind die G, falls die g eine andere Gerade z treffen, in einer $M_2^3(zaK_\infty K)$. Es sind also die G, falls die g einen R_{r-2} treffen, in einer $M_{r-1}^3(R_{r-2}aK_\infty K)$, wo K eine Kugel M_{r-2}^2 ist, welche den Abstand des O von a zum Durchmesser hat. Daher:

Theorem LXXI. Die Geraden, welche eine Gerade a im R_r treffen, können so abgebildet werden, dass den Schnitten mit linearen Complexen M_{r-1}^2 durch zwei M_{r-2}^2 mit gemeinsamer M_{r-3}^2 und eine Gerade über eine M_{r-2}^2 entsprechen.

Wenn jedoch a in E_∞ ist, dann entsprechen den ∞^1 Strahlenbündeln die Ebenen durch O senkrecht zu ihren Richtungen und den linearen Congruenzen M_2^2 durch OA, wo A der Pol von a, und durch die Schnittpunkte auf K_∞. Hieraus folgt dann für R_r:

Theorem LXXII. Die Geraden, welche eine Gerade a im R_r treffen, können so abgebildet werden, dass den Schnitten mit linearen Complexen M_{r-1}^2 durch zwei Punkte und einen R_{r-2} entsprechen).*

---

*) r solche M_{r-1}^2 treffen sich in $r-1$ Punkten, und es giebt $r-1$ Gerade, welche r R_{r-2} und 1 R_1 treffen. Ebenso könnte man die bekannte *Meyer-Schubert*sche Zahl

Zwei unendlich nahen sich in U schneidenden Geraden g entsprechen zwei consecutive Punkte eines Bildkreises u; dessen Tangente in u sei t. *Die Elemente* (u, t) *bilden einen conischen Connex* (2, 2). Denn die Kreise durch u sind Bilder der Complexstrahlenbüschel, deren Centra U auf der entsprechenden Geraden g_u sind, also einer Schnittcongruenz mit einem Berührungscomplexe; sie erfüllen daher selbst eine M_2^3 mit u^2 und die t, welche u besitzen, bilden einen Quadrikegel. Andererseits bilden die Kreise in Ebenen durch eine Gerade t eine M_2^3 und schneiden also auf t eine quadratische Involution aus, sodass es in t zwei Punkte u giebt. Also: *der von den Osculationskegeln in den Doppelpunkten von* M_2^3 *unseres linearen Systemes gebildete Connex ist* (2, 2). Dieser Connex ist das Bild der in Γ enthaltenen „Flächenelemente".

Es gilt auch: Die Kegelschnitte, welche eine Raumcurve fünfter Ordnung $p = 1$ in fünf Punkten treffen, bilden durch ihre Punkte und Tangenten einen conischen Connex (2, 2).

3. Die im Complexe Γ enthaltenen Curven (d. h. Curven, deren Tangenten aus Complexstrahlen bestehen*), bilden sich ab als *die im Connexe* (2, 2) *enthaltenen Curven,* wobei dieser letztere Begriff selbständiger ist als der erstere, weil hier die Zusammengehörigkeit von Punkt und Tangente unumgänglich ist, also hier nicht mehr durch „enthaltene developpable Fläche" ersetzt werden kann.

Den Flächen, deren Haupttangenten dem linearen Complexe Γ angehören, entsprechen Flächen, deren Punkte Connexkegel besitzen, welche die Fläche im Punkte berühren**).

In der Ebene e von oben erscheint als Schnitt ebenfalls ein Connex (2, 2) und dieser spiegelt genau die Verhältnisse unter den Haupttangenten der *Kummer*schen Fläche des der e entsprechenden Strahlensystemes zweiter Ordnung, zweiter Klasse ab.

Theorem LXIX. Nimmt man zu jedem Punkte P die entsprechende

---

*) Also developpable Flächen im Complexe. Diese sind von *Appell, Picard* untersucht worden. Ann. de l'École Norm. und Journal de l'École polyt.

**) Hiermit ist eine Verallgemeinerung des von *Klein* nach *Lie* in M. A. Bd. V behandelten Problemes bewirkt. — Es ist ersichtlich, dass der wesentliche Unterschied der *Lie-Nöther*schen Abbildung von dieser eben in dem Vorhandensein des Connexes (2, 2) besteht, welcher bei *Lie* in einen quadratischen Complex (mit K_∞ als Brenncurve) ausgeartet ist.

Elftes Abbildungsverfahren.

1. *Theorem LXXIV. Jeder ∞^r-Complex Γ von Geraden s mit* $[0, r-1] = 1$ ***kann mit Incidenz auf die R_0 des R_r abgebildet werden, indem jeder s der Fusspunkt P ihres kürzesten Abstandes von einem festen O_i als Bild zugewiesen wird, $i < r-1$.***

Denn von P geht zum O_i eine einzige Normale und die in P zu ihr normalen Geraden erfüllen einen R_{r-1}, der die Complexebene von P in s schneidet. Ich erwähne sofort:

Theorem LXXV. Die Fusspunkts-M_{r-1} für einen Strahlen-∞^{r-1}-Complex Γ' mit $[0, r-2] = 1$ ***in Bezug auf alle Punkte O_0 des R_r genommen, bilden ein homaloidales System und mit Zuweisung zu den O_0 ein homaloidales Nullsystem.***

Denn durch r Punkte P sind die r Strahlen, also auch die r Normal-R_{r-1} in ihnen bestimmt, welche sich in dem einzigen Punkte O_0 schneiden, der die durch jene P gehende M_{r-1} liefert. Alle M_{r-1} durch einen P gehören zu O_0 eines R_{r-1}, welcher in P zum Complexstrahle normal ist, und es giebt nur einen Complexstrahl, der zu einem willkürlichen R_{r-1} normal ist, der Fusspunkt ist der einzige Schnittpunkt aller M_{r-1} der O_0 in jenem R_{r-1}.

Corollar I. Solche homaloidale Systeme werden auch noch erhalten, wenn der K_∞ des R_∞ ersetzt wird durch irgend eine Correlation in dem R_∞ *).

Corollar II. Hält man O_0 fest und variirt Γ', so dass es einen einzigen dieser Complexe giebt, von welchem in r R_{r-1} durch r gegebene Punkte derselben je ein Strahl geht, so beschreibt die Fusspunkts-M_{r-1} ebenfalls ein homaloidales ∞^r-System. — Hierauf applicirt sich wieder das Corollar I.

2. Von LXXIV wird nun zum ∞^{r+k}-Complex übergegangen, indem die ∞^{k+1} Geraden durch je einen Punkt P des R_r individualisirt werden, etwa durch ihre Richtung, so dass jeder Strahl des R_r vertreten ist durch

---

chen entsprechen jedem Punkte P ∞^1 Geraden durch ihn, der lineare Complex Γ aber ist ein solcher Connex, wo jedem Punkte alle Geraden eines Büschels durch ihn, einer Geraden aber alle ihre Punkte entsprechen. Der Schnitt dieser beiden Connexe ist also eine Incidenz-Abbildung von Γ.

*) Ich verallgemeinere noch dahin, dass ich zunächst im R_3 in einer festen Congruenz O diejenigen Strahlen suche, welche zu den Strahlen einer linearen Congruenz Γ senkrecht sind und diese schneiden. Die Fusspunktsfläche variirt dann mit dem Variiren von Γ, aber O, Γ können so eingerichtet werden, dass das System ein ***homaloidales*** ist.

seinen Fusspunkt und seinen Schnittpunkt mit einem R_{r-1} und indem man R_r, R_{r-1} auf einen R_{2r} überträgt, durch Geraden einer M^2_{2r-1} und im Schnitte mit R_{2r-2} durch einen Punkt einer M^2_{2r-2}.

Zwölftes Abbildungsverfahren.

Der Geradenraum des A_r kann auf die sämmtlichen Punktepaare eines A_{r-1} in folgender Weise abgebildet werden:

Die Kugeln des A_{r-1} bilden ein lineares ∞^r-System und schneiden sich zu je r in zwei Punkten. Dann kann ich den sämmtlichen Kugeln sämmtliche R_{r-1} des A_r zuweisen derart, dass alle $\infty^{2(r-2)}$ Geraden eines solchen R_{r-1} den $\infty^{2(r-2)}$ Punktepaaren der zugewiesenen Kugel K_{r-2} des A_{r-1}, also der Schnittgeraden von rR_{r-1} des A_r das Schnittpunktepaar der $r-1$ K von A_{r-1} entsprechen. Den ∞^r Strahlenbündeln C von A_r entsprechen ∞^r lineare Systeme von Punktepaaren, welche in einem linearen ∞^{r-1}-K-Systeme enthalten sind, also auf Geraden durch einen Punkt C_1 sich befinden und durch eine K_1 harmonisch getrennt werden.

Die bisher entwickelten Verfahren sind durchaus auch für den R_3 mein Eigenthum. Ich will noch zwei Abbildungen andeuten, von welchen die Specialisirungen $r=3$ bekannt sind.

Dreizehntes Abbildungsverfahren.

Man schneide jeden Strahl s des R_r mit zwei R_{r-1} (A, B) und beziehe diese collinear auf zwei Bündel von R_{r-1} (mit Axen R_{r-2}), enthalten im R_{2r-2}. Dann lasse man jedem Strahle s den Schnittpunkt P der R_{r-1} entsprechen, welche den Treffpunkten von s mit A, B vermöge jener Collineationen zugeordnet sind. Für $r=3$ cf. *Schumacher*, Math. Ann. XXXVII.

Vierzehntes Abbildungsverfahren.

Dasselbe bestände darin, im R_r eine M^r_1 als Normcurve zu nehmen, von jedem Punkte P die r Schmiegungs-R_{r-1} zu ziehen und mit einem festen Schmiegungs-R_{r-1} zu schneiden. Den Geraden entsprechen dann Involutionen einer festen M^{r-1}_1 und die Ecken der $(r-1)$-eder sind jedesmal in M^{r-1}_1, also jene M^{r-1}_r, welche zu einer festen M^{r-1}_1 involutorische Lage haben (Involutionscurven sind). Für $r=3$ ist die Idee durchgeführt von *Sturm* in seinem Buche*).

*) Ich möchte für R_3 noch eine Abbildung mehr analytischer Natur den Geometern vorlegen. Unter den sechs Coordinaten einer geraden Linie besteht dieselbe (*Plücker*sche)

Hierzu kommen im R_3 noch folgende Abbildungen des Geradenraumes:

1. Ein Büschel linearer Complexe und ein lineares ∞^3-System von M_2^2, welche eine Basisgerade jenes Büschels enthalten, können zur Abbildung des Geradenraumes von R_3 dienen.

2. Zwei Netze linearer Complexe, welche eine feste Gerade gemeinsam haben, können zur Abbildung des Geradenraumes von R_3 dienen, indem sich je zwei Büschel in einer Geraden von R_3 schneiden.

3. Vier Büschel linearer Complexe, welche eine feste Gerade gemeinsam haben, können zur Abbildung des Geradenraumes von R_3 dienen.

In diesem Paragraphen sind also auch für R_3 12 neue Abbildungen des linearen Complexes gegeben, nämlich die aus dem 1., 3., 4., 6., 7., 8., 9. hervorgehenden, dann die beiden metrischen in der Anmerkung und die drei eben hier hinzugefügten Abbildungen. Besonders die aus dem 1., 4. und 9. Verfahren seien hervorgehoben.

Relation, wie unter den sechs Seitenlängen eines vollständigen Kreisviereckes (*Ptolemäi*sches). Ich lasse also den Geraden die sämmtlichen nicht congruenten Kreisvierecke entsprechen. Es handelt sich nur, eine ∞^4-Mannigfaltigkeit von Kreisvierecken in der Ebene zu erreichen, unter welchen keine zwei congruenten vorhanden sind. Folgende Arten dürften die nächsten sein: 1. In jedem Kreise eines concentrischen Büschels werden alle Vierecke genommen, welche gemeinsame Winkelhalbirende der Gegenseitenpaare haben, d. h. eine ebene Involution von ∞^4 Quadrupeln, erzeugt von einem Kreisbüschel und einem ∞^3 System gleichseitiger Hyperbeln mit festen Asymptotenrichtungen. 2. Man nimmt ein concentrisches Kreisbüschel und alle gleichseitigen Hyperbeln, welche ihren Mittelpunkt auf einer festen Geraden durch das Kreiscentrum haben. — Die symmetrischen (aber nicht congruenten) Kreisvierecke, welche vorkommen, werden durch Zeichenarrangement unterschieden.

(Fortsetzung folgt.)

Grundzüge einer Integrationstheorie der Systeme partieller Differentialgleichungen erster Ordnung in zwei unabhängigen und beliebig vielen abhängigen Veränderlichen.

(Von Herrn *E. von Weber* in München.)

Nach den Untersuchungen des Herrn *Hamburger* (ds. Journ., Bd. 81, S. 243—280; Bd. 93, S. 188—214) kann die Integration eines Systemes von n partiellen Differentialgleichungen I. Ordnung in n unbekannten Functionen und zwei Independenten auf diejenige gewöhnlicher Differentialgleichungssysteme zurückgeführt werden, wenn gewisse Systeme totaler Differentialgleichungen eine genügende Anzahl unabhängiger Integrale besitzen.

Es ist nun der Zweck der vorliegenden Arbeit, diesen *Hamburger*schen Ansatz nach verschiedenen Richtungen hin bedeutend zu verallgemeinern. Zunächst ziehen wir, nicht wie Herr *Hamburger*, bloss n, sondern allgemeiner $n+p$ ($<2n$) partielle Differentialgleichungen in Betracht. In § 1 entwickeln wir die Bedingungen dafür, dass ein Gleichungssystem dieser Art nach *Lie*s Ausdrucksweise ein Involutionssystem bilde, und beweisen unter gewissen Annahmen über die linken Seiten der gegebenen Gleichungen die Existenz eines gemeinsamen Integrals, das von $n-p$ arbiträren Functionen je *eines* Argumentes abhängt. Nachdem wir in § 2 einen für das Folgende fundamentalen Determinantensatz bewiesen, werden in § 3 aus den gegebenen Gleichungen $n-p$ verschiedene Systeme totaler Differentialgleichungen abgeleitet; wir zeigen, wie die Integrale derselben zur Vereinfachung des Integrationsgeschäftes, eventuell zur Herstellung des allgemeinen Integrals benutzt werden können.

Die Heranziehung der Relationen, die sich aus dem gegebenen Involutionssystem durch wiederholte partielle Differentiation nach den Indepen-

denten ergeben, ermöglicht es uns in § 4, die voraufgehende Theorie wesentlich zu erweitern. Die *Pfaff*schen Systeme des § 3 erweisen sich nur als das erste und einfachste Glied einer unendlichen Reihe solcher Systeme, denen für die Integration der gegebenen Gleichungen eine ähnliche Rolle zufällt wie jenen. Diese Untersuchungen bilden ein Analogon zu der von den Herren *Darboux**) und *König***) für partielle Differentialgleichungen II. Ordnung in drei Variabeln entwickelten Theorie, die ich in meiner Arbeit: „Ueber gewisse Systeme *Pfaff*scher Gleichungen***)" auf alle Differentialprobleme in 3 Veränderlichen ausgedehnt habe.

Der letzte Paragraph der Arbeit enthält Untersuchungen über die in den ersten Ableitungen linearen Involutionssysteme, sodann den Nachweis, dass ein System partieller Differentialgleichungen höherer Ordnung in zwei unabhängigen und beliebig vielen abhängigen Variablen sich stets auf ein Involutionssystem zurückführen lässt, sofern sein allgemeines Integral von einer endlichen Zahl arbiträrer Functionen je *eines* Arguments abhängt.

§ 1. Begriff des Involutionssystemes.

1. Es sei gegeben ein System von partiellen Differentialgleichungen der Form:

$$\text{(I.)}\quad \begin{cases} f_1(x_1 y_1 z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_n,\ p_1,\ \ldots,\ p_n,\ q_1,\ \ldots,\ q_n) = c_1, \\ f_2(x_1 y_1 z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_n,\ p_1,\ \ldots,\ p_n,\ q_1,\ \ldots,\ q_n) = c_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_{n+p}(x_1 y_1 z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_n,\ p_1,\ \ldots,\ p_n,\ q_1,\ \ldots,\ q_n) = c_{n+p}; \end{cases}$$

die ganzen Zahlen n und p genügen der Bedingung $0 \leqq p \leqq n-1$; die c_i sind Constante, x und y die beiden unabhängigen, $z_1, \ldots, z_n$ die abhängigen Variablen, deren Ableitungen $\frac{\partial z_k}{\partial x}$, $\frac{\partial z_k}{\partial y}$ bezw. mit p_k, q_k bezeichnet werden. ***Wir wollen dies Gleichungssystem ein Involutionssystem nennen, wenn folgende Voraussetzungen zutreffen:***

a) ***Die Functionen f_i sind in Bezug auf die Grössen p_k, q_k unabhängig, d. h. es verschwinden nicht alle $(n+p)$-reihigen Determinanten der Matrix***

$$\text{(II.)}\quad \begin{Vmatrix} P_{1,1}, & \ldots, & P_{1,n}, & Q_{1,1}, & \ldots, & Q_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ P_{n+p,1}, & \ldots, & P_{n+p,n}, & Q_{n+p,1}, & \ldots, & Q_{n+p,n} \end{Vmatrix},$$

*) Ann. de l'Éc. Norm. VII 1870.

**) Math. Ann. 24.

***) Sitzungsberichte der math.-phys. Klasse der k. bayer. Akademie d. Wiss. Bd. XXV. 1895. Heft III.

worin

$$P_{i,k} \equiv \frac{\partial f_i}{\partial p_k}, \quad Q_{i,k} \equiv \frac{\partial f_i}{\partial q_k}$$

gesetzt ist.

b) *sämmtliche* $(2n+p+1)$-*reihigen Determinanten des Schemas*:

$$\text{(III.)} \quad \left\| \begin{matrix} M_1, & P_{1,1}, & \dots, & P_{1,n}, & Q_{1,1}, & \dots, & Q_{1,n}, & 0, & \dots, & 0 \\ N_1, & 0, & \dots, & 0, & P_{1,1}, & \dots, & P_{1,n}, & Q_{1,1}, & \dots, & Q_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ M_{n+p}, & P_{n+p,1}, & \dots, & P_{n+p,n}, & Q_{n+p,1}, & \dots, & Q_{n+p,n}, & 0, & \dots, & 0 \\ N_{n+p}, & 0, & \dots, & 0, & P_{n+p,1}, & \dots, & P_{n+p,n}, & Q_{n+p,1}, & \dots, & Q_{n+p,n} \end{matrix} \right\|$$

sind Null; dabei bedeuten M_i, N_i bezw. die Ausdrücke:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x} + p_1 \frac{\partial f_i}{\partial z_1} + \dots + p_n \frac{\partial f_i}{\partial z_n}; \quad \frac{\partial f_i}{\partial y} + q_1 \frac{\partial f_i}{\partial z_1} + \dots + q_n \frac{\partial f_i}{\partial z_n}.$$

b') *es verschwinden nicht alle* $(2n+p)$-*reihigen Determinanten des Schemas III.*

2. Im Folgenden werden nur solche Involutionssysteme untersucht, für welche nicht alle n-reihigen Determinanten der Matrix:

$$\text{(IV.)} \quad \left\| \begin{matrix} Q_{1,1} - \lambda P_{1,1}, & \dots, & Q_{n+p,1} - \lambda P_{n+p,1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ Q_{1,n} - \lambda P_{1,n}, & \dots, & Q_{n+p,n} - \lambda P_{n+p,n} \end{matrix} \right\|$$

unabhängig von λ verschwinden. Wir dürfen dann insbesondere annehmen, *dass*

c) *nicht alle* n-*reihigen Determinanten des Schemas*

$$\text{(V.)} \quad \left\| \begin{matrix} P_{1,1}, & P_{2,1}, & \dots, & P_{n+p,1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ P_{1,n}, & P_{2,n}, & \dots, & P_{n+p,n} \end{matrix} \right\|$$

identisch Null sind. In der That kann man dies nöthigenfalls durch die folgende Transformation der unabhängigen Variablen erreichen:

$$x' = x + \alpha y, \quad y' = y, \quad (\alpha \text{ constant})$$

wodurch p_i in p'_i, q_i in $\alpha p'_i + q'_i$, f_i in f'_i übergehe; dann hat man nämlich:

$$\frac{\partial f'_i}{\partial p'_k} \equiv P'_{i,k} \equiv P_{i,k} + \alpha Q_{i,k}; \quad \frac{\partial f'_i}{\partial q'_k} \equiv Q'_{i,k} \equiv Q_{i,k},$$

$$M'_i \equiv M_i, \quad N'_i \equiv N_i - \alpha M_i;$$

die Bedingungen a) und b) sind nun offenbar auch für die accentuirten Grössen erfüllt, und die Constante α kann nach der zu Anfang dieser

Nummer gemachten Voraussetzung so gewählt werden, dass die Annahme c) für die Grössen $P'_{i,k}$ ebenfalls zutrifft; die Bedingung b') ist aber nun von selbst befriedigt, da sich unter den $(2n+p)$-reihigen Determinanten von III alle Producte aus je einer $(n+p)$-reihigen Determinante von II und einer n-reihigen von V vorfinden.

3. Durch je einmalige partielle Differentiation des Systems I nach x und y erhält man folgende Relationen, in denen die zweiten Ableitungen von z_k mit r_k, s_k, t_k bezeichnet sind:

$$(1.)\quad \begin{cases} A_i \equiv M_i + \sum_1^n {}^k P_{i,k} r_k + \sum_1^n {}^k Q_{i,k} s_k = 0, \\ B_i \equiv N_i + \sum_1^n {}^k P_{i,k} s_k + \sum_1^n {}^k Q_{i,k} t_k = 0. \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+p)$$

Diese Gleichungen reducieren sich nach b) auf $2n+p$ unabhängige, d. h. es bestehen für beliebige Werthe der r_k, s_k, t_k p Identitäten:

$$(2.)\quad \sum_1^{n+p} {}^i (\alpha_i^s A_i + \beta_i^s B_i) \equiv 0, \qquad (s = 1, 2, \ldots, p)$$

worin $\alpha_1^s, \ldots, \alpha_{n+p}^s$, $\beta_1^s, \ldots, \beta_{n+p}^s$ p linear unabhängige Systeme von je $2n+2p$ Functionen der Variablen x, y, z_k, p_k, q_k bedeuten, die den Gleichungen

$$(3.)\quad \begin{cases} \Sigma_i \alpha_i^s M_i + \Sigma \beta_i^s N_i = 0, \\ \Sigma_i \alpha_i^s P_{i,k} = 0, \quad \Sigma_i \beta_i^s Q_{i,k} = 0, \\ \Sigma_i (\alpha_i^s Q_{i,k} + \beta_i^s P_{i,k}) = 0 \end{cases} \qquad \left(\begin{matrix} s = 1, 2, \ldots, p \\ k = 1, 2, \ldots, n \end{matrix}\right)$$

Genüge leisten.

Da jedenfalls nicht alle diejenigen $(n+p)$-reihigen Determinanten der Matrix (II.) verschwinden, die die n ersten Colonnen enthalten, und die Nummerirung der Variablen $z_1, \ldots, z_n$ in unserem Belieben steht, so dürfen wir annehmen, dass die aus den ersten $n+p$ Verticalreihen von II bestehende Determinante nicht Null ist; da nun alle aus der letzteren und je einer n-reihigen Determinante von (V.) gebildeten Producte unter den $(2n+p)$-reihigen Determinanten des Gleichungssystems (1.) vorkommen, so können wir dieses System nach den $2n+p$ Unbekannten $r_1, \ldots, r_n$, $s_1, \ldots, s_n$, $t_1, \ldots, t_p$ auflösen, etwa in der Form:

$$(4.)\quad \begin{cases} r_k = R_k \equiv \varrho_k + \sum_{s=1}^{n-p} \varrho_{ks} t_{p+s}; \quad s_k = S_k \equiv \sigma_k + \sum_{s=1}^{n-p} \sigma_{ks} t_{p+s}, \\ t_j = T_j \equiv \tau_j + \sum_{s=1}^{n-p} \tau_{js} t_{p+s}. \end{cases} \qquad (k = 1, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, p)$$

4. Dies vorausgeschickt, soll nun bewiesen werden, dass das allgemeine Integral des Involutionssystems I für beliebige Werthe der Constanten c_i von $n-p$ arbiträren Functionen je *eines* Arguments abhängt; wir stützen uns dabei auf die Resultate, welche Herr *Bourlet* in seiner Arbeit: „Sur les équations aux dérivées partielles etc." (Ann. de l'Éc. Norm. Sér. III, t. 8, Supplém.) veröffentlicht hat.

Betrachten wir die Grössen p_k, q_k einen Augenblick als abhängige Variable neben $z_1 \dots z_n$, so haben wir für die $3n$ Functionen z_k, p_k, q_k das nachfolgende System linearer partieller Differentialgleichungen:

$$(\mathrm{I}'.)\qquad \begin{cases} \text{a.} & \dfrac{\partial z_k}{\partial x} = p_k, \quad \dfrac{\partial z_k}{\partial y} = q_k, \\ \text{b.} & \dfrac{\partial p_k}{\partial x} = R'_k, \quad \dfrac{\partial q_s}{\partial x} = S'_s, \\ \text{c.} & \dfrac{\partial p_k}{\partial y} = S'_k, \quad \dfrac{\partial q_s}{\partial y} = T'_s, \\ \text{d.} & \dfrac{\partial q_j}{\partial x} = S'_j, \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} k = 1, \dots, n \\ s = 1, 2, \dots, p \\ j = p+1, \dots, n \end{pmatrix}$$

worin die Ausdrücke R'_k etc. aus den $R_k \dots$ hervorgehen, indem man darin die Grössen t_{p+h} bezw. durch $\frac{\partial q_{p+h}}{\partial y}$ ersetzt. Dieses Gleichungssystem besitzt die *kanonische Form* (*Bourlet*, l. c. p. 27 und 43). Wenn wir nun die Gleichungen b. nach y, c. nach x differentiiren (wobei die Grössen z_k, p_k, q_k und $\frac{\partial q_{p+h}}{\partial y}$ als Functionen von x und y betrachtet werden), und sodann die auf den rechten Seiten auftretenden zweiten Ableitungen $\frac{\partial^2 q_{p+h}}{\partial x \partial y}$ vermöge der nach y differentiirten Relationen d. ausdrücken, so wird das Gleichungssystem (I'.) dann und nur dann *unbeschränkt integrabel* sein (*Bourlet*, l. c. p. 28), wenn die solcherweise erhaltenen Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial p_k}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial q_s}{\partial x}\right)$$

bezw. den Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial p_k}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial q_s}{\partial y}\right)$$

identisch, d. h. unabhängig von den Differentialquotienten $\frac{\partial^2 q_{p+h}}{\partial y^2}$ gleich sind. Indem wir zu der Bezeichnungsweise der No. 3 zurückkehren, können wir dieser Bedingung folgenden Ausdruck geben:

Definiren wir die Operationssymbole D_x, D_y, $\varDelta_x$, $\varDelta_y$ bezw. durch die Formeln:

$$D_x \equiv \frac{\partial}{\partial x} + \sum_1^n p_k \frac{\partial}{\partial z_k} + \sum_1^n R_k \frac{\partial}{\partial p_k} + \sum_1^n {}_k S_k \frac{\partial}{\partial q_k},$$

$$D_y \equiv \frac{\partial}{\partial y} + \sum_1^n q_k \frac{\partial}{\partial z_k} + \sum_1^n S_k \frac{\partial}{\partial p_k} + \sum_1^p T_s \frac{\partial}{\partial q_s} + \sum_{p+1}^n t_j \frac{\partial}{\partial q_j},$$

$$\varDelta_x \equiv D_x + \sum_{p+1}^n \frac{\partial}{\partial t_j} \frac{\partial t_j}{\partial x}, \quad \varDelta_y \equiv D_y + \sum_{p+1}^n \frac{\partial}{\partial t_j} \frac{\partial t_j}{\partial y},$$

so müssen die Ausdrücke:

$$(5.) \qquad \varDelta_y R_k - \varDelta_x S_k, \quad \varDelta_y S_s - \varDelta_x T_s \qquad (k = 1, \ldots, n;\ s = 1, \ldots, p)$$

vermöge der Beziehungen

$$(6.) \qquad \frac{\partial t_j}{\partial x} = \varDelta_y S_j \qquad (j = p+1, \ldots, n)$$

identisch verschwinden. Nun verwandeln sich die Gleichungen (1.), wenn man darin r_k, s_k, $t_1, \ldots, t_p$ bezw. durch R_k, S_k, $T_1, \ldots, T_p$ ersetzt, in Identitäten. Wir differentiiren die aus der ersten Gleichung (1.) hervorgehende Identität mit dem Symbol $\varDelta_y$, die aus der zweiten entspringende mit $\varDelta_x$ und subtrahiren; da nun die beiden Summen:

$$D_y M_i + \sum_1^n {}_k R_k . D_y P_{i,k} + \sum_1^n {}_k S_k . D_y Q_{i,k},$$

$$D_x N_i + \sum_1^n {}_k S_k . D_x P_{i,k} + \sum_1^p {}_s T_s . D_x Q_{i,s} + \sum_{p+1}^n {}_j t_j D_x Q_{i,j}$$

identisch gleich sind, wie die Ausrechnung leicht ergiebt, so folgt:

$$\sum_1^n {}_k P_{i,k}(\varDelta_y R_k - \varDelta_x S_k) + \sum_1^p {}_s Q_{i,s}(\varDelta_y S_s - \varDelta_x T_s) + \sum_{p+1}^n {}_j Q_{i,j}\Big(\varDelta_y S_j - \frac{\partial t_j}{\partial x}\Big) \equiv 0.$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n+p)$$

Nach (6.) befriedigen sonach die $n+p$ Grössen (5.) $n+p$ homogene lineare Gleichungen, deren Determinante nach No. 3 nicht Null ist, d. h. sie verschwinden vermöge (6.) identisch. Das Gleichungssystem (I'.) ist also im Sinne des Herrn *Bourlet* unbeschränkt integrabel und besitzt somit ein in der Umgebung der Stelle $x = x^0$, $y = y^0$ holomorphes Integralsystem $z_1, \ldots, z_n$ $p_1 \ldots p_n$, $q_1 \ldots q_n$ von der Beschaffenheit, dass sich die Functionen $z_1 \ldots z_n$, $p_1 \ldots p_n$, $q_1 \ldots q_p$ für $x = x^0$, $y = y^0$ auf beliebig vorgegebene Constante $z_1^0 \ldots q_p^0$, die Functionen $q_{p+1} \ldots q_n$ aber für $x = x^0$ auf willkürlich gegebene Functionen $\omega_{p+1}(y) \ldots \omega_n(y)$ reduciren, vorausgesetzt, dass die in (4.) auftretenden Functionen ϱ_k, σ_k, τ_j; ϱ_{ks}, σ_{ks}, τ_{js} der Variablen x, y, $z_1, \ldots, q_n$ sich in der Um-

gebung der Stelle x^0, y^0, z_k^0, p_k^0, q_1^0, ..., q_p^0, $\omega_{p+1}(y^0)$, ..., $\omega_n(y^0)$ regulär verhalten (l. c. pag. 43). Die Functionen f_i des Systems (I.) reduciren sich, wenn man für die z_k, p_k, q_k ihre Ausdrücke in x, y substituirt, auf Functionen von x, y, deren partielle Ableitungen vermöge (I'.) verschwinden, d. h. auf Constante. Jedes Integral der Gleichungen (I'.) liefert also ein solches von (I.), wenn die Integrationsconstanten den Bedingungen:

$$f_i(x^0,\ y^0,\ z_1^0 \dots z_n^0,\ p_1^0 \dots p_n^0,\ q_1^0 \dots q_p^0,\ \omega_{p+1}(y^0) \dots \omega_n(y^0)) = c_i$$

unterworfen werden; offenbar giebt auch umgekehrt jedes Integral von (I.) zu einem solchen der Gleichungen (I'.) Anlass. Setzen wir also:

$$\omega_s(y) \equiv \psi_s'(y), \quad z_s^0 = \psi_s(y^0), \qquad (s = p+1, \dots, n)$$

so können wir den Satz aussprechen: —

„Das Involutionssystem (I.) *besitzt unter den gemachten Voraussetzungen ein von $n-p$ arbiträren Functionen je eines Arguments abhängendes Integral $z_1 \dots z_n$ in dem Sinne, dass sich $z_1 \dots z_p$ für $x = x^0$, $y = y^0$ auf willkürlich gewählte Constante $z_1^0 \dots z_p^0$, dagegen $z_{p+1} \dots z_n$ für $x = x^0$ auf arbiträre Functionen $\psi_{p+1}(y) \dots \psi_n(y)$ reduciren."*

Es ist für das Folgende von Wichtigkeit, die Ausdrücke $\psi_1(y) \dots \psi_p(y)$, $\chi_1(y) \dots \chi_n(y)$, $\psi_1'(y) \dots \psi_p'(y)$ zu ermitteln, auf die sich die Functionen $z_1 \dots z_p$, $p_1 \dots p_n$, $q_1 \dots q_p$ für $x = x^0$ resp. reduciren. Die Gleichungen (I.) lassen sich, wie aus unseren Annahmen folgt, nach $p_1 \dots p_n$, $q_1 \dots q_p$ auflösen. Setzen wir nun $x = x^0$, so gehen die Gleichungen für $q_1 \dots q_p$ über in ein System von Differentialgleichungen der Form

$$\frac{d\psi_i}{dy} = \Phi(x^0,\ y,\ \psi_1 \dots \psi_p); \qquad (i = 1, 2, \dots, p)$$

hiernach sind die Functionen $\psi_1 \dots \psi_p$ durch die Bedingung, dass sie für $y = y^0$ die Werthe $z_1^0 \dots z_n^0$ resp. annehmen sollen, vollkommen bestimmt, worauf die Functionen $\chi_1(y) \dots \chi_n(y)$ mit Hülfe der aus (I.) für die $p_1 \dots p_n$ erhaltenen Ausdrücke gewonnen werden.

§ 2.

Ein Determinantensatz.

5. In diesem Paragraphen bedeuten die $P_{i,k}$, $Q_{i,k}$ irgendwelche $2n(n+p)$ Grössen, die ausser den Voraussetzungen a) und c) des vorigen Paragraphen die Bedingung erfüllen, dass alle $(2n+p+1)$-reihigen, aber nicht alle $(2n+p)$-

reihigen Determinanten der aus $2n+2p$ Zeilen bestehenden Matrix:

$$\text{(III}^a.)\qquad \left\|\begin{array}{ccc} \cdot & \cdot & \cdot \\ P_{i,1}\dots P_{i,n}, & Q_{i,1}\dots Q_{i,n}, & 0\ \dots 0 \\ 0\ \dots 0, & P_{i,1}\dots P_{i,n}, & Q_{i,1}\dots Q_{i,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right\| \qquad {\scriptstyle (i=1,\dots,n+p)}$$

verschwinden.

Der in Aussicht genommene Satz lautet dann so:

„Unter den gemachten Voraussetzungen besitzen die Gleichungen nten Grades in λ, die sich durch Nullsetzen aller n-reihigen Determinanten des Schemas

$$\text{(IV.)}\qquad \left\|\begin{array}{c} Q_{1,1}-\lambda P_{1,1},\quad Q_{2,1}-\lambda P_{2,1}\dots Q_{n+p,1}-\lambda P_{n+p,1} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ Q_{1,n}-\lambda P_{1,n},\quad Q_{2,n}-\lambda P_{2,n}\dots Q_{n+p,n}-\lambda P_{n+p,n} \end{array}\right\|$$

ergeben, genau $n-p$ gemeinschaftliche Wurzeln.

Zum Beweise nehmen wir zunächst an, dass keine der genannten Gleichungen $n$ten Grades unabhängig von λ erfüllt sei oder mehrfache Wurzeln besitze. Indem wir nun die linke Seite der Identität

$$\text{(7.)}\qquad \sum_1^{n+p}{}_i(\beta_i-\lambda\alpha_i)[l_1(Q_{i,1}-\lambda P_{i,1})+\dots+l_n(Q_{i,n}-\lambda P_{i,n})] \equiv 0$$

ausrechnen und die Coefficienten der willkürlichen Grössen

$$l_1\lambda^2\dots l_n\lambda^2,\quad -l_1\lambda\dots -l_n\lambda,\quad l_1\dots l_n$$

einzeln gleich Null setzen, erhalten wir für die $2n+2p$ Unbekannten α_i, β_i $3n$ Gleichungen von der Beschaffenheit, dass die Coefficienten von $\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_{n+p}, \beta_{n+p}$ in der νten dieser Gleichungen mit den Gliedern der νten Colonne in (III^a.) bezw. übereinstimmen. Die obigen Bedingungen sagen also aus, dass es p und nicht mehr als p linear unabhängige Grössensysteme

$$\text{(8.)}\qquad \alpha_1^s\dots\alpha_{n+p}^s,\quad \beta_1^s\dots\beta_{n+p}^s \qquad {\scriptstyle (s=1,2,\dots,p)}$$

giebt, die für beliebige Werthe von $l_1\dots l_n$ und λ die Identitäten:

$$\text{(9.)}\qquad \sum_1^{n+p}{}_i(\beta_i^s-\lambda\alpha_i^s)[l_1(Q_{i,1}-\lambda P_{i,1})+\dots+l_n(Q_{i,n}-\lambda P_{i,n})] \equiv 0 \qquad {\scriptstyle (s=1,2,\dots,p)}$$

befriedigen. Die Grössensysteme (8.) sind dieselben wie die in No. 3 auftretenden, wenn den $P_{i,k}$, $Q_{i,k}$ ihre frühere Bedeutung beigelegt wird.

Bemerken wir zunächst, dass nicht alle p-reihigen Determinanten des Schemas

$$\text{(10.)}\qquad \left\|\begin{array}{cccc} \alpha_1^1, & \alpha_2^1, & \dots, & \alpha_{n+p}^1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_1^p, & \alpha_2^p, & \dots, & \alpha_{n+p}^p \end{array}\right\|$$

verschwinden; denn andernfalls existirte ein Grössensystem $\varrho_1 \dots \varrho_p$ derart, dass man hat

$$\varrho_1 \alpha_i^1 + \cdots + \varrho_p \alpha_i^p = 0; \qquad (i = 1, 2, \dots, n+p)$$

nun verschwinden aber nicht alle Grössen σ_i, die durch die Relationen:

$$\sigma_i \equiv \varrho_1 \beta_i^1 + \cdots + \varrho_p \beta_i^p \qquad (i = 1, 2, \dots, n+p)$$

definirt sind, da sonst die Systeme (8.) nicht linear unabhängig wären. Multiplicirt man demnach die Identitäten (9.) bezw. mit ϱ_s und addirt sie, so folgt:

$$(11.) \qquad \sum_1^{n+p}{}_i \sigma_i [l_1 (Q_{i,1} - \lambda P_{i,1}) + \cdots + l_n (Q_{i,n} - \lambda P_{i,n})] \equiv 0,$$

d. h. $\Sigma_i \sigma_i Q_{i,k} = 0$, $\Sigma \sigma_i P_{i,k} = 0$, was der Annahme § 1, a) widerspricht. Nehmen wir also, um die Ideen zu fixiren, an, dass die aus den letzten p Verticalreihen von (10.) bestehende Determinante nicht Null ist, so wird auch die aus den letzten p Colonnen des Schemas:

$$(12.) \qquad \left\| \begin{matrix} \beta_1^1 - \lambda \alpha_1^1 \dots \beta_{n+1}^1 - \lambda \alpha_{n+1}^1 \dots \beta_{n+p}^1 - \lambda \alpha_{n+p}^1 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \beta_1^p - \lambda \alpha_1^p \dots \beta_{n+1}^p - \lambda \alpha_{n+1}^p \dots \beta_{n+p}^p - \lambda \alpha_{n+p}^p \end{matrix} \right\|$$

gebildete Determinante nicht für beliebige Werthe von λ erfüllt sein.

Sind jetzt $\lambda_1 \dots \lambda_n$ die der Annahme nach verschiedenen Wurzeln der Gleichung, die sich durch Nullsetzen der aus den n ersten Colonnen von (IV.) gebildeten Determinante ergiebt, so existiren n linear unabhängige*) Grössensysteme $l_1^h \dots l_n^h$ $(h = 1, \dots, n)$, die bezw. den Gleichungssystemen

$$(13.) \qquad \begin{cases} l_1^h (Q_{1,1} - \lambda_h P_{1,1}) + \cdots + l_n^h (Q_{1,n} - \lambda_h P_{1,n}) = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ l_1^h (Q_{n,1} - \lambda_h P_{n,1}) + \cdots + l_n^h (Q_{n,n} - \lambda_h P_{n,n}) = 0 \end{cases}$$

genügen. Substituirt man in jede der Identitäten (9.) für $l_1 \dots l_n$, λ die Grössen $l_1^h \dots l_n^h$, λ_h, so folgt

$$\sum_{n+1}^{n+p}{}_i (\beta_i^s - \lambda_h \alpha_i^s)[l_1^h (Q_{i,1} - \lambda_h P_{i,1}) + \cdots + l_n^h (Q_{i,n} - \lambda_h P_{i,n})] = 0; \qquad \left(\begin{matrix} s = 1, 2, \dots, p \\ h = 1, 2, \dots, n \end{matrix} \right)$$

da nun die aus den p letzten Colonnen des Schemas (12.) bestehende Determinante höchstens für p Wurzeln λ_h Null sein kann, so muss man für wenigstens $n - p$ Werthe von h haben:

$$(14.) \qquad l_1^h (Q_{i,1} - \lambda_h P_{i,1}) + \cdots + l_n^h (Q_{i,n} - \lambda_h P_{i,n}) = 0. \qquad (i = n+1, \dots, n+p)$$

---

*) Vgl. *Hamburger*, dieses Journal Bd. 81 S. 248.

Ist demnach r die Zahl der gemeinsamen Verschwindungswerthe aller n-reihigen Determinanten in (IV.), so ist sicher $r \geqq n-p$; wir wollen diese Werthe von λ mit $\lambda_1 \dots \lambda_r$ bezeichnen.

6. Wenn man in den n Identitäten

$$(15.)\quad \sum_1^{n+p} {}_i(\beta_i - \lambda\alpha_i)[l_1^h(Q_{i,1} - \lambda P_{i,1}) + \cdots + l_n^h(Q_{i,n} - \lambda P_{i,n})] \equiv 0 \qquad (h = 1, 2, \dots, n)$$

die Coefficienten von λ^2, $-\lambda$, 1 bezw. gleich Null setzt, so erhält man für die α_i, β_i $3n$ Gleichungen, die mit den oben aus (7.) abgeleiteten wegen der linearen Unabhängigkeit der n Grössensysteme $l_1^h \dots l_n^h$ völlig äquivalent sind. Aber für $h = 1, 2, \dots, r$ gelten neben (13.) auch die Beziehungen (14.). Subtrahirt man nun die Summe der mit $\beta_i - \lambda\alpha_i$ bezw. multiplicirten linken Seiten von (13.), (14.) von der demselben Index h entsprechenden Identität (15.), so kommt

$$(\lambda_h - \lambda) \sum_1^{n+p} {}_i(\beta_i - \lambda\alpha_i)(l_1^h P_{i,1} + \cdots + l_n^h P_{i,n}) \equiv 0, \qquad (h = 1, 2, \dots, r)$$

so dass sich aus den r ersten Identitäten (15.) durch Nullsetzen der Coefficienten von λ^2, $-\lambda$, 1 nur je zwei Gleichungen ergeben; zusammen erhalten wir also aus (15.) höchstens $2r + 3(n-r) = 3n - r$ unabhängige Gleichungen für die $2n + 2p$ Unbekannten α_i, β_i. Da es aber nicht mehr als p unabhängige Lösungssysteme dieser Gleichungen geben kann, so muss man haben

$$3n - r \geqq (2n + 2p) - p,$$

d. h.

$$r \leqq n - p.$$

Nach dem Vorhergehenden ist also $r = n - p$, q. e. d.

7. Falls einige der aus (IV.) zu bildenden Gleichungen $n$ten Grades unabhängig von λ erfüllt sind oder mehrfache Wurzeln besitzen, so denken wir uns die Grössen $P_{i,k}$, $Q_{i,k}$ durch unendlich kleine Incremente derart variirt, dass diese Besonderheiten nicht mehr stattfinden, die Bedingungen der No. 5 aber erfüllt bleiben*). Aus dem Umstande, dass die variirten Gleichungen genau $n-p$ Wurzeln gemein haben, schliessen wir, dass die

*) Dass dies möglich, sieht man so ein: wir können n der Colonnen in (IV.) beliebig, hierauf die übrigen so wählen, dass die n-reihigen Determinanten von (IV.) für genau $n-p$ verschiedene Werthe von λ alle verschwinden, worauf, wie No. 6 zeigt, die Annahmen der No. 5 erfüllt sind; aus diesen können also keine Bedingungen für die Elemente von nur n Verticalreihen des Schemas (IV.) hervorgehen.

Ausgangsgleichungen ebenfalls wenigstens $n-p$ gemeinsame Wurzeln besitzen, wobei indess einige derselben eventuell mehrfach zu zählen sind. Aus den Entwickelungen der vorigen No. folgt leicht, dass wenn die $P_{i,k}$, $Q_{i,k}$ wie soeben variirt gedacht werden, die p Wurzeln, die eine beliebige n-reihige Determinante von (IV.) ausser den $n-p$ gemeinsamen Verschwindungswerthen noch besitzt, auch die complementäre p-reihige Determinante des Schemas (12.) zum Verschwinden bringt; dies gilt, wenn eventuell mehrfach zählende Werthe von λ in Rechnung gezogen werden, auch für die ursprünglichen Schemate (IV.) und (12.). Besässen also die n-reihigen Determinanten des ersteren ausser dem vorhin constatirten gemeinsamen Factor noch einen weiteren, so müssten die p-reihigen Determinanten von (12.) wenigstens für *einen* Werth $\lambda = \lambda_h$ sämmtlich Null sein; es gäbe demnach p Grössen $\varrho_1 \dots \varrho_p$ von der Eigenschaft, dass

$$\sum_1^p {}_s\, \varrho_s \beta_i^s = \lambda_h \sum_1^p {}_s\, \varrho_s \alpha_i^s. \qquad (i = 1, 2, \dots, n+p)$$

Wenn man aber die Identitäten (9.) bezw. mit ϱ_s multiplicirt, und zur Abkürzung

$$\sigma_i \equiv \varrho_1 \alpha_i^1 + \cdots + \varrho_p \alpha_i^p$$

setzt, so ergiebt die Addition eine identische Beziehung der Form (11.), was, wie wir gesehen haben, nicht möglich ist. Unser Satz ist damit allgemein bewiesen.

§ 3.

Die beigeordneten *Pfaff*schen Systeme erster Stufe.

8. Indem wir zu der Betrachtung des Involutionssystems (I.) zurückkehren, fügen wir den Voraussetzungen der No. 1 die weitere hinzu, dass die r $(=n-p)$ gemeinsamen Verschwindungswerthe $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ der aus der Matrix (IV.) zu bildenden Determinanten $n$ten Grades sämmtlich von einander verschieden seien.

Wenn wir mit Hülfe der totalen Differentialgleichungen

$$(16.) \qquad dp_i = r_i dx + s_i dy, \quad dq_i = s_i dx + t_i dy$$

die Grössen r_i, s_i durch t_i ausdrücken und in die Gleichungen

$$(17.) \qquad A_i = 0, \quad B_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, n+p)$$

der No. 3 einsetzen, so kommt:

$$(18.) \quad M_i + \sum_1^n {}_k P_{i,k}\left(\frac{dp_k}{dx} - \frac{dq_k}{dx}\frac{dy}{dx}\right) + \sum_1^n {}_k Q_{i,k}\frac{dq_k}{dx} - \frac{dy}{dx}\sum_1^n {}_k t_k\left(Q_{i,k} - P_{i,k}\frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

$$(19.) \quad N_i + \sum_1^n {}_k P_{i,k}\frac{dq_k}{dx} + \sum_1^n {}_k t_k\left(Q_{i,k} - P_{i,k}\frac{dy}{dx}\right) = 0. \qquad (i = 1, \dots, n+p)$$

Wir wollen die Bedingungen dafür aufschreiben, dass diese $2n+2p$ Gleichungen *eine* der Unbekannten t_k völlig unbestimmt lassen. Man findet zunächst, dass alle n-reihigen Determinanten der Matrix:

$$\left\| Q_{i,k} - \frac{dy}{dx} P_{i,k} \right\|$$

verschwinden müssen, woraus folgt:

$$(20.) \qquad dy = \lambda_h dx,$$

unter h einen der Indices $1, 2, \ldots, r$ verstanden. Indem man diesen Werth von dy in (18.) und (19.) substituirt, (19.) mit λ_h multiplicirt und zu (18.) addirt, folgen die Beziehungen:

$$(21.) \qquad (M_i + \lambda_h N_i)dx + \sum_1^n {}_k P_{i,k} dp_k + \sum_1^n {}_k Q_{i,k} dq_k = 0,$$

die sich mit Hülfe der Differentialrelationen:

$$dz_i = p_i dx + q_i dy$$

und (20.) auch so schreiben lassen:

$$df_1 = 0, \quad \ldots, \quad df_{n+p} = 0,$$

worin sich das Differentiationszeichen auf alle Variablen x, y, z, p_k, q_k erstreckt.

Betrachten wir nunmehr die n linearen homogenen Gleichungen in den Unbekannten $\mu_1 \ldots \mu_{n+p}$:

$$(22.) \qquad \mu_1(Q_{1,k} - \lambda_h P_{1,k}) + \cdots + \mu_{n+p}(Q_{n+p,k} - \lambda_h P_{n+p,k}) = 0; \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

für $\lambda = \lambda_h$ verschwinden zwar alle n-reihigen, aber nicht alle $(n-1)$-reihigen Determinanten der Matrix (IV.), da sonst zwei der Grössen $\lambda_1 \ldots \lambda_r$ einander gleich wären; also besitzen die Gleichungen (22.) $p+1$ linear unabhängige Lösungssysteme:

$$(23.) \qquad \mu_1^s \ldots \mu_{n+p}^s. \qquad (s = 1, 2, \ldots, p+1)$$

Indem man (19.) mit μ_i^s multiplicirt und die erhaltenen $n+p$ Relationen addirt, kommen $p+1$ von den t_k freie Beziehungen, die aber nicht alle von den Gleichungen (21.) unabhängig sind, vielmehr nur *eine* neue Relation liefern.

Die Gleichungen (3.) des § 1 oder die Identitäten (9.) des § 2 lehren nämlich, dass die p Grössensysteme:

$$(24.) \qquad \beta_1^s - \lambda_h \alpha_1^s \ldots \beta_{n+p}^s - \lambda_h \alpha_{n+p}^s \qquad (s = 1, 2, \ldots, p)$$

Lösungen der Gleichungen (22.) darstellen, und zwar linear unabhängige, wie aus dem Schlusse des § 2 hervorgeht. Wählt man diese Lösungen an Stelle der p ersten Systeme (23.), so erhält man mit Berücksichtigung der

Beziehungen (3.) § 1 durch den angeführten Process aus den Relationen (19.) die folgenden:

$$\sum_1^{n+p}{}_i \alpha_i^s\Big[(M_i+\lambda_h N_i)dx+\sum_1^n{}_k P_{i,k}dp_k+\sum_1^n{}_k Q_{i,k}dq_k\Big] = 0. \qquad (s=1,2,\ldots,p)$$

Bezeichnet man nun mit $\mu_1^h\ldots\mu_{n+p}^h$ das letzte, von den Systemen (24.) linear unabhängige Lösungssystem der Gleichungen (22.), das wir mit dem oberen Index h versehen haben, um seine Zugehörigkeit zur Wurzel λ_h anzudeuten, so folgt durch Multiplication von (19.) mit μ_i^h und Addition die Gleichung:

$$(25.)\qquad \sum_1^n{}_k\Big(\sum_1^{n+p}{}_i \mu_i^h P_{i,k}\Big)dq_k+\sum_1^{n+p}\mu_i^h N_i.dx = 0.$$

Dies ist eine von den Relationen (21.) in Bezug auf die Differentiale dp_k, dq_k unabhängige Gleichung. Andernfalls gäbe es nämlich $n+p$ Grössen ϱ_i von der Beschaffenheit, dass:

$$-\sum_1^{n+p}{}_i \mu_i^h P_{i,k}=\sum_1^{n+p}{}_i \varrho_i Q_{i,k};\quad \sum_1^{n+p}{}_i \varrho_i P_{i,k}=0; \qquad (k=1,2,\ldots,n)$$

ausserdem hat man:

$$\sum_1^{n+p}{}_i \mu_i^h(Q_{i,k}-\lambda_h P_{i,k}) = 0. \qquad (k=1,2,\ldots,n)$$

Wir folgern hieraus:

$$\begin{aligned}\Sigma_i\varrho_i P_{i,k}&=\Sigma_i(\mu_i^h-\lambda_h\varrho_i)Q_{i,k}=0,\\ \Sigma_i\varrho_i Q_{i,k}&+\Sigma(\mu_i^h-\lambda_h\varrho_i)P_{i,k}=0,\end{aligned} \qquad (k=1,2,\ldots,n)$$

woraus nach No. 3 geschlossen wird, dass das Grössensystem:

$$\varrho_1\ldots\varrho_{n+p},\quad \mu_1^h-\lambda_h\varrho_1,\quad \ldots,\quad \mu_{n+p}^h-\lambda_h\varrho_{n+p}$$

eine Linearcombination der p Grössensysteme α_i^s, β_i^s, mithin μ_1^h, ..., μ_{n+p}^h eine solche der Systeme (24.) wäre, was ausgeschlossen wurde.

9. Wir wollen die erhaltenen Beziehungen noch einmal zusammenstellen:

$$(\text{VI.})\quad \begin{cases}\text{a.}\quad dy=\lambda_h dx,\ dz_k=(p_k+\lambda_h q_k)dx, & (k=1,2,\ldots,n)\\ \text{b.}\quad df_1=0,\ \ldots,\ df_{n+p}=0,\\ \text{c.}\quad \sum_1^n{}_k\Big(\sum_1^{n+p}{}_i \mu_i^h P_{i,k}\Big)dq_k+\sum_1^{n+p}{}_i \mu_i^h N_i.dx=0.\end{cases}$$

Es giebt r verschiedene solche Gleichungssysteme, die wir als „*die dem Involutionssystem* (1.) *beigeordneten Pfaffschen Systeme erster Stufe*“ bezeichnen wollen.

Durch Elimination der Grössen r_k, s_k, t_k aus den Gleichungen (17.) und den folgenden:

$$\text{(VI.)} \qquad \text{d.} \quad dp_k = (r_k + \lambda_h s_k)dx, \quad dq_k = (s_k + \lambda_h t_k)dx \qquad (k=1,\dots,n)$$

ergeben sich nach dem Vorhergehenden gerade wieder die Relationen (VI.) b. c. und nur diese; wir dürfen daher die letzteren ersetzen durch die Gleichungen d., wenn wir darin unter r_k, s_k, t_k Functionen von $x, y, z_1, \dots, q_n$ verstehen, welche die Bedingungen (17.) identisch befriedigen, im übrigen aber beliebig sind.

Wir nehmen nun an, eines der *Pfaff*schen Systeme (VI.), dem wir, um die Ideen zu fixieren, den Index $h = 1$ beilegen, besitze ein Integral φ_1, das in Bezug auf die Variablen $p_1, \dots, q_n$ von den Functionen f_i unabhängig sei (wozu gewisse Integrabilitätsbedingungen erfüllt sein müssen). Das Differential

$$d\varphi_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} dy + \sum_1^n {}_k \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_k} dz_k + \sum_1^n {}_k \frac{\partial \varphi_1}{\partial p_k} dp_k + \sum_1^n {}_k \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_k} dq_k$$

verschwindet der Voraussetzung nach vermöge der Gleichungen (VI.) (wo $h = 1$ gesetzt ist). Ersetzen wir in $d\varphi_1$ die Differentiale dy, dz_k, dp_k, dq_k durch ihre Werthe aus (VI.) a. und d., so wird der erhaltene, in den r_k, s_k, t_k lineare Ausdruck vermöge der Gleichungen (17.) verschwinden; setzt man demnach:

$$\mathrm{M}_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \sum_1^n {}_k p_k \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_k}; \quad \mathrm{N}_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \sum_1^n {}_k q_k \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_k},$$

$$\Pi_{1,k} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial p_k}, \quad K_{1,k} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_k},$$

ferner:

$$\mathrm{A}_1 = M_1 + \sum_1^n {}_k \Pi_{1,k} r_k + \sum_1^n {}_k K_{1,k} s_k,$$

$$\mathrm{B}_1 = N_1 + \sum_1^n {}_k \Pi_{1,k} s_k + \sum_1^n {}_k K_{1,k} t_k,$$

so besteht eine Identität der Form:

$$\mathrm{A}_1 + \lambda_1 \mathrm{B}_1 = \sum_1^{n+p} {}_i (\varrho_i A_i + \sigma_i B_i)$$

für alle Werthe von r_k, s_k, t_k, unter ϱ_i, σ_i gewisse Functionen von $x, y, z_1, \dots, q_n$ verstanden, die demnach den Relationen

$$(25.) \left\{ \begin{aligned} &\mathrm{M}_1 + \lambda_1 \mathrm{N}_1 = \Sigma \varrho_i M_i + \sigma_i N_i; \quad \Pi_{1,k} = \sum_1^{n+p} {}_i \varrho_i P_{i,k}; \quad \lambda_1 K_{1,k} = \sum_1^{n+p} {}_i \sigma_i Q_{i,k} \\ &K_{1,k} + \lambda_1 \Pi_{1,k} = \sum_1^{n+p} {}_i (\varrho_i Q_{i,k} + \sigma_i P_{i,k}) \end{aligned} \right.$$

genügen. Die Elimination der ϱ_i, σ_i führt auf ein System partieller Differentialgleichungen erster Ordnung für φ_1.

Aus der obigen Identität folgt, dass die Gleichungen

$$\mathrm{A}_1 = 0, \quad \mathrm{B}_1 = 0$$

mit (17.) zusammen nur $2n+p+1$ unabhängige Relationen darstellen; es verschwinden also alle $(2n+p+2)$-reihigen Determinanten der Matrix, die aus (III.) durch Hinzufügung der beiden Horizontalreihen

$$\begin{array}{l} \mathrm{M}_1, \ \Pi_{1,1}, \ \ldots, \ \Pi_{1,n}, \ K_{1,1}, \ \ldots, \ K_{1,n}, \ 0, \ \ldots, \ 0 \\ \mathrm{N}_1, \ 0, \ \ldots, \ 0, \ \Pi_{1,1}, \ \ldots, \ \Pi_{1,n}, \ K_{1,1}, \ \ldots, \ K_{1,n} \end{array}$$

entsteht. Ferner verschwinden nicht alle n-reihigen Determinanten des Schemas, das aus (V.) durch Hinzufügung der Colonne $\Pi_{1,1}, \ldots, \Pi_{1,n}$, ebensowenig alle $(n+p+1)$-reihigen Determinanten der Matrix, die aus (II.) durch Hinzufügen der Horizontalreihe $\Pi_{1,1}, \ldots, \Pi_{1,n}, K_{1,1}, \ldots, K_{1,n}$ hervorgeht. *Nach § 1 bilden also die $n+p+1$ Gleichungen:*

$$(26.) \qquad f_1 = c_1, \ \ldots, \ f_{n+p} = c_{n+p}, \quad \varphi_1 = \gamma_1$$

ein Involutionssystem, das den Bedingungen der No. 1 und 2 genügt.

10. Die $r-1$ gemeinsamen Wurzeln der Gleichungen $n$ten Grades, die man durch Nullsetzen aller n-reihigen Determinanten des Schemas:

$$(27.) \qquad \left\| \begin{array}{ll} Q_{1,1}-\lambda P_{1,1} \ldots Q_{n+p,1}-\lambda P_{n+p,1}, & K_{1,1}-\lambda \Pi_{1,1} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ Q_{1,n}-\lambda P_{1,n} \ldots Q_{n+p,n}-\lambda P_{n+p,n}, & K_{1,n}-\lambda \Pi_{1,n} \end{array} \right\|$$

erhält, sind $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$. Zum Beweise bemerken wir, dass die n linearen Gleichungen in den Unbekannten $\mu_1 \ldots \mu_{n+p+1}$:

$$(28.) \qquad \sum_1^{n+p} {}_i \, \mu_i (Q_{i,k} - \lambda_h P_{i,k}) + \mu_{n+p+1} (K_{1,k} - \lambda_h \Pi_{1,k}) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

nach No. 8 die $p+1$ unabhängigen Lösungen

$$(29.) \qquad \begin{cases} \beta_1^s - \lambda_h \alpha_1^s, \ \ldots, \ \beta_{n+p}^s - \lambda_h \alpha_{n+p}^s, \ 0, & (s = 1, 2, \ldots, p) \\ \mu_1^h, \ \ldots, \ \mu_{n+p}^h, \ 0 & \end{cases}$$

zulassen. Aus den Relationen (25.) aber schliesst man leicht, dass die Grössen

$$\sigma_1 - \lambda_h \varrho_1, \ \ldots, \ \sigma_{n+p} - \lambda_h \varrho_{n+p}, \quad \lambda_h - \lambda_1$$

gleichfalls ein Lösungssystem der Gleichungen (28.) darstellen, das für $h > 1$ von den vorhergehenden linear unabhängig ist. Somit verschwinden alle n-reihigen Determinanten des Schemas (27.) für $\lambda = \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$,

nicht aber für $\lambda = \lambda_1$, da andernfalls die Gleichungen (26.) kein Involutionssystem unserer Art bilden würden (No. 6 und 7).

Indem man die Entwickelungen zu Anfang dieses Paragraphen auf das Involutionssystem (26.) anwendet, erkennt man, dass die $r-1$ beigeordneten *Pfaff*schen Systeme desselben erhalten werden, indem man dem System (VI.) die Relation

$$(30.) \qquad d\varphi_1 = 0$$

beifügt, und h die Werthe 2, 3...r durchlaufen lässt. Besitzt das dem Index $h=2$ entsprechende dieser *Pfaff*schen Systeme ein von den Functionen $\varphi_1, f_1, \dots, f_{n+p}$ in Bezug auf die Variablen $p_1, \dots, q_n$ unabhängiges Integral φ_2, so bilden die Gleichungen (26.) zusammen mit der folgenden:

$$\varphi_2 = \gamma_2$$

wiederum ein Involutionssystem etc.; durch s-malige Wiederholung dieser Schlussweise gelange man zu dem Involutionssystem

$$(31.) \qquad f_1 = c_1 \dots f_{n+p} = c_{n+p}, \quad \varphi_1 = \gamma_1 \dots \varphi_s = \gamma_s. \qquad (s<r)$$

Die n-reihigen Determinanten der Matrix:

$$(32.) \qquad \left\| \begin{matrix} Q_{1,1}-\lambda P_{1,1} \dots Q_{n+p,1}-\lambda P_{n+p,1}, & K_{1,1}-\lambda \Pi_{1,1} \dots K_{s,1}-\lambda \Pi_{s,1} \\ \cdot & \cdot \\ Q_{1,n}-\lambda P_{1,n} \dots Q_{n+p,n}-\lambda P_{n+p,n}, & K_{1,n}-\lambda \Pi_{1,n} \dots K_{s,n}-\lambda \Pi_{s,n} \end{matrix} \right\|$$

verschwinden sämmtlich für $\lambda = \lambda_{s+1}, \dots, \lambda_r$; dabei ist gesetzt:

$$\Pi_{j,k} \equiv \frac{\partial \varphi_j}{\partial p_k}, \quad K_{j,k} \equiv \frac{\partial \varphi_j}{\partial q_k}.$$

Die $r-s$ dem Involutionssystem (31.) beigeordneten Systeme sind die folgenden:

$$(33.) \quad \begin{cases} dy = \lambda_h dx, \quad dz_k = (p_k + \lambda_h q_k) dx, & (k=1,2,\dots,n) \\ df_1 = 0, \quad \dots, \quad df_{n+p} = 0, \quad d\varphi_1 = 0, \quad \dots, \quad d\varphi_s = 0, \\ \sum_1^n {}_k \Big(\sum_1^{n+p} {}_i \mu_i^h P_{i,k} \Big) dq_k + \sum_1^{n+p} {}_i \mu_i^h N_i . dx = 0. & (h = s+1, \dots, r) \end{cases}$$

Diese Gleichungen sind nach No. 8 in Bezug auf die Differentiale $dp_1 \dots dq_n$ von einander unabhängig, gehen also im Falle $s = r-1$ in ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen über, für welches der Index h den einzigen Werth r annimmt, und das augenscheinlich zwei von den Functionen f_i, φ_j in Bezug auf die Variablen $p_1 \dots q_n$ unabhängige Integrale u_r, v_r zulässt.

Ist φ_r eine beliebige Function von u_r und v_r, und setzen wir:

$$\mathrm{A}_j \equiv \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + \sum_1^n {}_k p_k \frac{\partial \varphi_j}{\partial z_k} + \sum_1^n {}_k r_k \Pi_{j,k} + \sum_1^n {}_k s_k K_{j,k},$$
$$\mathrm{B}_j \equiv \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} + \sum_1^n {}_k q_k \frac{\partial \varphi_j}{\partial z_k} + \sum_1^n {}_k s_k \Pi_{j,k} + \sum_1^n {}_k t_k K_{j,k}, \qquad (j = 1, \ldots, r)$$

so bestehen nach dem Obigen für beliebige Werthe der r_k, s_k, t_k Identitäten der Form:

$$\mathrm{A}_\nu + \lambda_\nu \mathrm{B}_\nu \equiv \sum_1^{n+p} {}_i (\varrho_i^\nu A_i + \sigma_i^\nu B_i) + \sum_{h=1}^{\nu-1} (\tau_h^\nu \mathrm{A}_h + \omega_h^\nu \mathrm{B}_h). \qquad (\nu = 1, 2, \ldots r)$$

Mithin reduciren sich die $4n$ Gleichungen

$$(34.) \qquad A_i = 0, \quad B_i = 0, \quad \mathrm{A}_\nu = 0, \quad \mathrm{B}_\nu = 0 \quad (i = 1, \ldots, n+p, \; \nu = 1, \ldots, r)$$

auf genau $3n$ unabhängige. Die $3n$-reihigen, aus den Coefficienten der r_k, s_k, t_k in (34.) gebildeten Determinanten verschwinden nämlich nicht alle; denn es finden sich darunter alle Producte aus je einer n-reihigen Determinante der Matrix (V.) in die $2n$-gliedrige Determinante:

$$(35.) \qquad \begin{vmatrix} P_{1,1} & \ldots P_{1,n}, & Q_{1,1} & \ldots Q_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ P_{n+p,1} & \ldots P_{n+p,n}, & Q_{n+p,1} & \ldots Q_{n+p,n} \\ \Pi_{1,1} & \ldots \Pi_{1,n}, & K_{1,1} & \ldots K_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Pi_{r,1} & \ldots \Pi_{r,n}, & K_{r,1} & \ldots K_{r,n} \end{vmatrix},$$

die wegen der Unabhängigkeit der Functionen f_i, φ_j in Bezug auf $p_1 \ldots q_n$ nicht verschwindet. Wir denken uns nun die $3n$ Unbekannten r_k, s_k, t_k aus den Gleichungen (34.) berechnet; werden die erhaltenen Ausdrücke wieder in diese Gleichungen substituirt, so verwandeln sich letztere in Identitäten, aus denen wir mit Hülfe der Differentiationssymbole

$$D_x \equiv \frac{\partial}{\partial x} + \Sigma p_k \frac{\partial}{\partial z_k} + \Sigma r_k \frac{\partial}{\partial p_k} + \Sigma s_k \frac{\partial}{\partial q_k},$$
$$D_y \equiv \frac{\partial}{\partial y} + \Sigma q_k \frac{\partial}{\partial z_k} + \Sigma s_k \frac{\partial}{\partial p_k} + \Sigma t_k \frac{\partial}{\partial q_k}$$

die Beziehungen

$$D_y A_i - D_x B_i = 0, \quad D_y \mathrm{A}_\nu - D_x \mathrm{B}_\nu = 0$$

ableiten. Die Ausrechnung liefert ähnlich wie in No. 4 die $2n$ Identitäten:

$$\sum_1^n {}_k P_{i,k}(D_y r_k - D_x s_k) + \sum_1^n {}_k Q_{i,k}(D_y s_k - D_x t_k) \equiv 0,$$
$$\sum_1^n {}_k \Pi_{\nu,k}(D_y r_k - D_x s_k) + \sum_1^n {}_k Q_{\nu,k}(D_y s_k - D_x t_k) \equiv 0.$$
$$(i = 1, \ldots, n+p, \; \nu = 1, \ldots, r)$$

Behufs einfacherer Schreibung gewisser Summen setzen wir gelegentlich:

$$p^0_{k,0} \equiv z_k, \quad p^1_{k,0} \equiv p_k, \quad p^1_{k,1} \equiv q_k, \quad p^2_{k,0} \equiv r_k \quad \text{etc.}$$

Eine Function der Variablen x, y, z_k und der Ableitungen $p^\mu_{k,l}$ bis zur νten Ordnung einschliesslich heisse kurz eine Function νter Ordnung.

Die Differentiationssymbole D^μ_x, D^μ_y seien folgendermassen definirt:

$$D^\mu_x \equiv \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{s=0}^{\mu}\sum_{l=0}^{s}\left(p^{s+1}_{1,l}\frac{\partial}{\partial p^s_{1,l}} + \cdots + p^{s+1}_{n,l}\frac{\partial}{\partial p^s_{n,l}}\right),$$

$$D^\mu_y \equiv \frac{\partial}{\partial y} + \sum_{s=0}^{\mu}\sum_{l=0}^{s}\left(p^{s+1}_{1,l+1}\frac{\partial}{\partial p^s_{1,l}} + \cdots + p^{s+1}_{n,l+1}\frac{\partial}{\partial p^s_{n,l}}\right).$$

Die $(m+1)(n+p)$ Gleichungen, die sich aus dem System I durch m-malige partielle Differentiation nach x, y ergeben, d. h. die Gleichungen:

$$\frac{d^m f_i}{dx^{m-l}dy^l} \equiv A^m_{i,l} = 0$$

können wir in dieser Form schreiben.

$$(37.)\qquad A^m_{i,l} \equiv M^m_{i,l} + \sum_1^n{}_k P_{i,k}p^{m+1}_{k,l} + \sum_1^n{}_k Q_{i,k}p^{m+1}_{k,l+1} = 0;$$
$$(i = 1, \ldots, n+p, \quad l = 0, 1, \ldots, m)$$

die Functionen $m$ter Ordnung $M^m_{i,l}$ werden durch folgende Recursionsformeln erhalten:

$$M^m_{i,0} \equiv D^{m-1}_x(A^{m-1}_{i,0}); \quad M^m_{i,m} \equiv D^{m-1}_y(A^{m-1}_{i,m-1});$$

$$M^m_{i,l} \equiv D^{m-1}_x(A^{m-1}_{i,l}) \equiv D^{m-1}_y(A^{m-1}_{i,l-1}). \qquad (l = 1, 2, \ldots, m-1)$$

Dabei haben die Ausdrücke $M^1_{i,0}$, $M^1_{i,1}$, $A^1_{i,0}$, $A^1_{i,1}$ dieselbe Bedeutung wie bisher bezw. die Ausdrücke M_i, N_i, A_i, B_i.

14. Die Gleichungen (37.) reduciren sich vermöge der vorangehenden Relationen

$$(38.)\qquad A^\mu_{i,l} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n+p; \; l = 0, 1, \ldots, \mu; \; \mu = 1, 2, \ldots, m-1)$$

auf nur $(m+1)n+p$ in den höchsten Ableitungen unabhängige Gleichungen. Differentiirt man in der That die Identitäten (2.) des § 1 $(m-1)$-mal nach x und y, so erhält man vermöge (38.) mp identische Beziehungen der Form

$$(39.)\qquad \alpha^s_1 A^m_{1,l} + \beta^s_1 A^m_{1,l+1} + \cdots + \alpha^s_{n+p}A^m_{n+p,l} + \beta^s_{n+p}A^m_{n+p,l+1} \equiv 0.$$
$$(l = 0, 1, \ldots, m-1, \quad s = 1, 2, \ldots, p)$$

Diese sind von einander unabhängig; denn unter den mp-reihigen Determinanten des zugehörigen, aus mp-Zeilen und $(m+1)(n+p)$ Colonnen bestehenden Coefficientenschemas befinden sich alle Producte aus je einer p-reihigen Determinante der Matrix (10.) des § 2 und einer $(m-1)p$-reihigen des Schemas, welches zu den dem oberen Index $m-1$ entsprechenden

Gleichungen der Form (39.) gehört; ist also unsere Behauptung für die Zahl $m-1$ richtig, so gilt sie auch für die Zahl m und ist somit allgemein erwiesen, da sie für $m = 1$ statt hat.

Durch einen ganz analogen Schluss zeigt man, dass zwischen den linken Seiten der Gleichungen (37.) keine weiteren, von (39.) unabhängigen Identitäten bestehen können; denn unter den $((m+1)n+p)$-reihigen Determinanten des Schemas, das aus den Coefficienten der $p_{i,l}^{m+1}$ in (37.) gebildet wird, finden sich alle Producte aus je einer $(mn+p)$-reihigen Determinante des analogen Schemas, das der Ordnungszahl $m-1$ zugehört, und einer n-reihigen der Matrix (V.). Die Gleichungen (37.) lassen somit $r = n-p$ der Ableitungen $p_{i,l}^{m+1}$ völlig willkürlich, wie es auch nach dem Schlussresultat des § 1 nicht anders zu erwarten war.

15. Wir drücken nun vermittelst der Differentialrelationen:

$$dp_{k,l}^{m} = p_{k,l}^{m+1}dx + p_{k,l+1}^{m+1}dy \qquad (l = 0, 1, \dots, m)$$

die Grössen $p_{k,0}^{m+1} \dots p_{k,m}^{m+1}$ durch die Ableitung $p_{k,m+1}^{m+1}$ aus, substituiren diese Ausdrücke in (37.) und schreiben die Bedingungen dafür auf, dass vermöge der so erhaltenen Beziehungnn *eine* der Unbekannten $p_{1,m+1}^{m+1} \dots p_{n,m+1}^{m+1}$ willkürlich bleibt. Vor allem ergiebt sich wieder die Bedingung:

$$dy = \lambda_h dx,$$

unter h einen der Indices $1, 2, \dots, r$ verstanden. Ferner gehen durch unsere Substitution die Gleichungen

$$A_{i,l}^{m}dx + A_{i,l+1}^{m}dy = 0 \qquad (l = 0, 1, \dots, m-1,\ i = 1, \dots, n+p)$$

direct über in die von den $p_{k,m+1}^{m+1}$ freien Relationen

$$(40.) \qquad M_{i,l}^{m}dx + M_{i,l+1}^{m}dy + \sum_1^n {}_k P_{i,k}dp_{k,l}^{m} + \sum_1^n {}_k Q_{i,k}dp_{k,l+1}^{m} = 0;$$

endlich liefern die Bedingungen dafür, dass die $n+p$ letzten der durch unsere Substitution aus (37.) erhaltenen Beziehungen:

$$M_{i,m}^{m} + \sum_1^n {}_k P_{i,k}\frac{dp_{k,m}^{m}}{dx} + \sum_1^n {}_k p_{k,m+1}^{m+1}\left(Q_{i,k} - P_{i,k}\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

eine der Unbekannten $p_{k,m+1}^{m+1}$ willkürlich lassen, *eine* neue Gleichung. Wir wollen das erhaltene System zusammenstellen:

$$(\text{VII.}) \begin{cases} \text{a)} & dy = \lambda_h dx, \quad dp_{k,l}^{\mu} = (p_{k,l}^{\mu+1} + \lambda_h p_{k,l+1}^{\mu+1})dx, \quad \left(\begin{smallmatrix} k = 1, \dots, n;\ l = 0, 1, \dots, \mu \\ \mu = 0, 1, \dots, m-1 \end{smallmatrix}\right) \\ \text{b)} & dA_{i,l}^{m-1} = 0, \qquad (l = 0, 1, \dots, m-1,\ i = 1, \dots, n+p) \\ \text{c)} & \sum_1^n {}_k\left(\sum_1^{n+p} {}_i \mu_i^h P_{i,k}\right)dp_{k,m}^{m} + \left(\sum_1^{n+p} {}_i \mu_i^h M_{i,m}^{m}\right)dx = 0. \end{cases}$$

In den Relationen a) sind unter den $p_{k,l}^{\mu}$ der rechten Seiten irgend welche

Functionen von $x, y, z_1, \ldots, q_n$ zu verstehen, welche die Bedingungen (38.) identisch erfüllen; in den Gleichungen b), die sich auf $mn+p$ unabhängige reduciren, bezieht sich das Zeichen d auf alle Variablen $x, y, z_k, \ldots, p^{\mu}_{k,l}, \ldots$; sie sind vermöge a) mit den Beziehungen (40.) gleichbedeutend; in c) endlich haben die Grössen μ^h_i dieselbe Bedeutung wie in No. 8.

Wir bezeichnen die r Systeme totaler Differentialgleichungen (VII.) *als die dem gegebenen Involutionssystem* (I.) *beigeordneten Pfaffschen Systeme mter Stufe.* Die Annahme $m=1$ führt auf die Systeme (VI.) des vorigen Paragraphen zurück, sofern unter den Ausdrücken $A^0_{i,0}$ die Functionen f_i selbst verstanden werden.

16. Ihrer Herleitung nach können die Gleichungen b), c) auch ersetzt werden durch die folgenden

$$\text{(d.)} \qquad dp^m_{k,l} = (p^{m+1}_{k,l}+\lambda_h p^{m+1}_{k,l+1})dx. \qquad (k=1,\ldots,n;\ l=0,1,\ldots,m)$$

Dabei verstehen wir unter den Grössen $p^{m+1}_{k,l}$ die allgemeinsten, den Relationen (37.) identisch genügenden Functionen der Variablen x, y, z_k und der Ableitungen $p^{\mu}_{k,l}$ bis zur $m$ten Ordnung einschliesslich. Existirt also ein Integral φ_h der *Pfaff*schen Gleichungen (VII.), das von den Ausdrücken $A^{m-1}_{i,l}$ in Bezug auf die Variablen $p^m_{i,l}$ functional unabhängig ist, so genügt es vermöge (38.) für beliebige Werthe der Ableitungen $(m+1)$-ter Ordnung einer Identität der Form:

$$\text{(41.)} \qquad \mathrm{A}_h+\lambda_h\mathrm{B}_h \equiv \sum_1^{n+p}{}_i\,\varrho^h_{i,0}A^m_{i,0}+\sum_1^{n+p}{}_i\,\varrho^h_{i,1}A^m_{i,1}+\cdots+\sum_1^{n+p}{}_i\,\varrho^h_{i,m}A^m_{i,m},$$

worin wir

$$\mathrm{A}_h \equiv D^{m-1}_x\varphi_h+\sum_0^m{}_\mu(\Pi^h_{1,\mu}p^{m+1}_{1,\mu}+\cdots+\Pi^h_{n,\mu}p^{m+1}_{n,\mu}),$$

$$\mathrm{B}_h \equiv D^{m-1}_y\varphi_h+\sum_0^m{}_\mu(\Pi^h_{1,\mu}p^{m+1}_{1,\mu+1}+\cdots+\Pi^h_{n,\mu}p^{m+1}_{n,\mu+1}),$$

$$\Pi^h_{k,\mu} \equiv \frac{\partial\varphi_h}{\partial p^m_{k,\mu}} \qquad (k=1,\ldots,n,\quad \mu=0,1,\ldots,m)$$

gesetzt haben.

Die eben geschriebene Identität ist mit folgenden Relationen äquivalent:

$$D^{m-1}_x\varphi_h+\lambda_h D^{m-1}_y\varphi_h = \sum_1^{n+p}{}_i\sum_0^m{}_\mu\,\varrho^h_{i,\mu}M^m_{i,\mu},$$

$$\text{(42.)} \qquad \left\{\begin{aligned} &\Pi^h_{k,0} = \sum_1^{n+p}{}_i\,\varrho^h_{i,0}P_{i,k}, \\ &\Pi^h_{k,\mu}+\lambda_h\Pi^h_{k,\mu-1} = \sum_1^{n+p}{}_i(\varrho^h_{i,\mu-1}Q_{i,k}+\varrho^h_{i,\mu}P_{i,k}), \qquad \begin{matrix}(k=1,\ldots,n)\\(\mu=1,2,\ldots,m)\end{matrix} \\ &\lambda_h\Pi^h_{k,m} = \sum_1^{n+p}{}_i\,\varrho^h_{i,m}Q_{i,k}. \end{aligned}\right.$$

Die Elimination der $\varrho_{i,\mu}$ aus diesen Gleichungen vollzieht sich nach den Bemerkungen der No. 14 in der Weise, dass wir alle $((m+1)n+p+1)$-gliedrigen Determinanten der zugehörigen Matrix Null setzen. Wir erhalten so für φ_k ein System linearer partieller Differentialgleichungen erster Ordnung; die darin auftretenden unabhängigen Variablen sind diejenigen der Grössen $x, y, z_1, \dots, p^m_{n,m}$, die vermöge der Relationen (38.) von einander unabhängig bleiben.

17. Setzt man zur Abkürzung:

$$\psi^h_i(\lambda) \equiv \sum_0^m{}_\mu (-\lambda)^{m-\mu} \varrho^h_{i,\mu}; \qquad \Psi^h_k(\lambda) \equiv \sum_0^m{}_\mu (-\lambda)^{m-\mu} \Pi^h_{k,\mu}$$

und versteht man unter $l^s_1 \dots l^s_n$ $(s=1, \dots, n)$ irgend n linear unabhängige Grössensysteme, so erhält man ein den Relationen (42.) äquivalentes Gleichungssystem, wenn man in jeder der n Identitäten:

$$(43.) \qquad \sum_1^n{}_k l^s_k \left\{ \sum_1^{n+p}{}_i \psi^h_i(\lambda)(Q_{i,k} - \lambda P_{i,k}) + (\lambda - \lambda_h) \Psi^h_k(\lambda) \right\} \equiv 0 \qquad (s=1, \dots, n)$$

die Coefficienten von $\lambda^{m+1}, \lambda^m, \dots, \lambda, 1$ einzeln Null setzt. Es mögen nun für $\lambda = \lambda_s$ alle n-reihigen Determinanten der Matrix:

$$(44.) \qquad \begin{Vmatrix} Q_{1,1} - \lambda P_{1,1} \dots Q_{n+p,1} - \lambda P_{n+p,1}, & \Psi^h_1(\lambda) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ Q_{1,n} - \lambda P_{1,n} \dots Q_{n+p,n} - \lambda P_{n+p,n}, & \Psi^h_n(\lambda) \end{Vmatrix}$$

verschwinden. Bestimmen wir dann die Grössen $l^s_1 \dots l^s_n$ aus den Gleichungen

$$\sum_1^n{}_k l^s_k (Q_{i,k} - \lambda_s P_{i,k}) = 0, \qquad (i=1, \dots, n+p)$$

$$\sum_1^n{}_k l^s_k \Psi^h_k(\lambda_s) = 0,$$

multipliciren die ersten $n+p$ derselben bezw. mit $\psi^h_i(\lambda_s)$, die letzte mit $\lambda_s - \lambda_h$ und subtrahiren die Summe der linken Seiten der so erhaltenen Gleichungen von (43.), so kommt eine Identität, deren linke Seite durch $\lambda - \lambda_s$ theilbar ist, also zur Bestimmung der $\varrho^h_{i,\mu}$ nur $m+1$ Relationen liefert. Ist demnach ν die Zahl der gemeinsamen Verschwindungswerthe aller n-reihigen Determinanten des Schemas (44.), so erhält man aus den n Identitäten (43.) zusammen höchstens

$$\nu(m+1) + (n-\nu)(m+2) = n(m+2) - \nu$$

unabhängige Relationen. Da diese aber nach dem Schlusse der vorigen

Nummer genau

$$(m+1)(n+p)-(m+1)n-p-1 = mp-1$$

unabhängige Lösungssysteme $\varrho_{i,\mu}$ besitzen, so muss man haben:

$$n(m+2)-\nu \geqq (m+1)(n+p)-mp+1,$$

d. h.

$$\nu \leqq r-1 \quad (r=n-p). \tag{45.}$$

Nun gestattet aber das Gleichungssystem in den Unbekannten μ_i:

$$\sum_1^{n+p}{}_i\, \mu_i(Q_{i,k}-\lambda_j P_{i,k})+\mu_{n+p+1}\Psi_k^h(\lambda_j) = 0 \qquad (k=1,\ldots,n)$$

nach No. 8 die $p+1$ unabhängigen Lösungen:

$$\begin{matrix} \beta_1^s-\lambda_j\alpha_1^s\ldots\beta_{n+p}^s-\lambda_j\alpha_{n+p}^s, & 0, \\ \mu_1^s \quad \ldots \quad \mu_{n+p}^s, & 0, \end{matrix} \qquad (s=1,\ldots,p)$$

ferner nach dem obigen die Lösung

$$\psi_1^h(\lambda_j)\ldots\psi_{n+p}^h(\lambda_j), \quad \lambda_j-\lambda_h,$$

die für $j \gtrless h$ von den vorhergehenden unabhängig ist; also gilt in (45.) das Gleichheitszeichen und wir haben den Satz bewiesen:

Ist φ_h ein Integral des Pfaffschen Systems (VII.), *das von den Ausdrücken $A_{i,l}^{m-1}$ in Bezug auf die Variablen $p_{i,l}^m$ functional unabhängig ist, so haben die algebraischen Gleichungen, die durch Nullsetzen aller n-reihigen Determinanten der Matrix* (44.) *erhalten werden, die Wurzeln $\lambda_1\ldots\lambda_{h-1}$, $\lambda_{h+1}\ldots\lambda_r$, nicht aber die Wurzel λ_h gemein.*"

18. Für jeden der Indexwerthe $h=1, 2, \ldots, r-1$ besitze nun das beigeordnete *Pfaff*sche System $m$ter Stufe (VII.) ein Integral φ_h, das von den Ausdrücken $A_{i,l}^{m-1}$ in Bezug auf die Ableitungen $m$ter Ordnung functional unabhängig sei. *Wir behaupten nun, dass die Gleichungen*

$$\text{(46.)} \quad \begin{cases} \text{a)} \quad dy = \lambda_r dx, \quad dp_{i,l}^{\mu} = (p_{i,l}^{\mu+1}+\lambda_r p_{i,l+1}^{\mu+1})dx, \\ \qquad\qquad (l=0,1,\ldots,\mu;\ \mu=0,1,\ldots,m-1;\ i=1,\ldots,n+p) \\ \text{b)} \quad dA_{i,l}^{m-1} = 0, \qquad (l=0,1,\ldots,m-1;\ i=1,\ldots,n+p) \\ \text{c)} \quad d\varphi_h = 0, \qquad (h=1,2,\ldots,r-1) \\ \text{d)} \quad \sum_1^n{}_k\Big(\sum_1^{n+p}{}_i\, \mu_i^r P_{i,k}\Big)dp_{k,m}^m+\sum_1^{n+p}{}_i\, \mu_i^r N_i dx = 0, \end{cases}$$

(worin für die $p_{i,l}^{\mu}$ der rechten Seite von a) das in No. 15 Gesagte gelten soll), *ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen mit der unabhängigen Variablen x und den abhängigen Veränderlichen y, z_k, $\ldots$, $p_{k,m}^m$ darstellen,*

d. h. dass sich die Relationen b), c), d) *nach den Differentialen* $dp_{k,l}^{m}$ *auflösen lassen.*

Vor allem bemerken wir, dass die Relationen b) sich auf $mn+p$ unabhängige reduciren, so dass wir in b), c), d) höchstens $(m+1)n$ Gleichungen zur Bestimmung der $(m+1)n$ Unbekannten $dp_{k,l}^{m}$ vor uns haben. Wir beweisen zunächst, dass keine von den Differentialen $dp_{k,l}^{m}$ freie Combination der Form

$$(47.)\qquad \sum_{1}^{n+p}{}_i \sum_{0}^{m-1}{}_l\, \sigma_{i,l}\, dA_{i,l}^{m-1} + \sum_{1}^{r-1}{}_h\, \tau_h\, d\varphi_h$$

existiren kann. Denn die Annahme einer solchen ist mit der Voraussetzung äquivalent, dass die n Identitäten

$$(-1)^{m-1}\sum_{1}^{n+p}{}_i\,(\sigma_{i,0}\lambda^{m-1}-\sigma_{i,1}\lambda^{m-2}+\cdots\pm\sigma_{i,m-1})(Q_{i,k}-\lambda P_{i,k})+\sum_{1}^{r-1}{}_h\,\tau_h\,\Psi_k^h(\lambda) \equiv 0$$
$$(k=1,\ldots,n)$$

für jeden Werth von λ erfüllt sind; in der That ergeben sich hieraus durch Nullsetzen der Coefficienten aller Potenzen von λ dieselben Relationen, wie durch Nullsetzen der Coefficienten der $dp_{k,l}^{m}$ in (47.) Mithin wären in der Matrix:

$$(48.)\qquad \left\| \begin{matrix} Q_{1,1}-\lambda P_{1,1}\ldots Q_{n+p,1}-\lambda P_{n+p,1}, & \Psi_1^1(\lambda)\ldots\Psi_1^{r-1}(\lambda) \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot & \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ Q_{1,n}-\lambda P_{1,n}\ldots Q_{n+p,n}-\lambda P_{n+p,n}, & \Psi_n^1(\lambda)\ldots\Psi_n^{r-1}(\lambda) \end{matrix} \right\|$$

die Elemente einer der $r-1$ letzten Colonnen, etwa der dem oberen Index j entsprechenden, lineare Combinationen der bezw. in derselben Zeile stehenden Elemente der übrigen Colonnen; alle aus den letzteren gebildeten n-reihigen Determinanten verschwinden aber nach No. 17 für $\lambda=\lambda_j$ und $\lambda=\lambda_r$, die sämmtlichen n-reihigen Determinanten von (48.) aber nur für $\lambda=\lambda_r$, womit unsere Annahme als unzulässig erkannt ist.

Aus der Voraussetzung ferner, dass die linke Seite der Gleichung d) in Bezug auf die Differentiale $dp_{k,l}^{m}$ von den Ausdrücken $dA_{i,l}^{m-1}$, $d\varphi_h$ nicht unabhängig sei, ergeben sich Relationen der Form:

$$\sum_{1}^{n+p}{}_i\,\mu_i^r P_{i,k}+\sum_{1}^{n+p}{}_i\,\sigma_{i,m-1}Q_{i,k}+\sum_{1}^{r-1}{}_h\,\tau_h\,\Pi_{k,m}^h = 0,$$

$$\sum_{1}^{n+p}{}_i(\sigma_{i,m-s-1}Q_{i,k}+\sigma_{i,m-s}P_{i,k})+\sum_{1}^{r-1}{}_h\,\tau_h\,\Pi_{k,m-s}^h = 0, \qquad (s=1,2,\ldots,m-1)$$

$$\sum_{1}^{n+p}{}_i\,\sigma_{i,0}P_{i,k}+\sum_{1}^{r-1}{}_h\,\tau_h\,\Pi_{k,0}^h = 0, \qquad (k=1,\ldots,n)$$

aus denen sich die folgenden Beziehungen ableiten lassen:

$$(49.)\quad \begin{cases} \sum_1^{n+p} {}_i\, \varrho_{i,0} P_{i,k} + \sum_1^{r-1} {}_h\, \pi_h \Pi^h_{k,0} \;=\; 0, \\ \sum_1^{n+p} {}_i\, \varrho_{i,\mu-1} Q_{i,k} + \sum_1^{n+p} {}_i\, \varrho_{i,\mu} P_{i,k} + \sum_1^{r-1} {}_h\, \pi_h \Pi^h_{k,\mu} + \sum_1^{r-1} {}_h\, \varkappa_h \Pi^h_{k,\mu-1} \;=\; 0, & (\mu = 1, \ldots, m) \\ \sum_1^{n+p} {}_i\, \varrho_{i,m} Q_{i,k} + \sum_1^{r-1} {}_h\, \varkappa_h \Pi^h_{k,m} \;=\; 0, & (k = 1, \ldots, n) \end{cases}$$

wenn gesetzt wird:

$$(50.)\quad \begin{cases} \varrho_{i,0} \;=\; \sigma_{i,0}, \\ \varrho_{i,\mu} \;=\; \sigma_{i,\mu} + \lambda_r \sigma_{i,\mu-1}, & (\mu = 1, \ldots, m-1) \\ \varrho_{i,m} \;=\; \mu_i^r + \lambda_r \sigma_{i,m-1}, \\ \pi_h \;=\; \tau_h, \quad \varkappa_h \;=\; \lambda_r \tau_h, \end{cases}$$

Aber die $n(m+2)$ Gleichungen (49.) in den Unbekannten $\varrho_{i\mu}$, π_h, $\varkappa_h$ gestatten nach dem Bisherigen nur die folgenden $mp+r-1$ linear unabhängigen Lösungen:

$$\left.\begin{aligned} &\varrho_{i,\mu} = 0, \qquad\qquad (\mu = 0, 1, \ldots, q, q+2, q+3, \ldots, m) \\ &\varrho_{i,q} = \alpha_i^s, \quad \varrho_{i,q+1} = \beta_i^s, \quad \pi_1 = \cdots = \pi_{r-1} = \varkappa_1 = \cdots = \varkappa_{r-1} = 0, \end{aligned}\right\} \quad \binom{q = 0, 1, \ldots, m-1}{s = 1, 2, \ldots, p}$$

$$\left.\begin{aligned} &\varrho_{i,\mu} = \varrho^h_{i,\mu}, \quad \pi_1 = \cdots = \pi_{h-1} = \pi_{h+1} = \pi_{r-1} = 0, \\ &\pi_h = -1, \quad \varkappa_h = -\lambda_h, \quad \varkappa_1 = \cdots = \varkappa_{h-1} = \varkappa_{h+1} = \cdots = \varkappa_{r-1} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (h = 1, \ldots, r-1)$$

Mithin wäre das Grössensystem (50.) eine lineare Combination der eben hingeschriebenen Lösungssysteme, woraus sofort folgt, dass alle τ_k gleich Null sind und dass mp Factoren $\nu_{s,1}, \ldots, \nu_{s,m} (s = 1, \ldots, p)$ von der Beschaffenheit existieren, dass man hat:

$$\begin{aligned} \mu_i^r + \lambda_n \sigma_{i,m-1} \;&=\; \sum_1^p {}_s\, \nu_{s,m} \beta_i^s, \\ \sigma_{i,m-j} + \lambda_r \sigma_{i,m-j-1} \;&=\; \sum_1^p {}_s\, (\nu_{s,m-j} \beta_i^s + \nu_{s,m-j+1} \alpha_i^s), \qquad (j = 1, \ldots, m-1) \\ \sigma_{i,0} \;&=\; \sum_1^p {}_s\, \nu_{s,1} \alpha_i^s. \end{aligned}$$

Multiplicirt man die zweite dieser Gleichungen mit $-\lambda_r$, die dritte mit $(-\lambda_r)^2$ etc., die $(m+1)$-te mit $(-\lambda_r)^m$ und addirt alles zur ersten, so folgt:

$$\mu_i^r \;=\; \sum_1^p {}_s\, (\nu_{s,m} - \lambda_r \nu_{s,m-1} + \cdots + (-\lambda_r)^{m-1} \nu_{s,1})(\beta_i^s - \lambda_r \alpha_i^s),$$

was der in No. 8 gegebenen Definition der μ_i^r widerspricht, q. e. d.

19. Die Gleichungen (46.) b) c) d) sind das Resultat der Elimination der Ableitungen $(m+1)$ter Ordnung aus den Relationen:

$$dp^m_{k,l} = (p^{m+1}_{k,l}+\lambda_r p^{m+1}_{k,l+1})dx, \qquad (k=1,\dots,n;\ l=0,1,\dots,m)$$

(51.) $$A^m_{i,l}=0,\quad \mathrm{A}_h=0,\quad \mathrm{B}_h=0. \qquad \left(\begin{smallmatrix} i=1,\dots,n+p, & h=1,2,\dots,r-1 \\ l=0,1,\dots,m \end{smallmatrix}\right)$$

Nun besitzt das System gewöhnlicher Differentialgleichungen (46.) augenscheinlich zwei verschiedene in Bezug auf die Ableitungen $m$ter Ordnung von den Ausdrücken $A^{m-1}_{i,l}$, $\varphi_1, \dots, \varphi_{r-1}$ functional unabhängige Integrale u_r, v_r; ist φ_r eine willkürliche Function derselben und setzen wir

$$D^m_x\varphi_r \equiv \mathrm{A}_r,\quad D^m_y\varphi_r \equiv \mathrm{B}_r,$$

so besteht nach dem eben Gesagten für beliebige Werthe der Ableitungen $(m+1)$ter Ordnung vermöge der Relationen (38.) eine Identität der Form

$$\mathrm{A}_r+\lambda_r\mathrm{B}_r \equiv \sum_1^{n+p}{}_i\sum_0^m{}_l\,\varrho_{i,l}A^m_{i,l}+\sum_1^{r-1}{}_h(\sigma_h\mathrm{A}_h+\tau_h\mathrm{B}_h).$$

Mit Rücksicht hierauf und auf die Identitäten (39.), (41.) stellen die Gleichungen (51.) zusammen mit den folgenden:

(52.) $$\mathrm{A}_r=0,\quad \mathrm{B}_r=0$$

genau $(m+2)n$ linear unabhängige Beziehungen dar, aus denen man die Ableitungen $p^{m+1}_{k,l}$ als Functionen der Variablen x, y, z_k und der Ableitungen bis zur $m$ten Ordnung incl. eindeutig berechnen kann. Wir denken uns die erhaltenen Werthe wieder in (51.), (52.) substituirt, und aus den resultirenden Identitäten die nachstehenden gebildet:

$$D^m_yA^m_{i,l}-D^m_xA^m_{i,l+1} \equiv 0,\quad D^m_y\mathrm{A}_h-D^m_x\mathrm{B}_h \equiv 0;$$

wenn gesetzt wird:

$$\varDelta_{k,l} \equiv D^m_yp^{m+1}_{k,l-1}-D^m_xp^{m+1}_{k,l},$$

so nehmen diese Beziehungen die nachstehende Form an:

$$\sum_1^n{}_k P_{i,k}\varDelta_{k,l}+\sum_1^n{}_k Q_{i,k}\varDelta_{k,l+1} = 0, \qquad (i=1,\dots,n+p;\ l=1,\dots,m)$$

$$\sum_1^n{}_k\sum_1^{m+1}{}_l\,\Pi^h_{k,l-1}\varDelta_{k,l} = 0, \qquad (h=1,2,\dots,r)$$

in der sie ein System von $(m+1)n$ unabhängigen linearen homogenen Relationen für die $(m+1)n$ Unbekannten $\varDelta_{k,l}$ darstellen; es verschwinden nämlich nicht alle $(m+1)n$-gliedrigen Determinanten der zu diesen Gleichungen gehörigen Matrix, da andernfalls die Functionen $A^{m-1}_{i,l}$, $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ in Bezug auf die Ableitungen $p^m_{k,l}$ nicht functional unabhängig wären. Mit-

hin sind alle Ausdrücke $\Delta_{k,l}$ identisch Null, und wir haben den Satz gewonnen:

„Sind die Functionen mter Ordnung $\varphi_1, \ldots, \varphi_{r-1}$ von den Ausdrücken $A_{i,l}^{m-1}$ in Bezug auf die Ableitungen mter Ordnung functional unabhängig und bez. Integrale der den Indices $h = 1, \ldots, r-1$ entsprechenden beigeordneten Pfaffschen Systeme mter Stufe, ist ferner φ_r irgend ein von den Functionen $A_{i,l}^{m-1}$, $\varphi_1 \ldots \varphi_{r-1}$ in Bezug auf die Ableitungen höchster Ordnung unabhängiges Integral des Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen (46.), *so kann man aus den Relationen*

$$A_{i,l}^{m} = 0, \quad D_x^m \varphi_h = 0, \quad D_y^m \varphi_h = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n+p;\ l = 0, 1, \ldots, m;\ h = 1, \ldots, r)$$

die Ableitungen $(m+1)$-ter Ordnung als Functionen der Variablen x, y, z_k und der Ableitungen $p_{i,l}^{\mu}$ bis zur mten Ordnung eindeutig berechnen; substituirt man diese Ausdrücke in das System totaler Differentialgleichungen:

$$(53.) \qquad dz_k = p_k dx + q_k dy, \quad dp_k = r_k dx + s_k dy \ldots dp_{k,m}^{m} = p_{k,m}^{m+1} dx + p_{k,m+1}^{m+1} dy, \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

so wird dasselbe unbeschränkt integrabel.“

Durch Integration dieses Systems erhalte man die Variablen z_k, $p_k, \ldots, p_{k,m}^{m}$ als Functionen von x, y und der Ausgangswerthe $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}_k, \ldots, \bar{p}_{k,m}^{m}$, wobei wir die letzteren den sämmtlichen Relationen (38.) sowie den folgenden:

$$f_i(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}_1, \ldots, \bar{q}_n) = c_i \qquad (i = 1, \ldots, n+p)$$

unterwerfen wollen. Indem wir die gewonnenen Werthe der $z_k, \ldots$ in die Ausdrücke $A_{i,l}^{m-1}$ substituiren, verwandeln sich diese in Functionen von x, y, deren partielle Ableitungen augenscheinlich Null sind, mithin in Constante, die aber vermöge der über die Ausgangswerthe getroffenen Festsetzungen ihrerseits verschwinden. Da dasselbe für die Ausdrücke $A_{i,l}^{m-2}$ etc. gilt, so erkennt man schliesslich, dass das betrachtete Integral des *Pfaff*schen Systems (53.) ein particuläres Integral des gegebenen Involutionssystems (I.) liefert. Das allgemeine Integral des letzteren ergiebt sich aus dem Vorhergehenden unter der Voraussetzung, dass jedes der Systeme VII, die den Indexwerthen $h = 1, \ldots, r-1$ entsprechen, zwei verschiedene, von den Ausdrücken $A_{i,l}^{m-1}$ in Bezug auf die höchsten Ableitungen unabhängige Integrale u_h, v_h besitzt, und unter φ_h eine arbiträre Function derselben verstanden wird. Wie in No. 12 kann man über die Functionen φ_h derart verfügen, dass auf diese Weise ein beliebiges Integral des gegebenen In-

volutionssystems (I.) erhalten wird; wir gehen indess auf die genauere Bestimmung der φ_h der Kürze halber nicht ein.

20. Zum Schlusse dieses Paragraphen wollen wir andeuten, wie man die voraufgehende Theorie von einer nicht unwesentlichen Beschränkung befreien kann.

Aus der Identität (41.) folgt, dass zwischen den $q+1$ Functionen der Ordnung $m+q+1$, die sich aus φ_h durch q-malige partielle Differentiation nach x und y ergeben, und den Ausdrücken $A_{i,l}^{m+q}$ genau q unabhängige lineare Identitäten bestehen.

Es sei nun für jeden der Indexwerthe $h = 1, \dots, r-1$ φ_h ein von den Ausdrücken $A_{i,l}^{m_h-1}$ in Bezug auf die höchsten Ableitungen unabhängiges Integral des beigeordneten Systems $m_h$ter Stufe, das demselben Index h zugehört, und m die grösste der Zahlen m_h; wir denken uns dann jede der Gleichungen

$$(54.)\qquad \varphi_h = \text{const.}$$

so oft partiell differentiirt, bis die erhaltenen Gleichungen die Ordnung m erreichen, d. h. $(m-m_h)$-mal, und behalten aus jeder der so gewonnenen $r-1$ Gruppen von Gleichungen $m$ter Ordnung *eine* bei, deren linke Seite wir mit Λ_h bezeichnen wollen; für $m = m_h$ sei Λ_h mit φ_h identisch. Indem wir jetzt in den Differentialgleichungen (46.) φ_h durch Λ_h ersetzen, und die in a) daselbst auftretenden Grössen $p_{i,l}^{\mu}$ nicht nur den Bedingungen (38.), sondern auch den aus (54.) abgeleiteten Relationen unterwerfen, resultirt wiederum ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen, das zwei von den Ausdrücken $A_{i,l}^{m-1}$, Λ_h in Bezug auf die höchsten Ableitungen unabhängige Integrale u_r, v_r zulässt; bedeutet φ_r eine arbiträre Function der letzteren, so kann man aus den Relationen

$$A_{i,l}^{m} = 0, \quad D_x^m \varphi_r = 0, \quad D_y^m \varphi_r = 0,$$

sowie aus den Gleichungen $(m+1)$-ter Ordnung, die durch wiederholte partielle Differentiation von (54.) erhalten werden, die Ableitungen $(m+1)$-ter Ordnung eindeutig als Functionen von x, y, z_k und den Ableitungen bis zur $m$ten Ordnung berechnen. Durch Substitution dieser Werthe wird das *Pfaff*sche System (53.) unbeschränkt integrabel; seine Integration liefert ein von der arbiträren Function φ_r abhängendes particuläres Integral von (I.), wenn die Ausgangswerthe der Variablen den Bedingungen (38.) und allen aus (54.) abgeleiteten Relationen unterworfen werden.

Aus einer Bemerkung der No. 16 fliesst unmittelbar der Satz:

„Sind u_h, u'_h Integrale des dem Index h angehörigen beigeordneten Systems $m_h$ter, bezw. m'_hter Stufe, und ist $m_h \geqq m'_h$, so ist auch jede Function $\varphi_h(u_h, u'_h)$ ein Integral des Systems $m_h$ter Stufe."

Hieraus schliessen wir, dass *sich nach unserer Methode das allgemeine Integral des vorgelegten Involutionssystems (I.) durch Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen ermitteln lässt, wenn für jeden der Indices $h = 1, \ldots, r-1$ entweder zwei ganze Zahlen m_h, $m'_h < m_h$ existiren, derart dass die zum Index h gehörigen beigeordneten Systeme $m_h$ter, bezw. m'_hter Stufe je ein Integral u_h bezw. u'_h besitzen, das von den Ausdrücken $A_{i,l}^{m_h-1}$ bezw. $A_{i,l}^{m'_h-1}$ in Bezug auf die höchsten Ableitungen functional unabhängig ist; oder**) *eine ganze Zahl m_h von der Beschaffenheit, dass das Pfaffsche System (VII.) mit dem Index h und der Stufenzahl m_h zwei verschiedene Integrale u_h, v_h zulässt, die von den $A_{i,l}^{m_h-1}$ in Bezug auf die $p_{k,l}^{m_h}$ unabhängig sind.*

§ 5.

Lineare Involutionssysteme; partielle Differentialprobleme höherer Ordnung in zwei Independenten.

21. Es sei ein in den p_k, q_k *lineares* Involutionssystem:

$$(55.)\qquad f_i \equiv P_{i,1}p_1 + \cdots + P_{i,n}p_n + Q_{i,1}q_1 + \cdots + Q_{i,n}q_n + L_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+p)$$

vorgelegt, das den Bedingungen der No. 1 und 2 genügt; die Coefficienten $P_{i,k}$, $Q_{i,k}$, L_i, die in den bisherigen Entwickelungen wiederholt gebrauchten Grössen μ_i^h, α_i^s, β_i^s und die Wurzeln $\lambda_1 \ldots \lambda_r$ sind jetzt Functionen der Variablen x; y, $z_1 \ldots z_n$; die Bedingungen b) des § 1 müssen *vermöge* der gegebenen Gleichungen (55.) erfüllt sein.

Substituirt man in (55.) für die p_i ihre aus den Relationen:

$$dz_i = p_i dx + q_i dy$$

entnommenen Werthe, so kommt:

$$L_i + \sum_1^n {}_k P_{i,k} \frac{dz_k}{dx} + \sum_1^n {}_k q_k \left(Q_{i,k} - \frac{dy}{dx} P_{i,k}\right) = 0. \qquad (i = 1, \ldots, n+p)$$

Die Bedingungen dafür, dass diese Beziehungen *eine* der Grössen q_k willkürlich lassen, erhält man unter Berücksichtigung der Relationen (3.) des

*) Man sieht leicht, dass mit der ersten Annahme auch die zweite erfüllt ist.

§ 1 in der Form:

$$(56.)\quad \begin{cases} \text{a)} & dy = \lambda_h dx, \\ \text{b)} & \sum_1^{n+p}{}_i (\beta_i^s - \lambda_h \alpha_i^s) L_i dx + \sum_1^n{}_k \left(\sum_1^{n+p}{}_i \beta_i^s P_{i,k}\right) dz_k = 0, \qquad (s = 1, \ldots, p) \\ \text{c)} & \sum_1^{n+p}{}_i \mu_i^h L_i dx + \sum_1^n{}_k \left(\sum_1^{n+p}{}_i \mu_i^h P_{i,k}\right) dz_k = 0. \end{cases}$$

Diese r Systeme von je $p+2$ totalen Differentialgleichungen mögen *die den Gleichungen* (55.) *beigeordneten Pfaffschen Systeme der nullten Stufe genannt werden.*

Da die Relationen (56.) b), c) ihrer Herleitung nach mit den folgenden gleichbedeutend sind:

$$dz_k = (p_k + \lambda_h q_k) dx, \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

wenn darin p_k, q_k die allgemeinsten Functionen von x, y, $z_1 \ldots z_n$ bedeuten, die (55.) befriedigen, so ist ein Integral φ_h des Systems (56.) auch dadurch definirt, dass es für beliebige Werthe der p_k, q_k einer Identität der Form

$$(57.)\qquad D_x^0 \varphi_h + \lambda_h D_y^0 \varphi_h \equiv \sum_1^{n+p}{}_i \varrho_i f_i$$

genügt, wenn

$$D_x^0 \equiv \frac{\partial}{\partial x} + \Sigma p_k \frac{\partial}{\partial z_k}, \quad D_y^0 \equiv \frac{\partial}{\partial y} + \Sigma q_k \frac{\partial}{\partial z_k}$$

gesetzt wird. Es sind zwei Kategorien von Integralen der Systeme (56.) zu unterscheiden. In die erste rechnen wir diejenigen, welche nur *einer* Identität der Form (57.) genügen; in die zweite diejenigen Integrale ψ_h, für welche man identisch hat:

$$D_x^0 \psi_h \equiv \Sigma \sigma_i f_i, \quad D_y^0 \psi_h \equiv -\Sigma \varrho_i f_i,$$

woraus durch Vergleichung der Coefficienten der p_k, q_k sofort folgt, dass das Grössensystem

$$\varrho_1 \ldots \varrho_{n+p}, \quad \sigma_1 \ldots \sigma_{n+p}$$

eine lineare Combination der p Systeme

$$\alpha_1^s \ldots \alpha_{n+p}^s, \quad \beta_1^s \ldots \beta_{n+p}^s$$

sein muss. Durch leichte Modification der Ueberlegungen des § 3 beweist man:

Existirt für die den Indices $h = 1, \ldots, s$ $(s < r)$ entsprechenden Systeme (56.) je ein Integral φ_h der ersten Kategorie, so bilden die Gleichungen:

$$f_1 = 0, \quad \ldots, \quad f_{n+p} = 0, \quad D_y^0 \varphi_1 = 0, \quad \ldots, \quad D_y^0 \varphi_s = 0$$

wiederum ein Involutionssystem, dessen $r-s$ beigeordnete Systeme nullter Stufe aus (56.) erhalten werden, indem man die Gleichungen

$$d\varphi_1 = 0, \quad \ldots, \quad d\varphi_s = 0$$

hinzufügt und h die Werthe $s+1$, $s+2$, ..., r durchlaufen lässt. Im Falle $s=r-1$ erhält man so ein einziges System gewöhnlicher Differentialgleichungen für y, z_1, ..., z_n, das zwei verschiedene, von den Functionen φ_1, ..., φ_{r-1} in Bezug auf die Variablen z_i unabhängige Integrale u_r, v_r der ersten Kategorie besitzt; ist φ_r eine arbiträre Function von u_r und v_r, so kann man aus den Relationen:

$$f_1 = 0, \quad \ldots, \quad f_{n+p} = 0, \quad D_y^0\varphi_1 = 0, \quad \ldots, \quad D_y^0\varphi_r = 0$$

die Grössen p_k, q_k als Functionen von x, y, z_1, ..., z_n berechnen und in die Relationen:

$$dz_k = p_k dx + q_k dy \qquad (k=1,\ldots,n)$$

substituiren, wodurch dieselben in ein unbeschränkt integrables System totaler Differentialgleichungen übergehen. Die Integration dieses Systems liefert zunächst ein von der arbiträren Function φ_r abhängendes particuläres Integral des Systems (55.), und das allgemeine Integral unter der Voraussetzung, dass jedes der $r-1$ ersten Systeme (56.) zwei verschiedene Integrale u_h, v_h der ersten Kategorie zulässt, und unter φ_h eine willkürliche Function dieser Integrale verstanden wird.

Die allgemeine Theorie der §§ 3 und 4 ist auf lineare Involutionssysteme unverändert anwendbar; man hat nur zu beachten, dass zu den Relationen (38.), vermöge deren wir in § 4 gewisse Bedingungen als erfüllt ansahen, jetzt die Gleichungen (55.) selber hinzutreten, und dass die Zahlen m_h, m'_h der No. 20 nunmehr auch den Werth Null annehmen können.

22. Wir betrachten nun ein System partieller Differentialgleichungen beliebiger Ordnung mit den unabhängigen Veränderlichen x, y und den unbekannten Functionen ζ_1, ζ_2, ..., ζ_ν:

$$\text{(A.)} \qquad \psi_j\left(x, y, \zeta_1, \ldots, \zeta_\nu, \frac{\partial \zeta_1}{\partial x}, \ldots\right) = 0. \qquad (j=1,2,\ldots)$$

Die Ordnung der höchsten darin auftretenden Ableitungen sei m. Nehmen wir an, dass das allgemeine Integral das Gleichungssystem (A.) von r arbiträren Functionen je *eines* Arguments abhänge, so existirt eine Zahl $\mu \geqq m$ von der Beschaffenheit, dass die Gleichungen (A.) und die aus ihnen durch unbegrenzt wiederholte partielle Differentiation nach x und y erhal-

tenen Relationen für jede Zahl $\mu' \geqq \mu$ von den $(\mu'+1)\nu$ Differentialquotienten μ'ter Ordnung der ζ_i genau r willkürlich lassen, die übrigen $(\mu'+1)\nu-r$ Ableitungen μ'ter Ordnung also durch die letzteren auszudrücken gestatten. Wir wollen alle unabhängigen Beziehungen, die aus (A.) und den daraus durch Differentiation erhaltenen Gleichungen für die Variablen $x, y, \zeta_1, \dots, \zeta_\nu$ und die Ableitungen der ζ_i bis zur $(\mu-2)$-ten Ordnung einschliesslich hergestellt werden können, als das System (B.), die unabhängigen unter den Relationen, die für die Ableitungen $(\mu-1)$-ter Ordnung stattfinden, als das System (C.), endlich alle unabhängigen Relationen zwischen den Differentialquotienten μter Ordnung als das System (D.) bezeichnen. Führen wir nun an Stelle der Grössen

$$\zeta_k, \quad \frac{\partial \zeta_k}{\partial x}, \quad \frac{\partial \zeta_k}{\partial y}, \quad \dots, \quad \frac{\partial^{\mu-1}\zeta_k}{\partial x^{\mu-1}}, \quad \frac{\partial^{\mu-1}\zeta_k}{\partial x^{\mu-2}\partial y}, \quad \dots, \quad \frac{\partial^{\mu-1}\zeta_k}{\partial y^{\mu-1}}$$

neue abhängige Variable:

$$\pi^0_{k,0}, \quad \pi^1_{k,0}, \quad \pi^1_{k,1}, \quad \dots, \quad \pi^{\mu-1}_{k,0}, \quad \pi^{\mu-1}_{k,1}, \quad \dots, \quad \pi^{\mu-1}_{k,\mu-1}$$

ein, und setzen wir:

$$\frac{\partial^\mu \zeta_k}{\partial x^\mu} = \frac{\partial \pi^{\mu-1}_{k,0}}{\partial x}; \quad \frac{\partial^\mu \zeta_k}{\partial x^{\mu-s}\partial y^s} = \frac{\partial \pi^{\mu-1}_{k,s}}{\partial x} = \frac{\partial \pi^{\mu-1}_{k,s-1}}{\partial y}, \qquad (s=1, \dots, \mu-1)$$

$$\frac{\partial^\mu \zeta_k}{\partial y^\mu} = \frac{\partial \pi^{\mu-1}_{k,\mu-1}}{\partial y},$$

so verwandeln sich die Gleichungen (D.) in ein System partieller Differentialgleichungen erster Ordnung (D'.) für die abhängigen Variablen $\pi^{\mu-1}_{k,s}$, zu denen die folgenden Relationen hinzutreten:

$$\text{(E.)} \qquad \frac{\partial \pi^s_{k,l}}{\partial x} = \pi^{s+1}_{k,l}; \quad \frac{\partial \pi^s_{k,l}}{\partial y} = \pi^{s+1}_{k,l+1}, \qquad \begin{pmatrix} s=0, 1, \dots, \mu-2 \\ l=0, 1, \dots s \\ k=1, \dots, \nu \end{pmatrix}$$

$$\text{(F.)} \qquad \frac{\partial \pi^{\mu-1}_{k,l}}{\partial y} = \frac{\partial \pi^{\mu-1}_{k,l+1}}{\partial x}. \qquad \begin{pmatrix} k=1, \dots, \nu \\ l=0, 1, \dots, \mu-2 \end{pmatrix}$$

Daneben bestehen die aus (B.) und (C.) erhaltenen Beziehungen:

$$\text{(G.)} \qquad \chi_j(x, y, \pi^0_{1,0}, \dots, \pi^{\mu-2}_{\nu,\mu-2}) = 0, \qquad (j=1, 2, \dots)$$

$$\text{(H.)} \qquad \omega_j(x, y, \pi^0_{1,0}, \dots, \pi^{\mu-1}_{\nu,\mu-1}) = 0. \qquad (j=1, 2, \dots)$$

Wir denken uns aus (G.) möglichst viele der Variablen $\pi^0_{1,0}$ etc. durch x, y und die übrigen Grössen $\pi^0_{1,0}, \dots, \pi^{\mu-2}_{\nu,\mu-2}$ ausgedrückt; diese letzteren, die also vermöge (G.) noch willkürlich bleiben, bezeichnen wir mit $s_1, s_2, \dots, s_\varrho$; ferner denken wir uns aus (H.) möglichst viele der Grössen $\pi^{\mu-1}_{k,l}$ als Functionen von $x, y, s_1, \dots, s_\varrho$ und der übrigen Grössen $\pi^{\mu-1}_{k,l}$ berechnet; diese

letzteren seien $z_{\varrho+1}, z_{\varrho+2}, \ldots, z_n$ genannt. Hierauf substituiren wir die erhaltenen Ausdrücke:

$$(58.)\quad \begin{cases} \pi^s_{k,l} = \pi^s_{k,l}(z_1, z_2, \ldots, z_\varrho, x, y), & \binom{k=1,\ldots,\nu,\ l=0,\ldots,s}{s=0,1,\ldots,\mu-2} \\ \pi^{\mu-1}_{k,l} = \pi^{\mu-1}_{k,l}(z_1, z_2, \ldots, z_n, x, y) & \binom{k=1,\ldots,\nu}{l=0,1,\ldots,\mu-1} \end{cases}$$

in die Gleichungen (D'.), (E.), (F.), wobei die partiellen Differentiationen nach x und y in der Weise auszuführen sind, dass alle Variablen z_i als Functionen von x und y betrachtet werden. Diejenigen der Gleichungen (D'.), (E.), (F.), die sich hierdurch nicht in Identitäten verwandeln, liefern für $z_1, \ldots, z_n$ ein System partieller Differentialgleichungen erster Ordnung, und zwar ergeben die Relationen (E.) 2ϱ Gleichungen der Form:

$$(59.)\quad f_i \equiv p_i - \Phi_i(z_1 \ldots z_n, x, y) = 0, \quad f_{\varrho+i} \equiv q_i - \Psi_i(z_1 \ldots z_n, x, y) = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, \varrho)$$

worin

$$p_i = \frac{\partial z_i}{\partial x}, \quad q_i = \frac{\partial z_i}{\partial y} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

gesetzt ist. Aus unseren Voraussetzungen über das System (A.) folgt unmittelbar, dass r der Ableitungen $p_{\varrho+1}, \ldots, p_n, q_{\varrho+1}, \ldots, q_n$ vermöge der Gleichungen (A.) und der durch Differentiation daraus abgeleiteten Beziehungen völlig willkürlich bleiben müssen. Mithin reduciren sich die Gleichungssysteme (D'.), (F.) durch unsere Substitution zusammen auf $2(n-\varrho)-r$ in Bezug auf die Variablen $p_{\varrho+1}, \ldots, p_n, q_{\varrho+1}, \ldots, q_n$ unabhängige Gleichungen der Form

$$(60.)\quad f_{2\varrho+k} \equiv \Omega_k(x, y, z_1, \ldots, z_n, p_{\varrho+1}, \ldots, p_n, q_{\varrho+1}, \ldots, q_n) = 0. \quad (k = 1, 2, \ldots, 2(n-\varrho)-r)$$

Jedes Integral der Gleichungen (59.), (60.) liefert vermittelst der Relationen (58.) ein Integral des ursprünglichen Systems (A.); umgekehrt lässt sich aus jedem Integral des letzteren leicht ein solches des Systems (59.), (60.) ableiten.

Die Anzahl der Gleichungen (59.), (60.) ist $2n-r$; mithin ist $r \leqq n$, da andernfalls das allgemeine Integral derselben, also auch dasjenige des vorgelegten Gleichungssystems eine willkürliche Function von x und y enthielte; wir dürfen sonach $r = n-p$ setzen. Die Gleichungen (59.), (60.) sind ferner in Bezug auf die p_k, q_k unabhängig; endlich reduciren sich die Relationen, die aus ihnen durch einmalige partielle Differentiation nach x und y hervorgehen, auf $2n+p$ unabhängige; denn von den zweiten Ab-

leitungen der z_i müssen ebenfalls genau $r = n - p$ willkürlich bleiben. Aus No. 1 folgt dann sofort, dass die Gleichungen (59.), (60.) ein Involutionssystem bilden. Das Gleichungssystem (59.), (60.) ist in den Variablen p_k, q_k, linear, wenn die oben mit μ bezeichnete Zahl grösser als m, dagegen im allgemeinen nicht linear, wenn sie gleich m ist; da aber μ beliebig gross genommen werden kann, so ist der Satz bewiesen: ***Jedes System partieller Differentialgleichungen in zwei Independenten, dessen allgemeines Integral von einer endlichen Anzahl arbiträrer Functionen je eines Arguments abhängt, kann auf ein Involutionssystem, nöthigenfalls selbst auf ein lineares zurückgeführt werden.***

München, den 20. März 1896.

Zur Integration der gewöhnlichen Differentialgleichungen.

(Von Herrn *Alf Guldberg* in Christiania.)

Wenn es sich um die Integration einer vorgelegten gewöhnlichen Differentialgleichung $m$ter Ordnung handelt, so liegt es nahe zu untersuchen, wie weit man die gegebene Gleichung auf die Form einer exacten Differentialgleichung derselben Ordnung bringen kann. Für den Fall, dass die gegebene Gleichung linear in Bezug auf die höchste vorkommende Derivirte $y^{(m)}$ ist, hat *Euler* bekanntlich gezeigt, wie man dies durch einen integrirenden Factor erreicht; die Bestimmung dieses Factors führt aber für Differentialgleichungen höherer Ordnungen auf die Integration partieller Differentialgleichungen so complicirter Natur, dass die Ausführung dieses Verfahrens für Differentialgleichungen von höherer als der ersten Ordnung kaum mehr als ein rein theoretisches Interesse bieten dürfte.

Obgleich es sonach scheint, dass die Integration einer vorgelegten Differentialgleichung $m$ter Ordnung sich nicht einfach direct auf Quadraturen reduciren lässt, so dürfte es doch gelingen, ihre Integration auf die Integration einer Differentialgleichung erster Ordnung zu reduciren.

In Beziehung auf dieses letzte Problem erlaube ich mir, in den folgenden Zeilen einige Bemerkungen zu machen*).

Es sei eine Differentialgleichung zweiter Ordnung vorgelegt:

$$\text{(I.)} \qquad F(x, y, y', y'') = 0,$$

wo F linear in Bezug y'' ist. Die Gleichung (I.) lässt sich dann immer auf die Form einer linearen totalen Differentialgleichung:

$$\text{(II.)} \qquad R dy' + Q dy + P dx = 0$$

bringen, wo R, Q, P Function von x, y, y' sind. Wenn hier die Coef-

*) Cfr. *Alf Guldberg:* Comptes Rendus 1er juillet 1895.

ficienten R, Q, P die Bedingung:

$$(\text{a.})\quad \big[RQP\big] = R\Big(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\Big)+Q\Big(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y'}\Big)+P\Big(\frac{\partial Q}{\partial y'}-\frac{\partial R}{\partial y}\Big)=0$$

identisch erfüllen, so ist die lineare totale Differentialgleichung (II.) unbeschränkt integrabel, ihre Integration also mit der Integration einer Differentialgleichung erster Ordnung aequivalent, und ein allgemeines Integral der Gleichung (II.):

$$\varphi(x,\ y,\ y') = \text{const.}$$

ist ein erstes allgemeines Integral der gegebenen Gleichung (I.). Wenn dagegen die Coefficienten R, Q, P der Bedingung (a.) nicht genügen, so addirt man zur Gleichung (II.) die Identität:

$$\alpha(x,\ y,\ y')dy-\alpha(x,\ y,\ y').y'dx = 0,$$

wodurch unsere Gleichung die Form:

$$\text{III.}\qquad Rdy'+(Q+\alpha)dy+(P-\alpha.y')dx = 0$$

erhält. Wir verlangen nun, dass die bis jetzt unbekannte additive Function α so gewählt werden soll, dass die lineare totale Differentialgleichung (III.) unbeschränkt integrabel wird, dass also:

$$R\Big(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}-y'\frac{\partial \alpha}{\partial y}-\frac{\partial \alpha}{\partial x}\Big)Q+(Q+\alpha)\Big(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y'}+\alpha+y'\frac{\partial \alpha}{\partial y'}\Big)$$
$$+(P-y'.\alpha)\Big(\frac{\partial Q}{\partial y'}-\frac{\partial R}{\partial y}+\frac{\partial \alpha}{\partial y'}\Big) = 0,$$

und folglich α durch die lineare partielle Differentialgleichung:

$$(\text{IV.})\qquad (P+y'.Q)\frac{\partial \alpha}{\partial y'}-y'.R\frac{\partial \alpha}{\partial y}-R\frac{\partial \alpha}{\partial x}+\alpha^2$$
$$+\alpha\Big[Q+\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y'}+y'\Big(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial y'}\Big)\Big]+[QPR] = 0,$$

bestimmt ist, wo

$$[PQR] = R\Big(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\Big)+Q\Big(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y'}\Big)+P\Big(\frac{\partial Q}{\partial y'}-\frac{\partial R}{\partial y}\Big).$$

Ist α dieser Bedingung gemäss gewählt, so verlangt die Bestimmung der allgemeinen Lösung der Gleichung III:

$$(\text{V.})\qquad \psi(x,\ y,\ y') = \text{Const.},$$

die ein allgemeines erstes Integral der gegebenen Gleichung (I.) ist, nur die Integration einer Differentialgleichung erster Ordnung.

Die Schwierigkeit des auseinandergesetzten Verfahrens liegt in der Bestimmung der additiven Function α. Es ist aber zu bemerken, dass es für unsere Aufgabe hinreicht, eine particuläre oder *singuläre* Lösung der partiellen Differentialgleichung (IV.) zu bestimmen. Es existirt folglich eine ausgedehnte Klasse von Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die sich *ohne* Integration auf die Form einer linearen totalen, unbeschränkt integrablen Differentialgleichung bringen lassen; Differentialgleichungen zweiter Ordnung deren vollständige Integration also durch einen Eliminationsprocess auf die Integration zweier Differentialgleichungen erster Ordnung reducirbar ist.

Um das allgemeine Integral der gegebenen Gleichung (I.) zu bestimmen, hat man also entweder die gefundene Differentialgleichung (V.) zu integriren, oder einen neuen particulären oder singulären Werth für die durch Gleichung (IV.) bestimmte additive Function (α.), etwa α' zu fixiren und die lineare totale, unbeschränkt integrable Differentialgleichung:

$$Rdy'+(Q+\alpha')dy+(P-\alpha'.y')dx = 0$$

zu integriren, deren allgemeine Lösung:

$$\varphi(x, y, y') = \text{const.}$$

sei, und dann y' zwischen den beiden allgemeinen ersten Integralen:

$$\psi(x, y, y') = \text{const.}, \quad \varphi(x, y, y') = \text{const.}$$

der gegebenen Gleichung (I.) zu eliminiren.

Erwähnt sei endlich, dass es nicht immer nothwendig ist, zwei allgemeine erste Integrale zu suchen, denn es existirt ein solches allgemeines erstes Integral (*principales erstes Integral* dürfte man es vielleicht nennen) etwa:

$$H(x, y, y', a) = 0,$$

dass das allgemeine Integral durch Elimination von y' zwischen

$$H(x, y, y', a) = 0, \quad H(x, y, y', b) = 0$$

bestimmt wird.

Es sei nämlich

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

die gegebene Differentialgleichung, deren allgemeines Integral

$$f(x, y, a, b) = 0$$

ist. Substituirt man für die arbiträren Constanten a und b zwei neue ar-

bitrāre Constanten α und β, bestimmt durch die Gleichungen:

$$a = \alpha + \beta, \quad b = \alpha . \beta,$$

so erhält das allgemeine Integral die Form:

$$f(x, y, \alpha+\beta, \alpha\beta) = 0.$$

Die zwei allgemeinen ersten Integrale, die man durch Derivation und Elimination von α resp. β erhält, haben also, abgesehen von der Constanten, dieselbe Form, etwa:

$$V(x, y, y', \beta) = 0, \quad V(x, y, y', \alpha) = 0,$$

aus welchen Ausdrücken sich wieder das allgemeine Integral der gegebenen Gleichung durch Elimination von y' ergiebt.

Beispiel. Für die Differentialgleichung:

$$xyy'' + xy'^2 - yy' = 0$$

ist

$$y' = \frac{x(\beta^2+y^2)}{y(x^2+\beta)}$$

ein principales erstes Integral. Das allgemeine Integral ergiebt sich durch Elimination von y' zwischen:

$$y' = \frac{x(\beta^2+y^2)}{y(x^2+\beta)}, \quad y' = \frac{x(\alpha^2+y^2)}{y(x^2+\alpha)}$$

in der Form:

$$y^2 = (\alpha+\beta)x^2 + \alpha\beta$$

oder

$$y^2 = ax^2 + b.$$

Ob man im einzelnen Falle ein principales erstes Integral bestimmt hat, verificirt man direct durch den Versuch.

Für Differentialgleichungen höherer Ordnung ist das Verfahren ganz analog, es dürfte daher nur nöthig sein, es kurz anzudeuten.

Es sei eine gewöhnliche Differentialgleichung $m$ter Ordnung:

$$\text{(A.)} \qquad F(x, y, y', \ldots, y^{(m)}) = 0$$

vorgelegt, wo F linear in Bezug auf $y^{(m)}$ ist.

Die Gleichung (A.) lässt sich in der Form einer linearen totalen Differentialgleichung:

$$\text{(B.)} \qquad P_1 dy^{(m-1)} + P_2 dy^{(m-2)} + \cdots + P_{m-1} dy + P_m dx = 0$$

schreiben, wo die $P_1, \ldots, P_m$ Functionen von $x, y_1, \ldots, y^{(m-1)}$ sind.

Wenn die $P_1, \ldots, P_m$ den $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ nothwendigen und hinreichenden Integrabilitätsbedingungen genügen, d. h. wenn die totale Gleichung (B.) unbeschränkt integrabel ist, so fordert die Bestimmung ihrer allgemeinen Lösung:

$$\psi(x, y, y', \ldots, y^{(m-1)}) = \text{Const.},$$

die mit einem allgemeinen ersten Integrale der Gleichung (A.) aequivalent ist, nur die Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung.

Wenn dagegen die P diesen Bedingungen nicht genügen, so addiren wir zu Gleichung (B.) eine Reihe Identitäten:

$$\alpha_k(x, y, y', \ldots, y^{(m-1)})dy^{(k-1)} - \alpha_k(x, y, y', \ldots, y^{(m-1)}).y^{(k)}dx = 0,$$

$$\alpha_i(x, y, y', \ldots, y^{(m-1)})dy^{(k-1)} - \alpha_i(x, y, y', \ldots, y^{(m-1)})\frac{y^{(k)}}{y^{(k-i)}}dy^{(k-i-1)} = 0,$$

und bestimmen, analog wie für eine Differentialgleichung zweiter Ordnung gezeigt ist, die additiven Functionen α so, dass die erhaltene neue lineare totale Differentialgleichung:

$$Q_1 dy^{(m-1)} + Q_2 dy^{(m-2)} + \cdots + Q_{m-1} dy + Q_m dx = 0$$

unbeschränkt integrabel wird. Die Bestimmung ihrer allgemeinen Lösung:

(C.) $$\varphi(x, y, y', \ldots, y^{(m-1)}) = \text{Const.},$$

die zugleich ein allgemeines erstes Integral der gegebenen Gleichung (A.) ist, erfordert demnach nur die Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung.

Um das allgemeine Integral der Gleichung (A.) zu bestimmen, hat man, entweder die Gleichung (C.) zu integriren, oder wie früher m allgemeine erste Integrale:

$$\varphi_1 = a_1, \quad \varphi_2 = a_2, \quad \ldots, \quad \varphi_m = a_m$$

zu bestimmen und zwischen diesen $y', y'', \ldots, y^{(m-1)}$ zu eliminiren; oder endlich, wenn ein principales erstes Integral (dessen Existenz sich analog wie früher ergiebt),

$$H(x, y, y', \ldots, y^{(m-1)}a) = 0$$

bestimmt ist, die arbiträre Constante zu ändern und $y', y'', \ldots, y^{(m-1)}$ zwischen den erhaltenen m Gleichungen zu eliminiren.

Ueber den Zusammenhang der Krümmungstheorie der Curven mit der Mechanik starrer Systeme des n-dimensionalen Raumes.

(Von Herrn *Georg Landsberg* in Heidelberg.)

Wenn man in zwei benachbarten Punkten einer Raumcurve die von Tangente, Hauptnormale und Binormale gebildete rechtwinklige Ecke construirt, so besteht der Uebergang von einem Axenkreuz zum nächstfolgenden in einer Verschiebung des Anfangspunktes in der Richtung der Tangente um die Grösse des Bogenelementes und in einer Rotationsbewegung, deren mittlere Componente gleich Null ist, während die anderen beiden den beiden Krümmungen der Curve gleich sind*). Bei dieser Auffassung erscheinen die bekannten *Frenet-Serret*schen Formeln der Infinitesimalgeometrie als specielle Fälle der allgemeinen Relationen, welche für die Bewegung eines starren Körpers im Raume gelten. In einer früheren Arbeit**) habe ich gezeigt, in welcher Weise die Krümmungen höherer Ordnung und die *Frenet-Serret*schen Formeln für eindimensionale Gebilde im Raume von n Dimensionen zu verallgemeinern sind; hier will ich, einer dankenswerthen Anregung des Herrn *Kneser* folgend, die analogen Beziehungen aufsuchen, welche zwischen jenen Formeln und den allgemeinen Relationen für die Bewegung starrer Körper im n-dimensionalen Raume stattfinden. Es ergiebt sich, dass, während die allgemeine Rotationsbewegung im n-dimensionalen Raume durch $\frac{1}{2}n(n-1)$ Componenten bestimmt wird, die specielle Rotation, welche durch die Tangentialelemente einer Curve indicirt wird, nur $n-1$ von Null verschiedene Componenten besitzt und dass

---

*) Siehe hierüber: *Darboux*, Théorie générale des surfaces, première partie, livre I, chap. I.

**) Dieses Journal, Bd. 114, S. 338—344.

diese den Krümmungen der Curve gleich sind. Umgekehrt reichen diese Specialisirungen aus, um eine Bewegung eines starren Systemes als eine solche zu charakterisiren, wie sie beim Fortschritt auf einer Curve auftritt; die *Frenet-Serret*schen Formeln selbst erscheinen hierbei als das Resultat interpretationsfähiger Ueberlegungen und ohne unübersichtliche Zwischenrechnung.

Bezüglich der vorbereitenden Ausführungen des § 1 bemerke ich, dass die angewendete Methode zur Entwickelung der bei einem Prismatoid geltenden Grössenbeziehungen mir vor längerer Zeit durch mündliche Mittheilung des Herrn *Hensel* bekannt wurde und auf *Kronecker* zurückgeht.

§ 1.

Es seien im Raume von n Dimensionen $n+1$ Punkte $P, P_1, P_2, \ldots, P_n$ gegeben, die nicht in einer $(n-1)$-fachen ebenen Mannigfaltigkeit (einer $\mathfrak{M}_{n-1}$) gelegen sind, und es seien in Beziehung auf ein Coordinatensystem mit dem Anfangspunkte P die Coordinaten von P_g gleich $\xi_{g1}, \xi_{g2}, \ldots, \xi_{gn}$.

Geht man alsdann zu einem anderen Coordinatensystem mit dem gleichen Anfangspunkte über, so sind die neuen Coordinaten $\eta_{g1}, \eta_{g2}, \ldots, \eta_{gn}$ des Punktes P_g mit den alten durch die Gleichungen:

$$(1.)\qquad \eta_{gh} = \sum_{i=1}^{i=n} c_{ih}\xi_{gi} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n)$$

verbunden, worin das System $C = (c_{ih})$ ein orthogonales ist und also, mit seinem conjugirten C' zusammengesetzt, das Einheitssystem E ergiebt. Bildet man hiernach die Systeme

$$\Xi = (\xi_{gh}) \quad \text{und} \quad H = (\eta_{gh}),$$

so ist

$$(2.)\qquad \Xi C = H,$$

und wenn man zu den conjugirten Systemen Ξ', H', C' übergeht,

$$(3.)\qquad C'\Xi' = H'.$$

Durch Multiplication von (2.) und (3.) erhält man:

$$\Xi\Xi' = HH',$$

und es ist also

$$\sum_i \xi_{gi}\xi_{hi} = \sum_i \eta_{gi}\eta_{hi},$$

d. h. die Grössen:

$$(4.)\qquad w_{gh} = \sum_{i=1}^{n} \xi_{gi}\xi_{hi} = (og)(oh)\cos(goh) \qquad (g, h = 1, 2, \dots, n)$$

sind Invarianten bei orthogonaler Transformation. Daher ist auch jede Unterdeterminante des symmetrischen Systemes $\Xi\Xi'$ eine Invariante bei orthogonaler Transformation.

Man kann nun insbesondere das orthogonale System C stets so wählen, dass in dem transformirten Systeme H alle Elemente oberhalb der Diagonale verschwinden; dies geschieht nämlich, wenn man das Coordinatensystem der η so annimmt, dass die Axe η_1, mit der Geraden $(0, 1)$, die Ebene $(\eta_1\eta_2)$ mit der Ebene $(0, 1, 2)$, allgemein die νfache ebene Mannigfaltigkeit ($\mathfrak{M}_\nu$), welche durch die Axen $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_\nu$ bestimmt wird, mit der $\mathfrak{M}_\nu$ der Punkte $0, 1, 2, \dots, \nu$ zusammenfällt. Dabei kann man die Richtungen der Axen überdies so wählen, dass die Inhalte der Prismatoide $(0, 1, 2, \dots, \nu)$ sämmtlich positiv ausfallen, und dass also in dem reducirten Systeme:

$$\begin{pmatrix} \eta_{11} & & & & \\ \eta_{21} & \eta_{22} & & & \\ \eta_{31} & \eta_{32} & \eta_{33} & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \eta_{n1} & \eta_{n2} & \eta_{n3} & \dots & \eta_{nn} \end{pmatrix}$$

die Diagonalelemente sämmtlich positiv sind. Die Bestimmung der Elemente η erfolgt leicht, indem man die Invarianteneigenschaft jener vorher erwähnten Unterdeterminanten in Betracht zieht. Setzt man nämlich die Theilsysteme von Ξ und Ξ':

$$\begin{matrix} \xi_{11} & \dots & \xi_{1n}, \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{\nu 1} & \dots & \xi_{\nu n}, \end{matrix} \qquad \text{und} \qquad \begin{matrix} \xi_{11} & \dots & \xi_{\nu-1,1} & \xi_{\mu 1}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{1n} & \dots & \xi_{\nu-1,n} & \xi_{\mu n}, \end{matrix} \qquad (\mu \geqq \nu)$$

zusammen, so erhält man die Determinante:

$$\begin{vmatrix} w_{11} & \dots & w_{1,\nu-1} & w_{1\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ w_{\nu 1} & \dots & w_{\nu,\nu-1} & w_{\nu\mu} \end{vmatrix} = W_{\nu\mu}$$

und diese muss gleich sein dem Producte der beiden Determinanten:

$$\eta_{11}\ \eta_{22}\ \dots\ \eta_{\nu\nu} \quad \text{und} \quad \eta_{11}\ \dots\ \eta_{\nu-1,\nu-1}\ \eta_{\mu\nu}.$$

Hieraus folgt für $\mu = \nu$:

$$(\eta_{11}\eta_{22}\dots\eta_{\nu\nu})^2 = W_{\nu\nu},$$

also

$$\eta_{\nu\nu} = \sqrt{\frac{W_{\nu\nu}}{W_{\nu-1,\nu-1}}}, \tag{5.}$$

und für $\mu > \nu$:

$$(\eta_{11}\eta_{22}\dots\eta_{\nu-1,\nu-1})^2.\eta_{\nu\nu}\eta_{\mu\nu} = W_{\nu\mu},$$

also

$$\eta_{\mu\nu} = \frac{W_{\nu\mu}}{\sqrt{W_{\nu\nu}W_{\nu-1,\nu-1}}}, \tag{5*.}$$

worin die Quadratwurzeln positiv sind. Die Bestimmung des Systemes C kann alsdann durch die Gleichungen (2.) oder (3.) erfolgen, und die Determinante des Systemes wird hierbei gleich ± 1, je nachdem die Determinante $|\xi_{gh}|$ positiv oder negativ ist. Man erkennt übrigens leicht, dass die hier durchgeführte Transformation keine andere ist, als die bekannte *Jacobi*sche Transformation der zu dem symmetrischen Systeme $\Xi\Xi'$ gehörigen positiven quadratischen Form:

$$\sum_{gh} w_{gh}u_g u_h = \sum_i (\sum_g \xi_{gi}u_g)^2,$$

welche bei unbestimmten $u_1, u_2, \dots, u_n$ das Quadrat der Entfernung eines beliebigen Punktes von P ausdrückt.

Die Elemente η des reducirten Systemes haben sämmtlich eine einfache geometrische und vom Coordinatensysteme unabhängige Bedeutung. Bezeichnet man nämlich den $\nu!$-fachen Inhalt des Prismatoides, welches die Punkte $0, 1, 2, \dots, \nu$ bilden, kurz mit $(0, 1, 2, \dots, \nu)$, den Winkel, den die νfachen Mannigfaltigkeiten der beiden Prismatoide $(0, 1, \dots, \nu-1, \lambda)$ und $(0, 1, \dots, \nu-1, \mu)$ bilden, mit $(\lambda|0, 1, \dots, \nu-1|\mu)$, so ist die Determinante

$$W_{\nu\mu} = (0, 1, \dots, \nu-1, \nu).(0, 1, \dots, \nu-1, \mu)\cos(\nu|0, 1, \dots, \nu-1|\mu), \tag{6.}$$

also

$$W_{\nu\nu} = (0, 1, \dots, \nu)^2,$$

und

$$\left\{\begin{aligned} \eta_{\mu\nu} &= \frac{(0, 1, \dots, \nu-1, \mu)\cos(\nu|0, 1, \dots, \nu-1|\mu)}{(0, 1, \dots, \nu-1)}, \\ \eta_{\nu\nu} &= \frac{(0, 1, \dots, \nu-1, \nu)}{(0, 1, \dots, \nu-1)}. \end{aligned}\right. \tag{7.}$$

Wenn man irgend eine Subdeterminante des Systemes HH' erstens

direct durch die Grössen η ausdrückt und sie zweitens der entsprechenden Subdeterminante des Systemes $\Xi\Xi'$ gleichsetzt, so erhält man hieraus eine Relation zwischen den Elementen des Prismatoides. Unter den zahlreichen Sätzen, die man so erhalten kann, stellen wir hier nur den einen auf, den wir im Folgenden brauchen.

Bilden wir nämlich die Determinante $\Sigma\pm w_{11}w_{22}, \ldots, w_{\nu-1,\nu-1}w_{\nu+1,\nu+1}$, so ist dieselbe, ausgedrückt durch die ξ, gleich dem Quadrate des Prismatoides $(0, 1, \ldots, \nu-1, \nu+1)$, und, ausgedrückt durch die η, gleich

$$(\eta_{11}, \ldots, \eta_{\nu-1,\nu-1})^2(\eta^2_{\nu+1,\nu}+\eta^2_{\nu+1,\nu+1}) = \frac{W^2_{\nu,\nu+1}+W_{\nu-1,\nu-1}W_{\nu+1,\nu+1}}{W_{\nu\nu}};$$

macht man jetzt von den Gleichungen (6.) Gebrauch, so erhält man die Relation

$$(8.)\quad \begin{cases} (0, 1, \ldots, \nu-1, \nu+1)(0, 1, \ldots, \nu)\sin(\nu|0, 1, \ldots, \nu-1|\nu+1) \\ \qquad = (0, 1, \ldots, \nu-1).(0, 1, \ldots, \nu-1, \nu, \nu+1). \end{cases}$$

Jedes Prismatoid von $\nu+1$ Punkten besitzt Grenzmannigfaltigkeiten der Dimension $\nu-1$, $\nu-2$, ..., 1 und in ihnen sind Prismatoide gelegen, die man Grenzprismatoide erster, zweiter, ..., $(\nu-1)$-ter Ordnung benennen kann. Mit Einführung dieser Bezeichnung besagt die Gleichung (8.): Das Product aus den Inhalten zweier Grenzprismatoide erster Ordnung und dem Sinus des eingeschlossenen Winkels ist gleich dem Inhalte des Grenzprismatoides zweiter Ordnung, das jenen beiden gemein ist, multiplicirt mit dem $\frac{\nu+1}{\nu}$-fachen Inhalt des ganzen Prismatoides.

Betrachten wir jetzt eine Curve des n-dimensionalen Raumes und bezeichnen die n benachbarten Punkte des Curvenpunktes P mit $P_1, P_2, \ldots, P_n$, so bestimmen dieselben im Punkte P ein solches Axensystem $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$, wie es im Vorhergehenden charakterisirt wurde, und die ebene Mannigfaltigkeit der Axen $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_\nu$ ist die tangentiale $\mathfrak{M}_\nu$ der Curve im Punkte P. Bezeichnet man ferner, wie in der früheren Arbeit, den $\nu!$-fachen Inhalt des Prismatoides $(0, 1, 2, \ldots, \nu)$ mit $\mathfrak{P}_\nu$, so lassen sich als erste, zweite, ..., $(n-1)$-te Krümmung der Curve die Grössen:

$$\frac{1}{\varrho_1} = \frac{\mathfrak{P}_2}{\mathfrak{P}_1^3\mathfrak{P}_1}, \quad \frac{1}{\varrho_2} = \frac{\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_3}{\mathfrak{P}_2^2\mathfrak{P}_1}, \quad \frac{1}{\varrho_3} = \frac{\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_4}{\mathfrak{P}_3^2\mathfrak{P}_1}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{\varrho_{n-1}} = \frac{\mathfrak{P}_{n-2}\mathfrak{P}_n}{\mathfrak{P}_{n-1}^2\mathfrak{P}_1}$$

definiren, wobei $\mathfrak{P}_1 = (0, 1)$ gleich dem Bogenelemente ds der Curve ist. Zufolge des zuletzt bewiesenen Satzes kann man diese Krümmungen noch in anderer Weise charakterisiren. Die Gleichung (8.) auf das unendlich kleine

Prismatoid $\mathfrak{P}_{\nu+1}$ angewendet, ergiebt nämlich:

$$\mathfrak{P}_{\nu-1}\mathfrak{P}_{\nu+1} = \mathfrak{P}_\nu^2 . d\vartheta_\nu,$$

worin $d\vartheta_\nu$ den unendlich kleinen Winkel bedeutet, welchen die Tangential-$\mathfrak{M}_\nu$ des Punktes P mit derjenigen des consecutiven Punktes P_1 bildet. Daher ist für $\nu = 1, 2, \ldots, n-1$

$$(9.) \qquad \frac{1}{\varrho_\nu} = \frac{\mathfrak{P}_{\nu-1}\mathfrak{P}_{\nu+1}}{\mathfrak{P}_\nu^2\mathfrak{P}_1} = \frac{d\vartheta_\nu}{ds},$$

zwei Ausdrücke, von welchen der erstere direct zur analytischen Darstellung der Krümmungen führt, der zweite den Vorzug geometrischer Anschaulichkeit besitzt.

§ 2.

Wenn wir die Bewegung eines starren Körpers im n-dimensionalen Raume untersuchen wollen, so beziehen wir die Coordinaten eines Punktes des Körpers auf zwei rechtwinklige Systeme, von welchen das erste mit den Axen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ fest im Raume, das zweite mit den Axen $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ fest mit dem Körper verbunden ist. Zwischen beiden Coordinaten bestehen dann die Transformationsgleichungen:

$$(10.) \qquad y_h = x_h + \sum_{i=1}^{n} c_{ih}\eta_i, \qquad (h = 1, 2, \ldots, n)$$

und hier ist das System $C = (c_{hi})$ wiederum ein orthogonales. Erfährt jetzt das starre System eine unendlich kleine Lagenveränderung, so gelten für die Variationen $\delta y_1, \delta y_2, \ldots, \delta y_n$ der Raumcoordinaten y die Gleichungen:

$$(11.) \qquad \delta y_h = \delta x_h + \sum_{i=1}^{n} \delta c_{ih}\eta_i; \qquad (h = 1, 2, \ldots, n)$$

hierin sind aber die Variationen δc_{ih} nicht willkürlich, sondern zufolge der Gleichung $CC' = E$, resp. $C'C = E$ sind die Variationen an die Bedingungen gebunden

$$(12.) \qquad C.\delta C' + \delta C.C' = 0 \quad \text{resp.} \quad C'.\delta C + \delta C'.C = 0.$$

Die Variationen δy_h sind lineare Functionen der Grössen η, also nach (10.) auch lineare Functionen der Coordinaten y_h selbst; man kann aber auch die Lagenveränderung des Körpers auf das veränderliche Coordinatensystem der η beziehen, und dann sind die Variationen der η mit den Variationen der y durch die Gleichungen verbunden:

$$(13.) \qquad \delta y_h = \sum_i c_{ih}\delta\eta_i, \quad \delta\eta_h = \sum_i c_{hi}\delta y_i. \qquad (h, i = 1, 2, \ldots, n)$$

Mit Einführung der Bezeichnungen:

$$(14.) \qquad p_{gh} = \sum_i \delta c_{ih} c_{ig}, \quad q_{gh} = \sum_i \delta c_{gi} c_{hi}, \quad \delta\xi_h = \sum_i c_{hi}\delta x_i \qquad (g, h, i = 1, 2, \ldots, n)$$

erhält man so:

$$(15.)\qquad \delta y_h = \delta x_h + \sum_g p_{gh}(y_g - x_g).$$

$$(15^a.)\qquad \delta\eta_h = \delta\xi_h + \sum_g q_{gh}\eta_g. \qquad (g, h = 1, 2, \ldots, n)$$

Bezeichnet man ferner die Systeme (p_{gh}) und (q_{gh}) mit P und Q, (wobei aber *in den Systemen* stets der erste Index die Zeile, der zweite die Colonne angiebt), so gelten mit Rücksicht auf (12.) die Compositionsgleichungen:

$$(16.)\qquad \begin{cases} P = C'.\delta C = -\delta C'.C = -P', \\ Q = \delta C.C' = -C.\delta C' = -Q', \\ Q = CPC', \qquad P = C'QC; \end{cases}$$

die Systeme P und Q sind also *alternirend* und enthalten $\frac{1}{2}n(n-1)$ unabhängige Grössen, durch welche sich umgekehrt die Variationen δc_{gk} linear und homogen ausdrücken lassen.

Die geometrische Deutung der Gleichungen (15.), resp. (15ª.) ist, wie man weiss, folgende: Jede unendlich kleine Lagenveränderung eines starren Systemes kann in eine Parallel-Verschiebung und in eine Rotation um einen festen Punkt zerlegt werden; die letztere wird durch die $\frac{1}{2}n(n-1)$ Rotationscomponenten q_{gh} (resp. p_{gh}) bestimmt und kann daher als aus $\frac{1}{2}n(n-1)$ Elementarrotationen zusammengesetzt angesehen werden, bei welchen alle Grössen des Systemes Q bis auf eine verschwinden. Ist q_{gh} die einzige von Null verschiedene Grösse des Systemes, so bleiben alle Axen des Systemes der η ausser den Axen η_g und η_h fest; die Ebene der Axen η_g und η_h rotirt aber um den Anfangspunkt um den unendlich kleinen Winkel q_{gh}, und zwar wenn q_{gh} positiv ist, in derjenigen Richtung, in welcher die Axe η_g durch einen rechten Winkel in die Axe η_h übergeführt wird.

Für unsere Zwecke sind die Gleichungen (15ª.), die die Bewegung auf das veränderliche Coordinatensystem der η beziehen, die wichtigen. Construirt man nämlich in den beiden benachbarten Punkten P und P_1 das im vorigen Paragraphen beschriebene Coordinatensystem der $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$, welches durch die Tangentialmannigfaltigkeiten der Curve indicirt wird, so ist der Uebergang vom ersten System zum zweiten eine Bewegung eines starren Systems; wir stellen uns die Aufgabe, die Grössen $\delta\xi_h$ und q_{gh} direct zu bestimmen. Was zunächst die Variationen $\delta\xi_h$ angeht, so ist, da das Coordinatensystem der η in der Richtung der Curventangente η_1 um die Strecke ds verschoben wird,

$$(17.)\qquad \delta\xi_1 = ds, \quad \delta\xi_2 = 0, \quad \delta\xi_3 = 0, \quad \ldots, \quad \delta\xi_n = 0.$$

Gehen wir sodann zur Bestimmung der Rotationscomponenten q_{gh} über, so erkennen wir zunächst, dass von dem alternirenden Systeme Q alle Elemente verschwinden mit Ausnahme derjenigen, welche unmittelbar über oder unter der Diagonalreihe stehen, für welche also die Differenz der beiden Indices gleich ± 1 ist. In der That, bezeichnen wir in Uebereinstimmung mit den Ausführungen des § 1 die Richtungscosinus der Axe η_g in Beziehung auf ein im Raume festes Coordinatensystem mit $c_{g1}, c_{g2}, \ldots, c_{gn}$, so ist η_g zu den Axen $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{g-1}$ senkrecht, also gelten die Gleichungen:

$$\sum_i c_{gi} c_{1i} = 0, \quad \sum_i c_{gi} c_{2i} = 0, \quad \ldots, \quad \sum_i c_{gi} c_{g-1,i} = 0.$$

Daher ist auch η_g der Reihe nach zu den Seiten des unendlich kleinen Prismatoides $PP_1, P_1P_2, \ldots, P_{g-2}P_{g-1}$ senkrecht, und es ist also

$$\sum_i c_{gi} dc_{1i} = 0, \quad \sum_i c_{gi} dc_{2i} = 0, \quad \ldots, \quad \sum_i c_{gi} dc_{g-2,i} = 0,$$

d. h. es ist nach (14.) $q_{1g}, q_{2g}, \ldots, q_{g-2,g} = 0$, wie es behauptet wurde. Hiernach sind von den Grössen q_{gh} $(g < h)$ $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ gleich Null und nur die $(n-1)$ Elemente $q_{12}, q_{23}, q_{34}, \ldots, q_{n-1,n}$ sind von Null verschieden. Um diese zu bestimmen, berücksichtigen wir, dass die Tangential-$\mathfrak{M}_\nu$ $(0, 1, 2, \ldots, \nu)$ des Punktes P bei der Bewegung in die Tangential-$\mathfrak{M}_\nu$ $(1, 2, \ldots, \nu, \nu+1)$ des Punktes P_1 übergeführt wird, also eine Drehung um die Tangential-$\mathfrak{M}_{\nu-1}$ des Punktes P_1, und zwar um den Winkel $d\vartheta_\nu$ erfährt. Für einen Punkt jener Tangential-$\mathfrak{M}_\nu$ ist $\eta_{\nu+1} = \eta_{\nu+2} = \cdots = \eta_n = 0$, und die Gleichungen (15ᵃ.) werden also:

$$\begin{aligned}
\delta\eta_1 &= ds + q_{21}\eta_2, \\
\delta\eta_2 &= q_{12}\eta_1 + q_{32}\eta_3, \\
\delta\eta_3 &= q_{23}\eta_2 + q_{43}\eta_4, \\
&\cdots\cdots \\
\delta\eta_{\nu-1} &= q_{\nu-2,\nu-1}\eta_{\nu-2} + q_{\nu,\nu-1}\eta_\nu, \\
\delta\eta_\nu &= q_{\nu-1,\nu}\eta_{\nu-1}, \\
\delta\eta_{\nu+1} &= q_{\nu,\nu+1}\eta_\nu, \\
\delta\eta_{\nu+2} &= \delta\eta_{\nu+3} = \cdots = \delta\eta_n = 0.
\end{aligned}$$

Betrachten wir also den auf der Axe η_ν in der Entfernung 1 gelegenen Punkt, so erfährt derselbe, *senkrecht zur* $\mathfrak{M}_\nu$, die Ablenkung $\delta\eta_{\nu+1} = q_{\nu,\nu+1}$, und man hat hiernach mit Berücksichtigung der Formel (9.):

$$q_{\nu,\nu+1} = d\vartheta_\nu = \frac{ds}{\varrho_\nu}. \tag{18.}$$

Die Gleichungen (15*.) nehmen also in unserem Falle die Gestalt an:

$$(19.)\quad \begin{cases} \dfrac{d\eta_1}{ds} = 1+\dfrac{1}{\varrho_1}\eta_2, \\ \dfrac{d\eta_2}{ds} = -\dfrac{1}{\varrho_1}\eta_1+\dfrac{1}{\varrho_2}\eta_3, \\ \dfrac{d\eta_3}{ds} = -\dfrac{1}{\varrho_2}\eta_2+\dfrac{1}{\varrho_3}\eta_4, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \dfrac{d\eta_{n-1}}{ds} = -\dfrac{1}{\varrho_{n-2}}\eta_{n-2}+\dfrac{1}{\varrho_{n-1}}\eta_n, \\ \dfrac{d\eta_n}{ds} = -\dfrac{1}{\varrho_{n-1}}\eta_n, \end{cases}$$

und es gilt der Satz:

Die unendlich kleine Bewegung, welche ein zu einem Curvenpunkte gehöriges rechtwinkliges Axensystem in das benachbarte überführt, besteht in einer Translation in tangentialer Richtung um die Grösse des Bogenelementes und in einer Rotation, welche in nur $(n-1)$ *Elementarrotationen zerlegt werden kann. Bei diesen Elementarrotationen rotiren successive die Axen* $\overline{12}$, $\overline{23}$, $\overline{34}$, ..., $\overline{n-1,n}$, *während die übrigen Axen festbleiben, und zwar mit einer Geschwindigkeit, welche successive gleich der ersten, zweiten, ...,* $(n-1)$*-ten Krümmung ist. In dem die Rotation charakterisirenden alternirenden System verschwinden daher alle Elemente mit Ausnahme derjenigen, welche unmittelbar über und unter der Diagonale stehen, so dass z. B. für* $n=4$ *ist:*

$$(q_{gh}) = \begin{pmatrix} 0 & +\dfrac{ds}{\varrho_1} & 0 & 0 \\ -\dfrac{ds}{\varrho_1} & 0 & +\dfrac{ds}{\varrho_2} & 0 \\ 0 & -\dfrac{ds}{\varrho_2} & 0 & +\dfrac{ds}{\varrho_3} \\ 0 & 0 & -\dfrac{ds}{\varrho_3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Die *Frenet-Serret*schen Formeln ergeben sich jetzt als unmittelbare Folgerung; aus dem zweiten Systeme der Relationen (14.) folgt nämlich:

$$\delta c_{\nu g} = \sum_h c_{hg} q_{\nu h}, \qquad (\nu, g, h = 1, 2, \ldots, n)$$

also in unserem Falle:

$$(20.)\qquad \frac{dc_{\nu g}}{ds} = -\frac{c_{\nu-1,g}}{\varrho_{\nu-1}} + \frac{c_{\nu+1,g}}{\varrho_\nu}, \qquad (\nu, g = 1, 2, \ldots, n)$$

wobei ϱ_0 und ϱ_n gleich ∞ zu setzen ist. Das sind gerade die Formeln ($\mathfrak{K}$.) der früheren Arbeit.

Die Besonderheiten, welche die hier charakterisirte Bewegung gegenüber der allgemeinen Bewegung eines starren Systemes aufweist und welche in der Erfüllung der Gleichungen:

$$\delta\xi_2 = 0, \quad \delta\xi_3 = 0, \quad \ldots, \quad \delta\xi_n = 0,$$
$$q_{hg} = 0, \quad \text{falls} \quad |h-g| \neq 1,$$

bestehen, genügen, um die Bewegung als diejenige des Axensystemes einer Raumcurve zu charakterisiren. Denn wenn die Gleichungen (19.) wirklich erfüllt sind, so beschreibt der Anfangspunkt des Coordinatensystemes der η eine Raumcurve und wird in der Richtung der Axe η_1 um die Strecke ds verschoben; daher ist η_1 Tangente der Raumcurve. Die Gerade η_1 wird zufolge Gleichungen (19.) in der Ebene (0, 1, 2) verschoben, daher ist diese Ebene, d. i. die Ebene der Axen η_1 und η_2, die Tangential-$\mathfrak{M}_2$ der Raumcurve. Ebenso wird die $\mathfrak{M}_\nu$ der Axen $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_\nu$, d. i. die Mannigfaltigkeit $(0, 1, 2, \ldots, \nu)$ in der Mannigfaltigkeit $(0, 1, \ldots, \nu, \nu+1)$ verschoben; daher ist sie die Tangential-$\mathfrak{M}_\nu$ der Curve und die Rotationsgeschwindigkeit $\frac{1}{\varrho_\nu}$ ist die νte Krümmung der Curve.

Heidelberg, April 1896.

Ueber die Fundamentaltheiler eines Gattungsbereiches in Bezug auf zwei verschiedene Rationalitätsbereiche.

(Von Herrn *Kurt Hensel.*)

Es sei $\mathfrak{G}(y_1)$ ein beliebiger Gattungsbereich $n$ter Ordnung, welcher einem gegebenen rationalen oder algebraischen Rationalitätsbereiche Γ entstammt. Ist ferner $(y_1^{(1)}, y_1^{(2)}, \dots, y_1^{(m)})$ ein Fundamentalsystem für $\mathfrak{G}_1$, so sind alle ganzen Grössen von $\mathfrak{G}_1$ in der Form

$$u_1 y_1^{(1)} + u_2 y_1^{(2)} + \cdots + u_m y_1^{(m)}$$

enthalten, deren Coefficienten $u_1, \dots, u_m$ ganze Grössen des Rationalitätsbereiches Γ sind. Die Discriminante D der Gattung $\mathfrak{G}_1$ ist dann gleich dem Producte der Quadrate aller Elementartheiler $E_1, E_2, \dots, E_n$ der Matrix $(y_k^{(i)})$ von mn Elementen, welche aus den n conjugirten Fundamentalsystemen $(y_i^{(1)}, \dots, y_i^{(m)})$ gebildet sind; diese Elementartheiler wurden in einer soeben veröffentlichten Arbeit*) bestimmt.

Es werde nun derselbe Gattungsbereich, jedoch innerhalb eines erweiterten Rationalitätsbereiches $\bar{\Gamma}$ betrachtet, welcher aus Γ dadurch hervorgeht, dass man ausser der algebraischen Grösse ξ, durch welche Γ erzeugt wird, noch irgend eine andere algebraische Grösse $\bar{\xi}$ als rational ansieht; der neue Bereich besteht also aus allen rationalen Functionen von ξ und $\bar{\xi}$ mit rationalen Coefficienten. Um den jedesmal betrachteten Rationalitätsbereich deutlich zu bezeichnen, soll derselbe zu dem Gattungsbereich $\mathfrak{G}_1$ hinzugefügt, dieser also je nach dem gewählten Rationalitätsbereiche Γ oder $\bar{\Gamma}$ bezw. durch

$$(\mathfrak{G}_1;\ \Gamma) \quad \text{oder} \quad (\mathfrak{G}_1;\ \bar{\Gamma})$$

bezeichnet werden. Im allgemeinen reducirt sich dann die Ordnung n von

---

*) *K. Hensel:* „Ueber die Fundamentaltheiler algebraischer Gattungsbereiche"; dieses Journal Bd. 117 S. 333—345.

$\mathfrak{G}_1$ für diesen erweiterten Rationalitätsbereich $\bar{\Gamma}$, denn für ihn bleiben nicht mehr alle Bereiche $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_n$ conjugirt; es möge sich die Ordnung von $(\mathfrak{G}_1; \bar{\Gamma})$ von n auf ν reduciren, und die Bezeichnung sei so gewählt, dass die ν Bereiche $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_\nu$ für $\bar{\Gamma}$ conjugirt bleiben. Ist nun

$$\bar{y}_1^{(1)},\quad \bar{y}_1^{(2)},\quad \ldots,\quad \bar{y}_1^{(\mu)}$$

ein Fundamentalsystem für $(\mathfrak{G}_1; \bar{\Gamma})$ und sind $(\bar{y}_h^{(1)}, \ldots, \bar{y}_h^{(\mu)})$ für $(h = 1, 2, \ldots, \nu)$ die zu ihm conjugirten Systeme, so kann man genau wie vorher die Elementartheiler $\bar{E}_1, \ldots, \bar{E}_\nu$ und die Discriminante $\bar{D}$ von $(\mathfrak{G}_1; \bar{\Gamma})$ bestimmen, und ich stelle mir jetzt die folgende Aufgabe:

> Es sollen die Beziehungen angegeben werden, welche zwischen den Elementartheilern und den Gattungsdiscriminanten von $(\mathfrak{G}_1; \bar{\Gamma})$ und $(\mathfrak{G}_1; \Gamma)$ bestehen, unter der Voraussetzung, das Γ unter $\bar{\Gamma}$ enthalten ist.

Eine einfachste Beziehung zwischen den Elementartheilern $(E_1, \ldots, E_n)$ und $(\bar{E}_1, \ldots, \bar{E}_\nu)$ von $(\mathfrak{G}_1; \Gamma)$ und $(\mathfrak{G}_1; \bar{\Gamma})$ kann unmittelbar angegeben werden, falls $n = \nu$ ist, falls sich also die Ordnung von $\mathfrak{G}_1$ unter Adjunction von $\bar{\Gamma}$ nicht reducirt. Dann ist nämlich das System $(y_i^{(1)}, \ldots, y_i^{(m)})$ ein Vielfaches des Systemes $(\bar{y}_i^{(1)}, \ldots, \bar{y}_i^{(\mu)})$, weil die ganzen Grössen $y_1^{(1)}, \ldots, y_1^{(m)}$ homogen und linear durch das Fundamentalsystem $(\bar{y}_1^{(1)}, \ldots, \bar{y}_1^{(\mu)})$ mit ganzen Grössen des Bereiches $\bar{\Gamma}$ darstellbar sind, und weil dieselbe Darstellung bestehen bleibt, wenn man von $\mathfrak{G}_1$ zu den conjugirten Gattungen $\mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_n$ übergeht. Also sind auch $E_1, E_2, \ldots, E_n$ bezw. Vielfache von $\bar{E}_1, \ldots, \bar{E}_n$ und man erhält daher den Satz:

> Die Elementartheiler des Gattungsbereiches $(\mathfrak{G}_1; \Gamma)$ sind Vielfache der entsprechenden Elementartheiler von $(\mathfrak{G}_1; \bar{\Gamma})$, falls sich die Ordnung von $\mathfrak{G}_1$ unter Adjunction von $\bar{\Gamma}$ nicht reducirt.

Hieraus folgt als ein specielles Corollar:

> Die Gattungsdiscriminante $\bar{D}$ von $(\mathfrak{G}_1; \bar{\Gamma})$ ist ein Theiler der Discriminante derselben Gattung für einen unter $\bar{\Gamma}$ enthaltenen Rationalitätsbereich Γ falls die Ordnung von $\mathfrak{G}$ beim Uebergange von $\bar{\Gamma}$ zu Γ ungeändert bleibt.

Reducirt sich aber die Ordnung von $\mathfrak{G}_1$ unter Adjunction von $\bar{\Gamma}$ von n auf ν und bleiben alsdann $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_\nu$ conjugirt, so gilt der obige

Ist $y_1^{(1)}, \ldots, y_1^{(n)}$ ein kanonisches System modulo P für den Bereich $(\mathfrak{G}_1; \Gamma)$ und $\bar{P}$ irgend ein Primfactor von P innerhalb $\bar{\Gamma}$, so kann man aus jenem Systeme ein solches $y_1^{(1)}, \ldots, y_1^{(\nu)}$ von nur ν Elementen so auswählen, dass in dem System von ν^2 Elementen

$$\begin{pmatrix} y_1^{(1)}, & \ldots, & y_1^{(\nu)} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ y_\nu^{(1)}, & \ldots, & y_\nu^{(\nu)} \end{pmatrix}$$

die Colonnentheiler, soweit sie Potenzen von $\bar{P}$ sind mit den Elementartheilern übereinstimmen.

Zunächst ist nämlich das System von n^2 Elementen:

$$(1.) \qquad \left(\frac{y_k^{(i)}}{P^{r_i}}\right) \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

modulo P, also auch modulo $\bar{P}$ ein Einheitssystem. Betrachtet man also die aus seinen ν ersten Zeilen bestehende Matrix

$$\left(\frac{y_i^{(1)}}{P^{r_1}}, \frac{y_i^{(2)}}{P^{r_2}}, \ldots, \frac{y_i^{(n)}}{P^{r_n}}\right), \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu)$$

so haben auch seine Determinanten νter Ordnung mit P nicht einen und denselben gemeinsamen Theiler, weil dieser sonst in der Determinante des Systemes (1.) enthalten sein müsste. Da aber jene Determinanten rational in $\bar{\Gamma}$ sind, abgesehen von ihren Nennern, die gebrochene Potenzen von P sind, so muss mindestens eine von ihnen, etwa die erste, durch $\bar{P}$ garnicht mehr theilbar, also ein Einheitssystem modulo $\bar{P}$ sein, und hieraus folgt in der That, dass in dem zugehörigen Systeme von ν^2 Elementen $(y_i^{(1)}, \ldots, y_i^{(\nu)})$ die Colonnentheiler $P^{r_1}, \ldots, P^{r_\nu}$ soweit sie Potenzen von $\bar{P}$ sind, mit den Elementartheilern übereinstimmen. Also sind diese Elementartheiler bezw.:

$$\bar{P}^{dr_1}, \quad \bar{P}^{dr_2}, \quad \ldots, \quad \bar{P}^{dr_\nu}.$$

Das so erhaltene System $(y_1^{(1)}, \ldots, y_1^{(\nu)})$ ist aber noch kein kanonisches Fundamentalsystem modulo $\bar{P}$, weil seine Elementartheiler keine Potenzen von $\bar{P}$ mit *echt* gebrochenen Exponenten sind. Ein solches erhält man erst, wenn man jedes Element noch durch die grösste in ihm enthaltene ganzzahlige Potenz von $\bar{P}$ dividirt. Bedeutet also $[dr_i]$ die grösste in dem Bruche dr_i enthaltene ganze Zahl, so ist das System:

$$\frac{y^{(1)}}{\bar{P}^{[dr_1]}}, \quad \ldots, \quad \frac{y^{(\nu)}}{\bar{P}^{[dr_\nu]}}$$

ein kanonisches Fundamentalsystem modulo $\bar{P}$ und seine Colonnentheiler

$$\bar{P}^{dr_i - [dr_i]} = \bar{P}^{R(dr_i)}$$

ergeben die gesuchten Elementartheiler, soweit sie Potenzen von $\bar{P}$ sind. Man erhält also den Satz:

Sind $(P^{r_1}, P^{r_2}, \ldots, P^{r_n})$ die n auf P bezüglichen Elementartheiler von $(\mathfrak{G}; \bar{\Gamma})$, ist ferner $\bar{P}$ ein d-facher Primtheiler von P für den Bereich $\bar{\Gamma}$ und $\bar{P}^{\varrho_1}, \ldots, \bar{P}^{\varrho_\nu}$ die auf $\bar{P}$ bezüglichen Elementartheiler von $(\mathfrak{G}_1; \bar{\Gamma})$, so ist allgemein:

$$\varrho_i = R(dr_{h_i}), \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu)$$

wo $r_{h_1}, r_{h_2}, \ldots, r_{h_\nu}$ gewisse ν unter den n Exponenten $(r_1, \ldots, r_n)$ sind und die $R(dr_{h_i})$ die kleinsten nicht negativen Reste der Brüche dr_{h_i} bedeuten.

Aber auch hier besteht zwischen den Elementartheilern von $(\mathfrak{G}_1; \Gamma)$ und $(\mathfrak{G}_1; \bar{\Gamma})$ eine noch viel engere Beziehung. Um diese darzulegen, betrachten wir zunächst den einfachsten, aber auch wichtigsten Fall, dass die Ordnungen n und ν von $(\mathfrak{G}_1; \Gamma)$ und $(\mathfrak{G}_1; \bar{\Gamma})$ gleich sind, dass sich also die Ordnung von $\mathfrak{G}_1$ unter Adjunction von $\bar{\Gamma}$ nicht reducirt. Dann sind die Exponenten $(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n)$ von $\bar{P}$, die in den Elementartheilern von $(\mathfrak{G}_1; \bar{\Gamma})$ enthalten sind, gleich den kleinsten Resten *aller* Brüche $(dr_1, dr_2, \ldots, dr_n)$. Andererseits lassen sich aber, wie in der mehrfach erwähnten Arbeit bewiesen wurde, die echten Brüche $(r_1, \ldots, r_n)$ in Sequenzen:

$$\left[\frac{1}{d_1}\right], \ \left[\frac{1}{d_2}\right], \ \ldots, \ \left[\frac{1}{d_t}\right]$$

anordnen, und ein Gleiches muss nach demselben Satze auch für die kleinsten Reste der Exponenten $(dr_1, \ldots, dr_n)$ der Fall sein. Dies ist auch wirklich der Fall, und man kann leicht die zu einer Sequenz $\left(\frac{0}{d_i}, \frac{1}{d_i}, \ldots, \frac{d_i - 1}{d_i}\right)$ gehörigen Sequenzen der Reihe (dr_h) aufstellen. In der That bilden die kleinsten Reste der Producte:

$$\left(\frac{0.d}{d_i}, \ \frac{1.d}{d_i}, \ \ldots, \ \frac{(d_i - 1)d}{d_i}\right)$$

offenbar die Reihe aller echten Brüche mit dem Nenner $\frac{d_i}{(d, d_i)}$, wenn (d, d_i) den grössten gemeinsamen Theiler von d und d_i bedeutet; jeder dieser

Brüche tritt aber genau (d, d_i)-mal auf. Also entsprechen den s Sequenzen

$$\left[\frac{1}{d_1}\right];\ \left[\frac{1}{d_2}\right];\ \ldots,\ \left[\frac{1}{d_s}\right],$$

welche zu dem Primtheiler P für den Bereich $(\mathfrak{G}_1; \Gamma)$ gehören, die Sequenzen:

$$(d,\ d_1)\left[\frac{1}{\frac{d_1}{(d,d_1)}}\right],\ (d,\ d_2)\left[\frac{1}{\frac{d_2}{(d,d_2)}}\right];\ \ldots,\ (d,\ d_s)\left[\frac{1}{\frac{d_s}{(d,d_s)}}\right]$$

für den Primtheiler $\bar{P}$ des Bereiches $\bar{\Gamma}$, wenn P genau durch die $d$te Potenz von $\bar{P}$ theilbar ist. Die Anzahl $\bar{s}$ der zu $\bar{P}$ gehörigen Sequenzen ist also durch die Gleichung gegeben:

$$\bar{s} = (d,\ d_1)+(d,\ d_2)+\cdots+(d,\ d_s);$$

es ist also stets

$$\bar{s} \geqq s,$$

und zwar ist dann und nur dann $\bar{s} = s$, wenn d theilerfremd zu allen s Nennern $(d_1, d_2, \ldots, d_s)$ der zu P gehörigen Sequenzen ist. Nun sind die Discriminanten der Gattungen $(\mathfrak{G}_1; \Gamma)$ und $(\mathfrak{G}_1; \bar{\Gamma})$ bezw. durch

$$P^{n-s} \quad \text{und} \quad \bar{P}^{n-\bar{s}},$$

oder, da P die Potenz $\bar{P}^d$ enthält, genau durch

$$\bar{P}^{d(n-s)} \quad \text{und} \quad \bar{P}^{n-\bar{s}}$$

theilbar; hieraus ergiebt sich also der Satz:

Sind D und $\bar{D}$ die Discriminanten der Gattungen $(\mathfrak{G}_1; \Gamma)$ und $(\mathfrak{G}_1; \bar{\Gamma})$ so ist D durch $\bar{D}^d$ theilbar für alle diejenigen Primtheiler $\bar{P}$ von $\bar{\Gamma}$ deren Exponent d in Bezug auf Γ gleich oder grösser ist als d; und diese untere Grenze für D wird dann und nur dann erreicht, wenn der Exponent d zu den Nennern aller zugehörigen Sequenzen von $(\mathfrak{G}_1; \Gamma)$ theilerfremd ist.

Man erkennt hieraus, dass die Gattungsdiscriminante D durch die Adjunction von $\bar{\Gamma}$ dann und nur dann nicht reducirt wird, wenn $d = 1$ ist, wenn also P nur die erste Potenz von $\bar{P}$ enthält, denn dann ist auch $s = \bar{s}$. Gilt dasselbe für *alle* Primfactoren von P für den Bereich $\bar{\Gamma}$, so enthalten D und $\bar{D}$ P genau gleich oft, in jedem anderen Falle ist $\bar{D}$ ein *eigentlicher* Theiler von D. Dieser Fall tritt bekanntlich dann und nur dann ein, wenn die Discriminante der Gattung $\bar{\Gamma}$ in Bezug auf den Rationalitäts-

bereich Γ oder also die Discriminante der Gattung $(\bar{\Gamma}; \Gamma)$ durch P nicht theilbar ist. Es ergiebt sich also der folgende Satz:

Adjungirt man dem Gattungsbereiche $(\mathfrak{G}_1; \Gamma)$ den Rationalitätsbereich $\bar{\Gamma}$, so reducirt sich die Discriminante jener Gattung für alle die und nur die Primfactoren P, welche in der Discriminante des adjungirten Gattungsbereiches $\bar{\Gamma}$ enthalten sind.

Endlich werde die Frage beantwortet, wie der neue Rationalitätsbereich $\bar{\Gamma}$ zu wählen ist, damit die Discriminante von $(\mathfrak{G}_1; \bar{\Gamma})$ den Primfactor P garnicht mehr enthalte. Hierzu ist nothwendig und hinreichend, dass für jeden Primfactor $\bar{P}$ von P der Exponent d ein gemeinsames Multiplum aller Sequenzennenner $d_1, d_2, \ldots, d_s$ ist. Ist also

$$P \sim \bar{P}_1^{\delta_1} \bar{P}_2^{\delta_2} \ldots \bar{P}_\varrho^{\delta_\varrho}$$

die Zerlegung von P in seine Primfactoren innerhalb $\bar{\Gamma}$, so müssen die Exponenten $\delta_1, \ldots, \delta_\varrho$ sämmtlich gemeinsame Multipla von $d_1, \ldots, d_s$ sein. Ist N die Ordnung des adjungirten Gattungsbereiches $(\bar{\Gamma}; \Gamma)$ und sind $k_1, \ldots, k_\varrho$ die Ordnungszahlen der ϱ Primfactoren, so ist

$$N = k_1 \delta_1 + \cdots + k_\varrho \delta_\varrho.$$

Man erhält also den Gattungsbereich $\bar{\Gamma}$ niedrigster Ordnung N, der nothwendig und hinreichend ist, um D von dem Primfactor P zu befreien, wenn man, falls dies möglich ist:

$$\varrho = 1, \quad k_1 = 1, \quad \delta_1 = m \quad \text{also} \quad N = m$$

wählt, wo m das kleinste gemeinsame Vielfache der Exponenten $d_1, \ldots, d_s$ bedeutet. Diese Wahl ist aber stets möglich, denn durch die reine Gleichung:

$$\bar{\xi}^m = P$$

wird ein Gattungsbereich mit den verlangten Eigenschaften definirt. Man erhält also den Satz:

Ist die Discriminante der Gattung $\mathfrak{G}_1$ durch eine irreductible Function P theilbar, so ist die algebraische Irrationalität $\bar{\xi} = \sqrt[m]{P}$ diejenige niedrigster Ordnung, durch deren Adjunction die Discriminante von P befreit werden kann, wenn m das kleinste gemeinsame Vielfache der Exponenten der Primfactoren von P innerhalb $\mathfrak{G}$ ist.

Mit Hülfe dieses Satzes kann man die Discriminante einer beliebig gegebenen Gattung $\mathfrak{G}_1$ durch Erweiterung des Rationalitätsbereiches voll-

§ 4.

Erweitert man den Rationalitätsbereich Γ einer Gattung $\mathfrak{G}_1$ $n$ter Ordnung durch Adjunction einer algebraischen Grösse $\bar{\xi}$, so ist es möglich, dass die n zu $\mathfrak{G}_1$ conjugirten Bereiche $\mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_n$ auch in dem neuen Rationalitätsbereiche conjugirt bleiben. Der allgemeinste Fall ist aber der, dass nur gewisse unter jenen n Bereichen conjugirt bleiben. Es möge nun die Bezeichnung von vornherein so gewählt sein, dass für den Rationalitätsbereich $\bar{\Gamma}$ von den n Bereichen $\mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_n$ nur die ν_1 ersten $(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_{\nu_1})$ zu $\mathfrak{G}_1$ conjugirt bleiben; ebenso mögen die ν_2 folgenden $(\mathfrak{G}_{\nu_1+1}, \ldots, \mathfrak{G}_{\nu_1+\nu_2})$ conjugirt sein u. s. w., bis endlich die ν_g letzten Bereiche ebenfalls für $\bar{\Gamma}$ conjugirt erscheinen. Ist dann y_1 irgend eine algebraische Grösse von $\mathfrak{G}_1$ und $F(y) = 0$ die Gleichung $n$ten Grades der die n conjugirten Grössen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ genügen, so ergiebt sich bei Adjunction des Bereiches $\bar{\Gamma}$ eine Zerlegung

$$F(y) = F_{\nu_1}(y, \bar{\Gamma}).F_{\nu_2}(y; \bar{\Gamma})\ldots F_{\nu_g}(y, \bar{\Gamma}),$$

in welcher allgemein F_{ν_i} vom Grade ν_i ist und von den n conjugirten Grössen y_h diejenigen der $i$ten Abtheilung als Wurzeln hat.

Betrachtet man nun die g Gattungsbereiche

$$\mathfrak{G}_1, \quad \mathfrak{G}_{\nu_1+1}, \quad \mathfrak{G}_{\nu_1+\nu_2+1}, \quad \ldots, \quad \mathfrak{G}_{\nu_1+\cdots+\nu_{g-1}+1},$$

welche innerhalb $\bar{\Gamma}$ bezw. von der Ordnung

$$\nu_1, \quad \nu_2, \quad \nu_3, \quad \ldots, \quad \nu_g$$

sind, so besitzt jeder von ihnen ein bestimmtes System von Elementartheilern und eine bestimmte Gattungsdiscriminante; die letzteren mögen der Reihe nach durch

$$D_1, \quad D_2, \quad D_3, \quad \ldots, \quad D_g$$

bezeichnet werden und es bedeuten:

$$E_1^{(1)}, \ \ldots, \ E_{\nu_1}^{(1)}; \ E_1^{(2)}, \ \ldots, \ E_{\nu_2}^{(2)}; \ \ldots, \ E_1^{(g)}, \ \ldots, \ E_{\nu_g}^{(g)}$$

die Elementartheiler jener g Gattungen. Es sei nun D die Gattungsdiscriminante von $(\mathfrak{G}_1; \Gamma)$ und $E_1, E_2, \ldots, E_n$ ihre Elementartheiler, so sind die Elementartheiler $E_k^{(i)}$ und die Partialdiscriminanten D_i von den Elementartheilern E_i und der Discriminante D für den Bereich Γ und ausserdem von dem adjungirten Bereiche $\bar{\Gamma}$ abhängig, und die bisher durchgeführten Betrachtungen können dazu benutzt werden, um diese Abhängigkeit nunmehr vollständig anzugeben.

Es sei nämlich wieder P ein rationaler Primfactor innerhalb Γ und $(y_1^{(1)}, y_1^{(2)}, \dots, y_1^{(n)})$ ein kanonisches Fundamentalsystem modulo P für $\mathfrak{G}_1$ und zwar mögen

$$P^{r_1},\quad P^{r_2},\quad \dots,\quad P^{r_n}$$

die Potenzen von P sein, welche in den Elementen $(y_1^{(h)})$ oder, was dasselbe ist, in den Elementartheilern $E_1, \dots, E_n$ enthalten sind. Ich betrachte nun das Einheitssystem modulo P $\left(\frac{y_i^{(h)}}{P^{r_i}}\right)$ und theile dasselbe in g Abschnitte, von denen der erste die ν_1 ersten Zeilen, der zweite die ν_2 folgenden u. s. w., der letzte die ν_r letzten Zeilen enthält, so dass die Zeilen eines jeden dieser g Partialsysteme für den neuen Bereich $\bar{\Gamma}$ conjugirt bleiben. In dieser Eintheilung mögen jene Partialsysteme durch $(S_1, S_2, \dots, S_g)$ bezeichnet werden. Die Determinanten höchster Ordnung eines jeden Partialsystemes S_i sind dann abgesehen von einer im Nenner stehenden gebrochenen Potenz von P rational in $\bar{\Gamma}$ und sie alle sind algebraisch ganz.

Es sei nun wieder $\bar{P}$ einer der Primfactoren von P innerhalb $\bar{\Gamma}$ und d sein Exponent, so dass P genau durch $\bar{P}^d$ theilbar ist. Dann ist das ganze System $S = \left(\frac{y_k^{(i)}}{P^{r_i}}\right)$ auch modulo $\bar{P}$ ein Einheitssystem. Entwickelt man also die Determinante $\varDelta$ desselben nach dem erweiterten *Laplace*schen Determinantensatze in Bezug auf die Partialsysteme $S_1, S_2, \dots, S_g$, so erhält man $\varDelta$ dargestellt als eine Summe

$$\varDelta = \sum_{(i)} \varDelta_1^{(i)} . \varDelta_2^{(i)} . \varDelta_3^{(i)} \dots \varDelta_g^{(i)},$$

in welcher jedesmal $\varDelta_1^{(i)}$ eine Determinante $\nu_1$ter Ordnung von S_1, $\varDelta_2^{(i)}$ eine solche $\nu_2$ter Ordnung von S_2 u. s. w., $\varDelta_g^{(i)}$ eine Determinante $\nu_g$ter Ordnung von S_g bedeutet, und wo in jedem Producte $\varDelta_1^{(i)} \dots \varDelta_g^{(i)}$ keine zwei Partialdeterminanten eine Verticalreihe von $\varDelta$ gemeinsam haben. Da aber $\varDelta$ durch $\bar{P}$ garnicht theilbar ist, so muss mindestens eins der Producte auf der rechten Seite durch $\bar{P}$ nicht theilbar sein; es möge die Bezeichnung der Elemente $(y^{(1)}, \dots, y^{(n)})$ von vorn herein so gewählt sein, dass das erste Product

$$\varDelta_1 \varDelta_2 \dots \varDelta_g$$

$\bar{P}$ nicht enthält, in welchem $\varDelta_1$ aus den ν_1 ersten Colonnen von S_1, $\varDelta_2$ aus den ν_2 folgenden Colonnen von S_2, u. s. w., $\varDelta_g$ aus den ν_g letzten Colonnen von S_g besteht.

Daraus folgt, dass das System:

$$\begin{pmatrix} y_1^{(1)} & y_1^{(2)} & \cdot\cdot & y_1^{(\nu_1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{\nu_1}^{(1)} & y_{\nu_1}^{(2)} & \cdot\cdot & y_{\nu_1}^{(\nu_1)} \end{pmatrix}$$

der ν_1^2 Elemente, welche in Δ_1 vorkommen ein kanonisches System für die ersten ν_1 conjugirten Bereiche $\mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_{\nu_1}$ bilden, und das Entsprechende gilt für die Elemente von $\Delta_2, \ldots, \Delta_g$. Dividirt man also jede der ν_1 Colonnen durch die höchste in ihr enthaltene ganzzahlige Potenz von $\bar{P}$, also bezw. durch

$$\bar{P}^{[dr_1]}, \quad \ldots, \quad \bar{P}^{[dr_{\nu_1}]},$$

so erhält man in dem Systeme:

$$\left(\frac{y_i^{(1)}}{\bar{P}^{[dr_1]}}, \ldots, \frac{y_i^{(\nu_1)}}{\bar{P}^{[dr_{\nu_1}]}}\right) \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu_1)$$

ein kanonisches Fundamentalsystem modulo $\bar{P}$ für $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_{\nu_1}$ und seine Colonnentheiler sind die in den Elementartheilern $E_1^{(1)}, \ldots, E_{\nu_1}^{(1)}$ enthaltenen Potenzen von $\bar{P}$. Also sind:

$$R(dr_1), \quad \ldots, \quad R(dr_{\nu_1})$$

die Exponenten von $\bar{P}$, welche in den Elementartheilern von $\mathfrak{G}_1$ enthalten sind; ebenso sind

$$R(dr_{\nu_1+1}), \quad \ldots, \quad R(dr_{\nu_1+\nu_2}) \quad \text{die auf} \quad \mathfrak{G}_{\nu_1+1}$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$R(dr_{\nu_1+\cdots+\nu_{g-1}+1}), \quad \ldots, \quad R(dr_{\nu_1+\cdots+\nu_g}) \quad \text{die auf} \quad \mathfrak{G}_{\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_{g-1}+1}$$

bezüglichen Exponenten von $\bar{P}$. Man erhält also den Satz:

Sind $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ die in den Elementartheilern eines Bereiches $(\mathfrak{G}_1; \Gamma)$ enthaltenen Potenzen eines rationalen Primfactors P; ist ferner $\bar{P}$ ein d-facher Primtheiler von P für einen höheren Gattungsbereich $\bar{\Gamma}$ und sind $(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n)$ die Exponenten derjenigen Potenzen von $\bar{P}$, welche in den Elementartheilern der n Gattungsbereiche $(\mathfrak{G}_1; \bar{\Gamma}), (\mathfrak{G}_2; \bar{\Gamma}), \ldots, (\mathfrak{G}_n; \bar{\Gamma})$ enthalten sind, mögen diese alle für $\bar{\Gamma}$ conjugirt bleiben oder nicht, so stimmen die echt gebrochenen Exponenten $(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$ mit den kleinsten Resten der n Brüche $(dr_1, dr_2, \ldots, dr_n)$ überein.

Da sich ferner die Exponenten $(r_1, \ldots, r_n)$ und ebenso die g Systeme

$(\varrho_1, \ldots, \varrho_{\nu_1})$, $(\varrho_{\nu_1+1}, \ldots, \varrho_{\nu_1+\nu_2})$, ... jedes für sich in Sequenzen anordnen lassen, so erhält man den weiteren Satz:

Sind $\left(\left[\frac{1}{d_1}\right], \ldots, \left[\frac{1}{d_s}\right]\right)$ die zu P gehörigen Sequenzen für $(\mathfrak{G}_1, \Gamma)$, so bilden die zu $(\mathfrak{G}_1, \bar{\Gamma})$, $(\mathfrak{G}_2, \bar{\Gamma})$, ..., $(\mathfrak{G}_n, \bar{\Gamma})$ gehörigen Exponenten $(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$ von $\bar{P}$ *zusammengenommen* die Sequenzen:

$$(2.)\qquad (d, d_1)\left[\frac{1}{\frac{d_1}{(d, d_1)}}\right], \quad \ldots, \quad (d, d_s)\left[\frac{1}{\frac{d_s}{(d, d_s)}}\right],$$

deren Anzahl $\bar{s}$ durch die Gleichung

$$\bar{s} = \sum_{i=1}^{s} (d, d_i)$$

bestimmt ist.

Hieraus folgt, dass die Discriminante von $(\mathfrak{G}, \Gamma)$ durch P^{n-s}, also durch $\bar{P}^{d(n-s)}$, dass dagegen das Product $D_1 D_2 \ldots D_g$ genau durch $\bar{P}^{n-\Sigma(d, d_i)}$ theilbar ist.

Eine besondere wichtige Consequenz dieses Satzes ist die folgende: Denkt man sich die zu jenen g Discriminanten D_1, D_2, ..., D_g gehörigen Sequenzen der Reihe nach hingeschrieben, so müssen sie, abgesehen von ihrer Reihenfolge, mit den Sequenzen (2.) identisch sein, denn eine einfache Ueberlegung lehrt, dass, falls eine Reihe von echten Brüchen überhaupt in Sequenzen angeordnet werden kann, dies nur auf eine einzige Art möglich ist. Hieraus ergiebt sich endlich der Fundamentalsatz, auf welchen bereits am Ende des vorigen Abschnittes hingewiesen wurde:

Sind $\left[\frac{1}{d_1}\right], \ldots, \left[\frac{1}{d_s}\right]$ die zu P gehörigen Sequenzen in einem Bereiche $(\mathfrak{G}_1; \Gamma)$ und ist $\bar{P}$ ein Primfactor von P innerhalb eines Γ enthaltenden Rationalitätsbereiches $\bar{\Gamma}$, welcher in Bezug auf Γ zum Exponenten d gehört, so sind die zu $\bar{P}$ gehörigen Bruchsequenzen gewisse unter den Sequenzen

$$(d, d_i)\left[\frac{1}{\frac{d_i}{(d, d_i)}}\right], \qquad (i = 1, 2, \ldots, s)$$

und jede dieser $\sum_{i=1}^{s}(d, d_i)$ Sequenzen tritt in einer und nur einer der g Gattungsdiscriminanten D_1, D_2, ..., D_g auf, in welche D unter Adjunction von $\bar{\Gamma}$ zerfällt.

Studien über die Bewegungsvorgänge in der Umgebung instabiler Gleichgewichtslagen.

(Hierzu Tafel I.)

(Zweiter Aufsatz.)

(Von Herrn *Adolf Kneser* in Dorpat.)

Im Anschluss an die Resultate des unter obigem Titel im CXV. Bande dieses Journals veröffentlichten ersten Aufsatzes stellen wir uns nunmehr die folgende Aufgabe. Wenn ein Punkt sich unter der Wirkung conservativer Kräfte in einer Ebene bewegt und eine Lage labilen Gleichgewichts für ihn existirt, in deren Umgebung das Potential eine reguläre analytische Function der rechtwinkligen Coordinaten des Punktes ist, so soll eine möglichst deutliche Uebersicht über die Gesammtheit aller Bewegungen gegeben werden, bei welchen der Punkt sich der Gleichgewichtslage asymptotisch annähert. Dass es solche Bewegungen giebt, steht fest; wir zeigen jetzt, dass das System ihrer Bahncurven unter den nächstliegenden Voraussetzungen in sehr bestimmter Weise geometrisch charakterisirt werden kann, dass es speciell eine gewisse Umgebung der Gleichgewichtslage genau einfach bedeckt. Wir zeigen ferner, dass die wichtigsten sowohl der im ersten Aufsatze enthaltenen wie der auf den folgenden Blättern abzuleitenden Resultate, welche sich auf die Bewegung eines Punktes in der Ebene beziehen, ohne wesentliche Aenderung auf beliebige Probleme mit zwei Graden der Bewegungsfreiheit und conservativen Kräften übertragen werden können. Diesen Uebergang vermittelt das Princip der kleinsten Action in der von *Jacobi* herrührenden Form, welches jedes der in Betracht kommenden mechanischen Probleme auf die Bestimmung geodätischer Linien zurückführt.

§ 1.

Die Wendepunkte der Bahncurven.

Der materielle Punkt P, dessen Masse die Einheit ist, bewege sich, wie früher, in einer Ebene unter der Wirkung einer Kraft, deren Potential

$$U = \tfrac{1}{2}(ax^2+by^2)+\mathfrak{P}(x, y)$$

ist, wobei x und y die rechtwinkligen Coordinaten des Punktes P und $\mathfrak{P}$ eine Potenzreihe sei, deren Glieder in diesen Grössen von mindestens dritter Ordnung sind. Die Constanten a und b seien positiv und

$$a > b. \tag{1.}$$

Bezeichnen dann die Indices x und y die partielle Differentiation nach diesen Grössen, so sind die Bewegungsgleichungen

$$\frac{d^2x}{dt^2} = x'' = U_x, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = y'' = U_y,$$

und der Coordinatenanfangspunkt O ist für P eine Lage labilen Gleichgewichts. Nähert sich P der Lage O asymptotisch, d. h. unbegrenzt, ohne sie je zu erreichen, so nennen wir die Bewegung asymptotisch; bei einer solchen hat nach § 2 des ersten Aufsatzes die Gleichung der lebendigen Kraft die Form

$$x'^2+y'^2 = 2U.$$

Die Grössen x und y sind analytische Functionen der Zeit, welche sich für alle reellen, oberhalb einer gewissen Grenze liegenden Werthe von t regulär verhalten; ihre Ableitungen x' und y' verschwinden, wie a. a. O. näher erörtert ist, von einem gewissen Zeitpunkte an niemals gleichzeitig, sodass der Punkt P dann eine Bahn durchläuft, welche stets eine bestimmte, sich stetig ändernde Tangente besitzt.

Auf diese Curve wenden wir eine von *Staudt**) in die Geometrie eingeführte Anschauungsweise an, indem wir auf den Sinn achten, in welchem die Tangente sich dreht, während der Punkt P in seiner Bahn fortschreitet. Der positive Drehungssinn sei derjenige, in welchem die positive x-Axe einen rechten Winkel beschreiben muss, um in die positive y-Axe überzugehen. Von irgend zwei Halbgeraden oder Richtungen r_1 und r_2, die wir uns etwa von O ausgehend denken können, sei die zweite gegen die erste im positiven oder negativen Sinne gedreht, je nachdem eine von O ausgehende Halbgerade, welche von r_1 ausgehend in die Lage r_2 durch den von r_1 und r_2 gebildeten concaven Winkel hindurch übergeführt wird, sich im positiven oder negativen Sinne dreht. Analytisch unterscheiden sich die beiden Fälle durch das Vorzeichen der Determinante

$$D = \begin{vmatrix} \cos(xr_1) & \cos(yr_1) \\ \cos(xr_2) & \cos(yr_2) \end{vmatrix},$$

*) *von Staudt,* Geometrie der Lage (1847) § 15.

wenn (xr_1) der concave von r_1 mit der positiven x-Axe gebildete Winkel ist, und die übrigen Bezeichnungen analog verstanden werden. Denn trägt man auf r_1 und r_2 von O aus Strecken von der Länge Eins auf, welche in A_1 und A_2 endigen, so giebt jene Determinante nach *Möbius* den doppelten Inhalt des Dreiecks OA_1A_2 mit dem positiven oder negativen Zeichen an, je nachdem im Sinne der gegebenen Definition OA_2 gegen OA_1 im positiven oder negativen Sinne gedreht ist.

Speciell seien r_1 und r_2 die Richtungen, welche die im Sinne der Bewegung, also vorwärts gezogene Tangente der Bahn des Punktes P in den Zeitpunkten t und $t+dt$ besitzt; die Determinante D unterscheidet sich dann nur durch positive Factoren von dem Ausdruck

$$\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'+x''dt & y'+y''dt \end{vmatrix} = (x'y''-x''y')dt = \varDelta\, dt.$$

Die folgende Tangente ist also gegen die vorhergehende im positiven oder negativen Sinne gedreht, je nachdem $\varDelta$ positiv oder negativ ist. Wechselt diese Grösse in irgend einem Punkte ihr Zeichen, so ändert die vorwärts gerichtete Tangente der Bahncurve den Sinn ihrer Drehung; da die Grössen x' und y' nicht gleichzeitig verschwinden, so hat die Bahncurve einen Wendepunkt*) und da

$$\varDelta = x'U_y - y'U_x,$$

so besteht die Proportion

$$x' : y' = U_x : U_y.$$

Die Richtung der Bewegung steht hier also auf der Niveaulinie $U = \text{const.}$ senkrecht, und da, wie in § 2 des ersten Aufsatzes gezeigt ist, das Potentialniveau bei einer asymptotischen Bewegung schliesslich beständig sinkt, so ist dann die vorwärts gerichtete Tangente der Kraftrichtung, nach welcher das Potential zunimmt, in dem betrachteten Punkte entgegengesetzt.

§ 2.

Die Kraftrichtungen in der Nähe der Gleichgewichtslage.

Da das Potential für kleine Werthe der Coordinaten annähernd durch den Ausdruck $\frac{1}{2}(ax^2+by^2)$ dargestellt wird, so sind die Kraftrichtungen in der Nähe von O annähernd mit den äusseren Normalen der Ellipsen

$$(2.) \qquad ax^2+by^2 = \text{const.}$$

---

*) *Staude,* Ueber den Sinn der Richtung, Krümmung und Windung einer Curve. Sitzungsberichte der Dorpater Naturforschergesellschaft Bd. XI (1895) S. 1.

identisch, welche durch n_a bezeichnet werden mögen. Es erweist sich daher als zweckmässig, zuerst einige nahezu evidente Sätze über diese Normalen aufzustellen und aus ihnen Schlüsse betreffend die Kraftrichtungen zu ziehen. Dabei seien die von den Coordinatenaxen gebildeten Quadranten im Sinne der positiven Drehung numerirt und der von den positiven Axen begrenzte sei der erste. Der nach irgend einem Punkte Q gezogene Radiusvector werde als Halbgerade stets in der Richtung von O nach Q hin betrachtet.

Dies festgesetzt, sind die Richtungscosinus des Radiusvectors nach dem Punkte (x, y) von x und y, diejenigen der Richtung n_a von ax und by nur um positive Factoren verschieden; die letztere ist also gegen den Radiusvector im positiven oder negativen Sinne gedreht, je nachdem die Grösse

$$\begin{vmatrix} x & y \\ ax & by \end{vmatrix} = (b-a)xy$$

positiv oder negativ ist. Da nun $b-a$ negativ ist, so folgt:

I. Die äussere Normale der Ellipse (2.) im Punkte Q ist gegen den Radiusvector OQ im positiven oder negativen Sinne gedreht, je nachdem Q im zweiten und vierten oder im ersten und dritten Quadranten gelegen ist (Fig. 1).

Es sei nun g ein positiver echter Bruch, und durch die Ungleichungen

$$\left|\frac{y}{x}\right| \leqq g, \quad 0 < g < 1$$

werde das Gebiet ξ definirt; der Theil desselben, in welchem x positiv ist, sei ξ_+, derjenige, in welchem x negativ ist, ξ_-. Ebenso sei das Gebiet η der Inbegriff der Punkte, für welche

$$\left|\frac{x}{y}\right| \leqq g,$$

und werde in die Theilgebiete η_+ und η_- zerlegt, entsprechend dem Vorzeichen der Grösse y (Fig. 2). Was dann vom νten Quadranten nicht den Gebieten ξ und η angehört, sei das Gebiet θ_ν; in einem solchen hat x sowohl wie y ein constantes Zeichen, und es ist

$$g < \left|\frac{y}{x}\right| < \frac{1}{g}.$$

Wir achten nun besonders auf die Normalen n_a in den Punkten des Gebietes ξ.

Von ihm scheiden wir ein Theilgebiet ξ_+^0 aus, welches durch die Ungleichungen

$$(3.)\qquad \left|\frac{y}{x}\right| \leqq \frac{bg}{a}, \quad x > 0$$

definirt werde. In dieses Gebiet fallen alle Strahlen n_a, die von Punkten des Gebiets ξ_+ ausgehen, wenn man sie, parallel mit sich selbst, nach O verschoben denkt; denn sind $\bar{x}$ und $\bar{y}$ laufende Coordinaten, so bestehen für die durch O gezogenen Halbgeraden n_a die Relationen

$$\frac{\bar{y}}{\bar{x}} = \frac{by}{ax}, \quad \bar{x} > 0;$$

aus ihnen folgen im Verein mit der Definition des Gebietes ξ die Relationen (3.), in welchen $\bar{x}$ für x, und $\bar{y}$ für y geschrieben ist. Da sich dieselben Betrachtungen offenbar auch für das Gebiet ξ_- anstellen lassen, so ergiebt sich:

II. Die Richtungen der äusseren Normalen der Ellipsen (2.) im Gebiet ξ gehen, von O aus gezogen, in das durch die Ungleichung

$$\left|\frac{y}{x}\right| \leqq \frac{bg}{a}$$

definirte Gebiet ξ^0 hinein, welches einen Theil des Gebietes ξ bildet. Der Unterschied in der angularen Grösse der Gebiete ξ und ξ^0 ist von Null verschieden und hängt nur von a, b, g ab.

Bezeichnen wir ferner durch ψ den concaven Winkel zwischen dem Radiusvector und der äusseren Normale n_a, so ist

$$\pm\sin\psi = \frac{\begin{vmatrix} x & y \\ ax & by \end{vmatrix}}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{a^2x^2+b^2y^2}} = \frac{(b-a)\frac{y}{x}}{\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\sqrt{a^2+b^2\left(\frac{y}{x}\right)^2}};$$

der absolute Betrag dieser Grösse bleibt oberhalb einer von Null verschiedenen Grenze, wenn $|y:x|$ zwischen zwei positiven Grenzen eingeschlossen wird, z. B. wenn der Punkt (x, y) auf ein Gebiet θ beschränkt wird; man kann also sagen:

III. Innerhalb eines der Gebiete θ bleibt der concave Winkel zwischen dem Radiusvector und der äusseren Normale der Ellipse (2.) oberhalb einer von Null verschiedenen, durch a, b und g bestimmten Grenze.

Da ferner der Quotient $ax:by$ dasselbe Vorzeichen hat wie $x:y$ und zwischen endlichen Grenzen eingeschlossen bleibt, wenn dies von $x:y$ gilt, so folgt:

IV. Im Gebiet θ_ν ist die äussere Normale der Ellipse (2.) in den νten Quadranten hinein gerichtet, und bildet mit seinen Grenzen Winkel, welche oberhalb einer von Null verschiedenen Grenze bleiben. In einem der Gebiete $\xi_\pm$, $\eta_\pm$ geht jene Normale in einen der beiden Quadranten hinein, welche in einer dem betreffenden Gebiet angehörigen Coordinatenhalbaxe an einander grenzen, und bildet mit den nicht gemeinsamen Grenzen dieser Quadranten Winkel, welche nicht beliebig klein werden können.

Neben den Normalen n_a betrachten wir die Richtung der vom Potential U herrührenden Kraft, deren Richtungscosinus die mit positiver Quadratwurzel gebildeten Ausdrücke

$$\frac{U_x}{\sqrt{U_x^2+U_y^2}}, \quad \frac{U_y}{\sqrt{U_x^2+U_y^2}}$$

sind. Ist ω der concave Winkel beider Richtungen in irgend einem Punkte und sind die Quadratwurzeln positiv, so hat man

$$\cos\omega = \frac{U_x ax + U_y by}{\sqrt{a^2x^2+b^2y^2}\sqrt{U_x^2+U_y^2}}$$

oder, indem man den Werth von U nach § 1 einsetzt

$$\cos\omega = \frac{a^2x^2+b^2y^2+ax\mathfrak{P}_x+by\mathfrak{P}_y}{\sqrt{a^2x^2+b^2y^2}\sqrt{a^2x^2+b^2y^2+2ax\mathfrak{P}_x+2by\mathfrak{P}_y+\mathfrak{P}_x^2+\mathfrak{P}_y^2}};$$

führt man Polarcoordinaten ein und setzt

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

wobei r positiv ist, so ergiebt sich

$$\cos\omega = \frac{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi+rR}{\sqrt{(a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi)(a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi+rR_1)}},$$

indem man unter R und R_1 Potenzreihen des Arguments r versteht, deren Coefficienten ganze Functionen von $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ sind. Diese Reihen convergiren, da sie aus convergenten nach x und y fortschreitenden Reihen entstanden sind, gleichmässig für alle Werthe von φ, sobald r unterhalb einer gewissen Grenze festgelegt wird. Da nun nach (1.) stets

$$a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi \geqq b^2,$$

so liegen die Grössen

$$\frac{rR}{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}, \quad \frac{rR_1}{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}$$

für alle Werthe von φ dem absoluten Betrage nach unterhalb einer beliebig

gegebenen Grösse, sobald r hinreichend klein ist. Dasselbe gilt daher von dem Ausdruck

$$\cos\omega - 1 = \frac{1+\dfrac{rR}{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}}{\sqrt{1+\dfrac{rR_1}{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}}} - 1,$$

mithin auch von ω selbst; d. h.:

V. In allen Punkten, deren Abstand von O hinlänglich klein ist, bilden die Richtungen der vom Potential U erzeugten Kraft und der äusseren Normale der Ellipse (2.) einen Winkel, der unterhalb einer beliebig kleinen Grenze verbleibt.

Hieraus ergiebt sich in Verbindung mit den Sätzen II, III und IV, sofort das folgende Resultat.

VI. Für alle Punkte, deren Abstand von O kleiner als eine hinreichend kleine Constante ist, gilt Folgendes. Zieht man zu den Kraftrichtungen in den Punkten des Gebiets ξ Parallele durch O, so fallen dieselben in ein Gebiet ξ^1 hinein, welches einen Theil von ξ bildet und durch eine Ungleichung

$$\left|\frac{y}{x}\right| < \bar{g}$$

definirt wird, wobei

$$0 < \bar{g} < g.$$

In jedem Gebiet θ bleibt der concave Winkel zwischen dem Radiusvector und der Kraftrichtung oberhalb einer von Null verschiedenen Grenze; in den Gebieten θ_2 und θ_4 ist die Kraftrichtung gegen den Radiusvector im positiven Sinne gedreht. — Die Kraftrichtungen in einem der Gebiete ξ, η gehen, wenn man sie nach O verlegt, in einen derjenigen beiden Quadranten hinein, deren Trennungslinie in dem betreffenden Gebiet verläuft, z. B. beim Gebiet η_- in den dritten oder vierten.

§ 3.

Hülfssätze über die Bahncurve des Punktes P.

Aus der Identität

$$r^2 = x^2+y^2$$

ergiebt sich mittelst der Gleichungen der Bewegung und der lebendigen Kraft

$$(r^2)'' = 2(xx''+yy''+x'^2+y'^2) = 2(xU_x+yU_y+2U)$$
$$= 4ax^2+4by^2+\cdots,$$

wobei die weggelassenen Glieder in x und y von mindestens dritter Dimension sind. Die zweite Ableitung von r^2 ist also positiv, sobald der Abstand OP hinreichend klein geworden ist. Nach Ablauf einer gewissen Zeit kann die Grösse r^2 daher kein Maximum mehr besitzen. Daraus folgt, dass sie dann auch nicht mehr wachsen, ihre erste Ableitung also nicht mehr positiv sein kann. Diese kann aber auch nicht verschwinden, da sie sonst, wegen des positiven Vorzeichens der zweiten Ableitung auch positiv werden müsste. Damit ist gezeigt:

VII. Von einem gewissen Zeitpunkte an nimmt bei einer asymptotischen Bewegung der Abstand $r = OP$ beständig ab und r' ist negativ.

Differentiirt man ferner die Identität

$$r^2\varphi' = xy'-yx', \tag{4.}$$

so ergiebt sich

$$\begin{cases} r^2\varphi''+2rr'\varphi' = xy''-yx'' = xU_y-yU_x \\ \qquad\qquad\qquad = (b-a)xy+x\mathfrak{P}_y-y\mathfrak{P}_x; \end{cases} \tag{5.}$$

für diejenigen Zeitpunkte, in denen $\varphi' = 0$, hat man also

$$\varphi'' = (b-a)\cos\varphi\sin\varphi+\frac{1}{r^2}(x\mathfrak{P}_y-y\mathfrak{P}_x). \tag{6.}$$

Da nun die Glieder der Reihen $\mathfrak{P}_x$ und $\mathfrak{P}_y$ in x und y von mindestens zweiter Dimension sind, so wird das letzte Glied der rechten Seite unendlich klein mit r. Dagegen bleibt das erste Glied dem absoluten Betrage nach oberhalb einer endlichen Grenze, wenn φ um ein Endliches von ganzzahligen Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$ verschieden bleibt, also z. B. in den Gebieten θ; dabei ist das Product $\cos\varphi\sin\varphi$ positiv in θ_1 und θ_3, negativ in θ_2 und θ_4. Die Gleichung (6.) ergiebt daher folgenden Satz.

VIII. Nach Ablauf einer gewissen Zeit hat der Winkel φ kein Minimum in den Gebieten θ_1 und θ_3, kein Maximum in den Gebieten θ_2 und θ_4.

Für eine Lage von P, in welcher φ ein Extremum ist, hat man nach (4.)

$$xy'-yx' = 0, \tag{7.}$$

und nach VII., wenn die Zeit weit genug vorgeschritten ist,

$$xx'+yy' < 0. \tag{8.}$$

Es sei nun etwa

$$x > 0; \tag{9.}$$

dann kann man für die vorletzte Ungleichung schreiben

$$x^2x'+xyy' < 0,$$

woraus sich, wenn man die Gleichung (7.) mit y multiplicirt und subtrahirt, ergiebt

$$(10.)\qquad (x^2+y^2)x' < 0, \quad x' < 0.$$

Je nachdem nun φ ein Maximum oder Minimum ist, muss φ'' und nach (5.) auch die Grösse $xy''-yx''$ negativ oder positiv sein, wenn sie nicht verschwindet; dasselbe gilt daher von

$$y''-\frac{y}{x}x'' = y''-\frac{y'}{x'}x'' = \frac{\varDelta}{x'}.$$

Wenn also $|\varphi''| > 0$, so ist $\varDelta$ positiv im Falle des Maximums, negativ im Falle des Minimums. Wenn dagegen an der betrachteten Stelle

$$\varphi'' = 0, \quad xy'-yx'' = 0,$$

so hat die Grösse

$$xy''-yx'' = x\left(y''-\frac{y}{x}x''\right) = \frac{x}{x'}\varDelta$$

doch vorher und nachher das entgegengesetzte Zeichen wie $\varDelta$. Würde letztere Grösse ihr Zeichen wechseln, so würde dasselbe von $xy''-yx''$ gelten, während $xy'-x'y$ und φ' ihr Zeichen beibehielten; dann könnte aber φ kein Extremum sein. Somit folgt, dass $\varDelta$ und $xy''-yx''$ ihr Zeichen beibehalten; beider Zeichen sind nach (9.) und (10.) entgegengesetzt, sodass auch jetzt $\varDelta$ in der Umgebung des betrachteten Extremums positiv oder negativ ist, je nachdem ein Maximum oder Minimum vorliegt.

Dieselbe Folgerung ergiebt sich, wenn statt der Ungleichung (9.) eine der Annahmen

$$x < 0, \quad y > 0, \quad y < 0$$

zu Grunde gelegt wird. Berücksichtigt man daher, was nach § 1 das Zeichen der Grösse $\varDelta$ geometrisch bedeutet, so folgt der auch geometrisch evidente Satz:

IX. Nach Ablauf einer gewissen Zeit dreht sich die vorwärts gerichtete Tangente der Bahncurve in Punkten, wo φ ein Maximum ist, im positiven, wo φ ein Minimum ist, im negativen Sinne. (Fig. 3).

Ein Resultat von ähnlicher Form kann für die Punkte aufgestellt werden, in welchen x oder y ein Extremum ist. Es sei z. B.

$$y' = 0,$$

dann ist nach (8.)

$$xx' < 0, \quad \Delta = x'y'';$$

je nachdem also z. B. x negativ oder positiv ist, haben Δ und y'' dasselbe oder entgegengesetzte Zeichen; dass x von Null verschieden sein muss, folgt aus (8.). Nimmt man analoge Entwickelungen mit hinzu, so ergiebt sich:

X. Wenn y ein Maximum oder Minimum ist, dreht sich die vorwärts gerichtete Tangente entsprechend im positiven oder negativen Sinne, sobald $x > 0$; ist $x < 0$, so ist der Drehungssinn negativ im Falle des Maximums, positiv im Falle des Minimums von y. (Fig. 4).

Endlich stellen wir betreffs der Grösse Δ noch folgende allgemeine Betrachtung an. Es ist offenbar

$$\Delta = x'U_y - y'U_x = rx'(b\sin\varphi + rR) - ry'(a\cos\varphi + rR_1),$$

wenn durch R und R_1 Ausdrücke derselben Art wie in § 2 bezeichnet werden. Nun beschränke man sich auf das Gebiet θ_1, sodass

$$x > 0, \quad y > 0, \quad g < \frac{y}{x} < \frac{1}{g},$$

und es sei etwa

$$\varphi' < 0, \quad xy' - yx' < 0, \quad y'\cos\varphi < x'\sin\varphi.$$

Dann ergiebt sich

$$\Delta > ry'\left[(b-a)\cos\varphi + \frac{x'}{y'}rR - rR_1\right].$$

Andrerseits folgt aus den Ungleichungen

$$xx' + yy' < 0, \quad xy' - yx' < 0$$

indem man die erste mit y, die zweite mit x multiplicirt und addirt, dass y' negativ ist; ferner ergiebt die erste für $x' > 0$, die zweite für $x' < 0$ eine der Ungleichungen

$$1 < \frac{y}{x} \cdot \frac{-y}{x'}, \quad \frac{y'}{x'} > \frac{y}{x},$$

sodass immer

$$\left|\frac{x'}{y'}\right| < \frac{1}{g}.$$

Hiernach lehrt die für Δ erhaltene Ungleichung, dass diese Grösse positiv ist, wenn φ im Gebiet θ_1 abnimmt, und hinreichend entfernte Zeitpunkte ins Auge gefasst werden. Nun vertauschen sich die Gebiete θ_1 und θ_3, wenn man die Coordinatenrichtungen gleichzeitig in die entgegengesetzten übergehen lässt, während dann der positive Drehungssinn derselbe bleibt;

das erhaltene Resultat gilt also auch für θ_3. Lässt man dagegen nur eine Coordinatenrichtung in die entgegengesetzte übergehen, wodurch sich θ_1 in θ_2 oder θ_4 verwandelt, so wird auch der positive Drehungssinn dem bisherigen entgegengesetzt; wächst also der Winkel φ im Gebiet θ_2 oder θ_4, so ist Δ negativ. Damit ist gezeigt:

XI. Nach Ablauf einer gewissen Zeit dreht sich die Tangente der Bahn im positiven Sinne, sobald der Punkt P in θ_1 oder θ_3 liegt und OP sich im negativen Sinne dreht; sie dreht sich im negativen Sinne, sobald der Radius OP in eins der Gebiete θ_2 und θ_4 fällt und sich im positiven Sinne dreht (Fig. 5).

§ 4.

Die Grenzlage des Radiusvectors *OP*.

Die im Satze XI bezeichneten beiden Fälle lassen, wenn sie noch nach beliebig langen Zeitintervallen vorkommen, auf einen Umstand schliessen, den wir kurz durch (𝔊.) bezeichnen wollen, den Umstand nämlich,

(𝔊.) dass der Winkel φ sich für $t = +\infty$ einer bestimmten, endlichen Grenze annähert, und dabei von einem gewissen Zeitpunkt an den Sinn seiner Aenderung nicht mehr wechselt.

In der That bewege sich z. B. der Punkt P mit wachsenden Werthen von φ im Gebiet θ_2 von einer beliebigen Lage P_0 aus; dann kann 1) der Winkel φ nicht aufhören zu wachsen, ehe die Bahncurve einen Wendepunkt erreicht hat. Denn in einem Maximum des Winkels φ dreht sich nach IX. die Tangente positiv herum, wenn man, wie wir es thun wollen, nur hinreichend entfernte Zeiten in Betracht zieht; in P_0 dagegen dreht sich die Tangente im negativen Sinne, es müsste also vor jenem Maximum ein Wendepunkt dagewesen sein, entgegen der Voraussetzung. 2) Der Punkt P kann von P_0 aus nicht die negative y-Axe erreichen, wenn seine Bahn nicht vorher einen Wendepunkt gehabt hat. Denn geschähe dies, so hätte nach 1) inzwischen der Winkel φ nicht aufgehört zu wachsen; zum ersten Male würde also die negative y-Axe vom dritten Quadranten her erreicht, und in dem Punkte, wo sie erreicht wird, muss r abnehmen, mithin die negative Grösse y zunehmen. Diese müsste also im dritten Quadranten ein Minimum gehabt haben, für welches $x < 0$, nach X. also $\Delta > 0$ wäre, was wiederum erfordern würde, dass die Bahncurve entgegen der Voraussetzung zwischen P_0 und dem betrachteten Punkte schon einen Wendepunkt gehabt hätte. Aus den Bemerkungen 1) und 2) ergiebt sich, dass 3) entweder φ beständig

zu Anfang gegen die in das Gebiet θ_4 hineingehende Richtung PO im negativen Sinne gedreht ist und wegen der Ungleichung $y' < 0$ in den dritten oder vierten Quadranten hineingeht, so kann OT, auch wenn P das Gebiet ξ_- durchläuft, nicht nach ξ^1_+ hineingehen, also nicht mit OK zusammenfallen. Geht endlich P in die Gebiete θ_3 und η_- über, so zeigt nach VI. die der Kraft entgegengesetzte Richtung OK in den ersten oder zweiten Quadranten hinein, kann also auch hier nicht mit OT zusammenfallen, da diese nicht der x-Axe parallel wird, also in den dritten oder vierten Quadranten hineingerichtet bleibt. Es ist demnach von einem gewissen Zeitpunkte an unmöglich, dass der Punkt P von P_0 aus im zweiten und dritten Quadranten verbleibend bei wachsenden Werthen von φ einen Wendepunkt seiner Bahn erreicht. Nach 3) ergiebt sich also (𝔖.).

Analoge Betrachtungen lassen sich für die anderen Gebiete θ anstellen, wenn man für θ_1 und θ_3 den Winkel φ abnehmen lässt, während für θ_4 dieselbe Voraussetzung wie für θ_2 zu machen ist. In allen Fällen kommt man zu dem Ergebniss (𝔖.) und hat daher folgenden Satz bewiesen.

XII. Wenn nach beliebig langer Zeit der Punkt P sich entweder in den Gebieten θ_2 und θ_4 bewegt und dabei der Winkel φ wächst, oder P bewegt sich bei abnehmenden Werthen von φ in einem der Gebiete θ_1 und θ_3, so folgt (𝔖.), d. h. es muss der Winkel φ sich einer endlichen Grenze für $t = +\infty$ annähern, indem er zuletzt beständig wächst oder beständig abnimmt.

Hieraus ergiebt sich, da in der Nähe eines Extremums der Winkel φ sowohl zunimmt wie abnimmt, als unmittelbare Folgerung:

XIII. Wenn nach beliebig langer Zeit noch in einem der Gebiete θ ein Maximum oder Minimum von φ vorkommt, so ergiebt sich (𝔖.).

Wäre die Voraussetzung dieses Satzes von einem gewissen Zeitpunkte an nie mehr erfüllt, und der Punkt P wäre noch nach beliebig langer Zeit in einem der Gebiete θ, z. B. θ_1 gelegen, so ergäbe sich, wenn φ abnimmt, nach XII. die Folgerung (𝔖.); andernfalls nimmt φ entweder solange zu, bis der Punkt P in das Gebiet η_+ übergetreten ist, oder es ergiebt sich wiederum (𝔖.). Wenn im ersteren Falle das Gebiet η_+ wieder verlassen werden sollte, würde P entweder bei wachsenden Werthen von φ nach θ_2, oder bei abnehmenden nach θ_1 hineingelangen; in beiden Fällen folgt (𝔖.) nach XII. Da nun analoge Betrachtungen wie für θ_1 für jedes Gebiet θ_ν angestellt werden können, so sieht man:

XIV. Entweder der Punkt P verbleibt von einem gewissen Zeitpunkte ab in einem der Gebiete ξ_+, ξ_-, η_+, η_-, oder es gilt (𝔖.).

Die Gebiete ξ, η hängen nun nach § 2 von dem Werthe des positiven echten Bruches g ab; wird dieser immer kleiner und kleiner genommen, so ist jede den Gebieten ξ, η angehörige Richtung schliesslich so wenig wie man will von einer der Coordinatenaxen verschieden. Man kann daher aus dem Satze XIV folgenden Schluss ziehen:

Bei jeder asymptotischen Bewegung des Punktes P convergirt der Radiusvector OP für $t = +\infty$ gegen eine bestimmte Grenzlage. Fällt diese nicht in eine der Coordinatenaxen, so dreht sich OP von einem gewissen Zeitpunkt ab in einem bestimmten, nicht gewechselten Sinne.

Die Fragen betreffs der Grenzlage der Geraden OP, welche dieser Satz offen lässt, können in bestimmter Weise beantwortet werden, indem man von folgendem analytischen Satze ausgeht.

Lemma. Man bezeichne durch c, c_0 positive Grössen, c_1 sei endlich und bestimmt; sobald $t > c$, sei die Function $f(t)$ nebst ihren ersten beiden Ableitungen endlich und stetig, und es sei

$$(11.)\qquad |f''(t)| < c_0, \quad \lim_{t=+\infty} f(t) = c_1;$$

dann ist

$$(12.)\qquad \lim_{t=+\infty} f'(t) = 0.$$

Unter den eingeführten Voraussetzungen kann man nämlich, sobald

$$t > t_0 > c,$$

setzen

$$(13.)\qquad f(t)-f(t_0) = (t-t_0)f'(t_0)+\tfrac{1}{2}(t-t_0)^2 f''(t_0+\lambda(t-t_0)),$$

wobei die Ungleichung

$$0 \leqq \lambda \leqq 1$$

besteht. Wenn nun die Gleichung (12.) unrichtig wäre, so gäbe es eine positive Grösse δ von der Beschaffenheit, dass oberhalb jeder positiven Grenze C Werthe t_0 gefunden werden könnten, für welche

$$|f'(t_0)| > \delta;$$

dann aber wäre nach (11.), sobald $C > c$,

$$\tfrac{1}{2}(t-t_0)\left|\frac{f''(t_0+\lambda(t-t_0))}{f'(t_0)}\right| < \frac{c_0(t-t_0)}{2\delta},$$

und wenn man für $t-t_0$ voraussetzt

$$0 < t-t_0 < \frac{\delta}{c_0},$$

so folgt

$$\tfrac{1}{2}(t-t_0)|f''(t_0+\lambda(t-t_0))| < \tfrac{1}{2}|f'(t_0)|,$$

also nach (13.)

$$(14.)\quad \begin{cases} \left|\dfrac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}\right| \geqq |f'(t_0)|-\tfrac{1}{2}(t-t_0)|f''(t_0+\lambda(t-t_0))| \\ \qquad > \tfrac{1}{2}|f'(t_0)|. \end{cases}$$

Ist nun δ_1 eine positive Constante und

$$\delta_1 < \frac{\delta}{c_0},$$

und führt man die weitere Annahme

$$t-t_0 > \delta_1$$

ein, so folgt aus (14.)

$$|f(t)-f(t_0)| > \tfrac{1}{2}\delta_1\delta.$$

Oberhalb der beliebigen Grenze C hätte also die Function $f(t)$ noch Werthe, die von einander um mehr als eine positive Constante $\frac{1}{2}\delta\delta_1$ abstehen, was der Voraussetzung (11.) widerspricht.

Von diesem Lemma machen wir Anwendung, indem wir für $f(t)$ einmal φ, sodann φ' setzen. Aus der Gleichung der lebendigen Kraft folgt die Relation

$$\left(\frac{r'}{r}\right)^2+\varphi'^2 = \frac{2U}{r^2},$$

in welcher die rechte Seite dem absoluten Betrage nach unterhalb einer endlichen Grenze verbleibt, wenn man r unbegrenzt abnehmen lässt. Dasselbe gilt also von den Grössen $r':r$ und φ'. Weiter kann die in § 3 benutzte Gleichung (5.) geschrieben werden

$$(15.)\qquad \varphi''+\frac{2r'}{r}\varphi' = (b-a)\cos\varphi\sin\varphi+rR_0,$$

wobei R_0 eine Potenzreihe des Arguments r bedeutet, deren Coefficienten ganze Functionen von $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ sind, und die aus denselben Gründen wie die in § 2 eingeführten Reihen R und R_1 dem absoluten Betrage nach unter einer endlichen Grenze bleibt, sobald r hinlänglich klein genommen wird. Die Gleichung (15.) lehrt dann, dass auch die Grösse $|\varphi''|$, wenn t ins Unendliche wächst, unterhalb einer endlichen Grenze verbleibt.

Um ein ähnliches Resultat für φ''' zu erhalten, differentiiren wir die Gleichung (15.), wodurch sich ergiebt

$$(16.)\qquad \varphi'''+\varphi''\cdot\frac{2r'}{r}+2\varphi'\left(\frac{r'}{r}\right)' = (b-a)\cos 2\varphi\,.\,\varphi'+(rR_0)'.$$

Nun hat man nach (15.) und (5.):

$$rR_0 = \frac{x\mathfrak{P}_y - y\mathfrak{P}_x}{r^2} = \frac{\mathfrak{Q}(x,y)}{r^2},$$

wobei $\mathfrak{Q}$ eine Potenzreihe ist, welche mit Gliedern dritter Dimension beginnt; somit folgt

$$(rR_0)' = \frac{r^2(\mathfrak{Q}_x x' + \mathfrak{Q}_y y') - 2rr'\mathfrak{Q}}{r^4},$$

und der Ausdruck rechts wird offenbar für $t = +\infty$ unendlich klein, da die Grösse $|r' : r|$ nicht über alle Grenzen wächst. Ferner hat man die Identität

$$x''\cos\varphi + y''\sin\varphi = r'' - r\varphi'^2,$$

also die Gleichung

$$\frac{U_x}{r}\cos\varphi + \frac{U_y}{r}\sin\varphi = \frac{r''}{r} - \varphi'^2;$$

da nun die Potenzreihen U_x und U_y mit Gliedern erster Dimension beginnen, bleibt die linke Seite dem absoluten Betrage nach für $t = +\infty$ unterhalb einer endlichen Grenze; dasselbe gilt, wie gezeigt, von φ'^2, mithin auch von $r'' : r$ und von

$$\left(\frac{r'}{r}\right)' = \frac{r''}{r} - \left(\frac{r'}{r}\right)^2.$$

Die Gleichung (16.) ergiebt daher dasselbe Resultat auch für die Grösse φ'''.

Setzen wir nun im Lemma zunächst φ für $f(t)$ und bezeichnen fortan durch lim den Grenzübergang $t = +\infty$, so ergiebt sich, da $\lim\varphi$ endlich und bestimmt ist,

$$(17.) \qquad \lim\varphi' = 0;$$

damit ist gezeigt, dass auch φ' für $f(t)$ genommen werden kann, woraus man schliesst

$$\lim\varphi'' = 0.$$

Da ferner offenbar

$$\lim(rR_0) = 0,$$

so folgt aus den Gleichungen (15.) und (17.):

$$\lim(\cos\varphi\sin\varphi) = 0.$$

Die Grenzlage also, welcher sich der Radiusvector OP annähert, fällt stets in eine der Coordinatenaxen.

Es sei diese Grenzlage z. B. die positive x-Axe; dann hat man offenbar

$$(18.) \qquad \lim\frac{x}{r} = 1, \quad \lim\frac{y}{r} = 0.$$

Nun hat die Normale der Bahncurve die Richtungscosinus

$$\frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}} = \frac{y'}{\sqrt{2U}}, \quad \frac{-x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}} = \frac{-x'}{\sqrt{2U}};$$

bildet sie mit OP den concaven Winkel χ, so hat man daher

$$\cos\chi = \frac{x}{r}\cdot\frac{y'}{\sqrt{2U}} - \frac{y}{r}\cdot\frac{x'}{\sqrt{2U}} = \frac{r\varphi'}{\sqrt{2U}}.$$

Die Gleichungen (18.) ergeben aber

$$\lim\frac{2U}{r^2} = \lim\left(a\left(\frac{x}{r}\right)^2+b\left(\frac{y}{r}\right)^2+\frac{2\mathfrak{P}(x,y)}{r^2}\right) = a;$$

somit folgt

$$\lim\cos\chi = 0;$$

d. h. die x-Axe ist auch die Grenzlage für die Tangente der Bahncurve; analoge Entwickelungen gelten natürlich, wenn die Grenzlage von OP eine der drei anderen Coordinatenrichtungen ist. Wir fassen diese Resultate in folgendem Theorem zusammen:

Nähert sich der materielle Punkt P unter den in* § 1 *eingeführten Voraussetzungen der labilen Gleichgewichtslage O asymptotisch an, so nähern sich der Strahl OP und die Tangente der Bahncurve des Punktes einer und derselben Grenzlage an; dieselbe fällt in eine der beiden Coordinatenaxen, d. h. der beiden Geraden, längs deren das Potential von O aus am stärksten und am schwächsten zunimmt.

§ 5.

Uebergang zu beliebigen Problemen mit zwei Graden der Bewegungsfreiheit.

Allgemeiner sei die Lage eines Massensystems S durch die Parameter u und v bestimmt, die lebendige Kraft habe den Ausdruck

$$T = \tfrac{1}{2}(Eu'^2+2Fu'v'+Gv'^2),$$

wobei E, F, G analytische Functionen von u und v seien und sich in der Umgebung des Werthsystems $u = v = 0$, welches kurz durch O bezeichnet werde, regulär verhalten und für dieses die Werthe E_0, F_0, G_0 annehmen mögen. Dann ist allgemein

$$EG-F^2 > 0$$

also speciell

$$E_0G_0-F_0^2 > 0.$$

Die wirkenden Kräfte mögen ein nur von u und v abhängiges Potential U

haben, welches ebenfalls in der Umgebung von O eine reguläre analytische Function der Parameter und in der Form

$$U = \frac{1}{2}(Lu^2+2Muv+Nv^2)+\cdots$$

entwickelbar sei, wobei die weggelassenen Glieder in den Grössen u und v von mindestens dritter Dimension, L, M, N aber Constante seien, für welche die Ungleichungen

$$(19.)\qquad LN-M^2 > 0,\quad L > 0$$

bestehen. Alsdann hat das Potential in O ein Minimum, und das System ist in der Lage O im labilen Gleichgewicht. Offenbar ist die bisher betrachtete Bewegung eines Punktes unter dem definirten dynamischen Problem als specieller Fall enthalten.

Wenn nun auch das System S sich asymptotisch der labilen Gleichgewichtslage O annähert, sodass für $t=+\infty$

$$(20.)\qquad \lim u = \lim v = 0,$$

so lässt sich zeigen, dass wie im specielleren Falle des § 1 auch hier $h=0$ sein muss. Man kann nämlich aus der Gleichung der lebendigen Kraft

$$T = U+h$$

und der Annahme (20.) sofort schliessen

$$(21.)\qquad E_0u'^2+2F_0u'v'+G_0v'^2 = h+\varepsilon,$$

wobei

$$\lim \varepsilon = 0.$$

Nun hat die quadratische Form

$$Lx^2+2Mxy+Ny^2$$

welche nach (19.) definit und positiv ist, für alle diejenigen Werthe der Variablen, welche der Gleichung

$$E_0x^2+2F_0xy+G_0y^2 = h$$

genügen, wenn h positiv ist, ein von Null verschiedenes Minimum; dasselbe gilt daher auch, wenn man die Variablen der Ungleichung

$$h_1 < E_0x^2+2F_0xy+G_0y^2 < h_2$$

unterwirft, in welcher h_1 und h_2 positive Grössen sind. Einer solchen Ungleichung genügen nach (21.) auch die Grössen u' und v', wenn man bei der vorausgesetzten Bewegung hinreichend entfernte Zeiten ins Auge fasst,

und annimmt,

$$0 < h_1 < h < h_2;$$

die Grösse

$$Lu'^2 + 2Mu'v' + Nv'^2$$

bleibt dann nach Ablauf einer gewissen Zeit oberhalb einer positiven Grenze.

Von diesen Bemerkungen machen wir Anwendung auf den Ausdruck

$$U'' = U_{uu}u'^2 + 2U_{uv}u'v' + U_{vv}v'^2 + U_u u'' + U_v v'',$$

in welchem durch die Indices u und v die Differentiation nach den gleichbezeichneten Grössen bezeichnet sei. Die letzten beiden Glieder verschwinden bei einer asymptotischen Bewegung für $t = +\infty$; denn die Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial u'}\right) = \frac{\partial(T+U)}{\partial u}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial v'}\right) = \frac{\partial(T+U)}{\partial v}$$

ergeben als Ausdrücke für u'' und v'' Brüche, deren Zähler ganze rationale Functionen von u' und v' sind mit Coefficienten, welche in der Umgebung von O reguläre analytische Functionen von u und v sind; der Nenner dieser Brüche ist $EG - F^2$, also eine Grösse, welche dem positiven Grenzwerth $E_0 G_0 - F_0^2$ zustrebt. Bei einer Bewegung der bezeichneten Art bleiben also die Grössen $|u''|$ und $|v''|$ unterhalb fester endlicher Grenzen, während U_u und U_v unendlich klein werden; man kann daher setzen

$$U'' = Lu'^2 + 2Mu'v' + Nv'^2 + \eta,$$

wobei die Gleichung

$$\lim \eta = 0$$

besteht. Die obige Hülfsbetrachtung zeigt daher, dass bei der Annahme $h > 0$ die Grösse $|U''|$ oberhalb einer von Null verschiedenen positiven Grenze bleiben, also die Grösse

$$U' = U_u u' + U_v v'$$

unendlich gross werden müsste, während sie doch offenbar unendlich abnimmt. Jene Annahme führt also zu einem Widerspruch. Damit ist der Beweis dafür vollständig geführt, dass in dem betrachteten Falle $h = 0$ sein muss; denn negative Werthe von h sind offenbar ausgeschlossen.

Die Bahncurven aller einem bestimmten Werthe von h entsprechenden Bewegungen des Systems S, d. h. die bei ihnen von dem Werthepaar (u, v) beschriebenen einfachen Mannigfaltigkeiten können nun nach dem

Princip der kleinsten Action*) durch die eine Gleichung

$$\delta\int\sqrt{U+h}\sqrt{Edu^2+2Fdudv+Gdv^2} = 0$$

definirt werden; für $h=0$ also hat man

$$(22.)\qquad \delta\int\sqrt{U}\sqrt{Edu^2+2Fdudv+Gdv^2} = 0,$$

und in dem speciellen Problem der vier ersten Paragraphen gilt die Gleichung

$$(23.)\qquad \delta\int\sqrt{U}\sqrt{dx^2+dy^2} = 0.$$

Auf diese Form kann aber die allgemeine Gleichung (22.) stets gebracht werden; weiss man doch seit *Gauss*, dass x und y als Functionen von u und v so bestimmt werden können, dass, unter Λ eine Function von x und y verstanden, die folgende Identität stattfindet:

$$(24.)\qquad \Lambda(dx^2+dy^2) = Edu^2+2Fdudv+Gdv^2.$$

Macht man hiervon in der Gleichung (22.) Gebrauch, so nimmt sie die Gestalt an

$$(24^a.)\qquad \delta\int\sqrt{U\Lambda}\sqrt{dx^2+dy^2} = 0,$$

wird also mit der Gleichung (23.) identisch, wenn man in dieser U durch $U\Lambda$ ersetzt. Aus dieser Bemerkung ersieht man leicht, dass das allgemeine Problem mit zwei Graden der Bewegungsfreiheit auf dasjenige der Bewegung eines Punktes in der Ebene zurückgeführt werden kann.

Um aber das hiermit angedeutete Uebertragungsprincip, welches von *Goursat* und *Darboux* herrührt**) genauer würdigen zu können, müssen wir einige nahe liegende Erwägungen über den analytischen Charakter der Functionen x und y vorausschicken. Sie können dadurch definirt werden, dass

$$x+yi = \text{const.}$$

das allgemeine Integral derjenigen Differentialgleichung zwischen den Variablen u und v ist, welche entsteht, wenn man einen Linearfactor der Form

$$Edu^2+2Fdudv+Gdv^2$$

*) *Jacobi*, Vorlesungen über Dynamik, sechste Vorlesung. Ges. Werke, Supplementband (1884) S. 45.

**) *Goursat*, Les transformations isogonales en mécanique, Comptes rendus Bd. CVIII S. 446. *Darboux*, Remarques sur la communication précédente, S. 449 desselben Bandes.

gleich Null setzt; man sieht dies sofort, wenn man die linearen Factoren beider Seiten der Identität (24.) vergleicht. Jene Differentialgleichung hat die Form

$$(25.)\qquad \frac{dv}{du} = \frac{-F+i\sqrt{EG-F^2}}{G};$$

die rechte Seite kann, den eingeführten Voraussetzungen zufolge in eine Potenzreihe der Argumente u und v entwickelt werden, welche für $u=v=0$ in die nicht verschwindende Constante

$$\frac{-F_0+i\sqrt{E_0G_0-F_0^2}}{G_0} = A+Bi$$

übergeht; sind A und B reell und ist die Quadratwurzel positiv, so ist B positiv. Die Gleichung (25.) ergiebt daher, wenn für $u=0$ die Function v den Werth C annimmt, für die Differentialquotienten von v nach u Ausdrücke, die sich für $u=0$ auf Potenzeihen des Arguments C reduciren, sodass man zunächst die allgemeine Integralgleichung in der Form

$$(26.)\qquad v = \mathfrak{Q}(u,\ C)$$

erhält, wobei $\mathfrak{Q}$ eine Potenzreihe bedeutet, deren lineare Glieder offenbar sind

$$C+(A+Bi)u.$$

Aus der Gleichung (26.) findet man daher für C eine Potenzreihe der Argumente u und v, welche die Form hat

$$(27.)\qquad C = v-(A+Bi)u+\mathfrak{S}(u,\ v),$$

wobei die Glieder der Reihe $\mathfrak{S}$ in u und v von mindestens zweiter Dimension sind.

In ähnlicher Weise kann das allgemeine Integral der Gleichung dargestellt werden, welche aus (25.) erhalten wird, wenn man die Quadratwurzel ungeändert lässt und nur i durch $-i$ ersetzt. Ist dann $\mathfrak{S}_0$ die Potenzreihe, deren Coefficienten zu den entsprechenden der Reihe $\mathfrak{S}$ conjugirt imaginär sind, so ist jenes Integral

$$(28.)\qquad C_0 = v-(A-Bi)u+\mathfrak{S}_0(u,\ v).$$

Die Grösse C_0 ist offenbar, wenn die Variablen u und v reell sind, zu C conjugirt imaginär; betrachtet man C und C_0 als Functionen von u und v, so kann man auch umgekehrt die Gleichungen (27.) und (28.) nach u und v auflösen, da die Coefficienten der linearen Glieder die von Null ver-

schiedene Determinante

$$-\begin{vmatrix} A+Bi & 1 \\ A-Bi & 1 \end{vmatrix} = -2Bi$$

ergeben. Hieraus folgt, dass wenn man setzt

$$C = x+yi, \quad C_0 = x-yi,$$

auch die Grössen x und y als analytische Functionen von u und v dargestellt werden können, welche sich in der Umgebung des Werthsystemes $u = v = 0$ regulär verhalten, und in den Gliedern erster Dimension folgende Gestalt haben:

$$(28^a.) \qquad x = v - Au + \cdots, \quad y = -Bu + \cdots;$$

auch diese Gleichungen können nach u und v aufgelöst werden und ergeben für diese Grössen Potenzreihen der Argumente x und y. In der Umgebung der Stelle O, für welche

$$(29.) \qquad x = y = u = v = 0,$$

ist daher eine gegenseitig eindeutige Beziehung zwischen den Werthsystemen (x, y) und (u, v) hergestellt für welche die Differentialgleichung (24.) besteht; diese lehrt unmittelbar, dass in der Umgebung von O auch $\varDelta$ eine reguläre analytische Function von x und y oder u und v ist, welche in der Stelle O selbst einen positiven Werth $\varDelta_0$ annimmt.

Hieraus folgt, dass auch der Ausdruck $U\varDelta$ nach ganzen Potenzen von u und v entwickelt werden kann und als Glieder niedrigster Dimension folgende enthält

$$\tfrac{1}{2}\varDelta_0(Lu^2 + 2Muv + Nv^2);$$

führt man die Variablen x und y ein, so bilden daher die Glieder niedrigster Dimension diejenige quadratische Form welche aus der hingeschriebenen durch Umkehrung der linearen Substitution

$$(30.) \qquad x = v - Au, \quad y = -Bu$$

entsteht, also jedenfalls auch definit und positiv ist, sodass man, indem nur Glieder von mindestens dritter Ordnung weggelassen werden, schreiben kann

$$\varDelta U = \tfrac{1}{2}(lx^2 + 2mxy + ny^2) + \cdots,$$

wobei

$$l > 0, \quad ln - m^2 > 0.$$

Unterwirft man endlich die Grössen x und y einer orthogonalen linearen Transformation Σ, so kann man bewirken, dass m verschwindet; dann ist

klar, dass die Bewegungen des Systemes S, bei denen $h=0$ ist und demnach die Gleichung (24ᵃ.) besteht, in einer gewissen Umgebung der Lage O vollständig dargestellt werden können durch die Bewegungen eines Punktes P in der Ebene, bei welchen $h=0$ ist und das Potential $U\Delta$, wenn man x und y als rechtwinklige Coordinaten des Punktes P ansieht, genau die Form hat, welche in § 1 für das Potential U vorausgesetzt wurde:

$$\Delta U = \tfrac{1}{2}(ax^2+by^2)+\cdots.$$

Nur dürfen, wegen der dort benutzten Ungleichung (1.), nach keiner orthogonalen Transformation der Variablen x und y die Gleichungen

$$(30^a.) \qquad m=0, \quad l=n$$

bestehen. Da ferner für O die Gleichungen (29.) gelten, so entspricht jeder Bewegung des Systems S, bei welcher es sich der Lage O asymptotisch annähert, eine asymptotische Bewegung des Punktes P.

Bei letzterer convergiren nach § 4 Tangente und Radiusvector, wenn t unbegrenzt wächst, gegen eine derjenigen Richtungen, welche als Hauptaxenrichtungen des Kegelschnitts

$$(31.) \qquad lx^2+2mxy+ny^2 = \text{const.},$$

oder als das gemeinsame Paar conjugirter Durchmesser der Kegelschnitte (31.) und

$$(32.) \qquad x^2+y^2 = \text{const.}$$

definirt werden können; dabei ist der Fall, dass unendlich viele solcher Paare vorhanden seien, auszuschliessen, da er nach einer Coordinatentransformation auf die Gleichungen (30ᵃ.) führen würde.

Führt man nun u und v an Stelle von x und y ein, indem man sich auf unendlich kleine Werthe der Variablen beschränkt, so bestehen die linearen Gleichungen (30.) und die Kegelschnitte (31.) und (32.) werden durch folgende Gleichungen dargestellt

$$(33.) \qquad \begin{cases} Lu^2+2Muv+Nv^2 = \text{const.}, \\ E_0u^2+2F_0uv+G_0v^2 = \text{const.} \end{cases}$$

Sieht man u und v als rechtwinklige Coordinaten an, so sind die hierdurch definirten den Curven (31.) und (32.) affin verwandt, den conjugirten Durchmessern dieser entsprechen also conjugirte Durchmesser der Curven (33.). Die diesen entsprechenden Werthe des Verhältnisses $u:v$ werden

bekanntlich durch das lineare Gleichungssystem

$$(34.)\qquad \begin{cases} Lu+Mv+\lambda(E_0u+F_0v) = 0, \\ Mu+Nv+\lambda(F_0u+G_0v) = 0 \end{cases}$$

definirt, in welchem λ jede der beiden Wurzeln der Gleichnng

$$(35.)\qquad \begin{vmatrix} L+\lambda E_0 & M+\lambda F_0 \\ M+\lambda F_0 & N+\lambda G_0 \end{vmatrix} = 0$$

bedeuten kann. Das Verhältniss derselben hat eine leicht angebbare Bedeutung; da nämlich die linken Seiten der Gleichungen (33.) durch die Transformation (30.) in Verbindung mit Σ in die Ausdrücke

$$\frac{1}{\Delta_0}(ax^2+by^2), \quad \Delta_0(x^2+y^2)$$

übergehen, so lehren bekannte Erwägungen*), dass das Verhältnis der Wurzeln der Gleichung (35.) genau $a:b$ ist. Wäre dieses $=1$, so hätten die Curven (31.) und (32.), deren erstere auch nach der Transformation Σ durch die Gleichung

$$ax^2+by^2 = \text{const.}$$

dargestellt wird, unzählige Paare conjugirter Durchmesser gemein, mithin auch die Curven (33.); daraus würde folgen

$$E_0:F_0:G_0 = L:M:N,$$

was nach dem Obigen ausdrücklich ausgeschlossen werden muss, um die Gleichungen (30*.) unmöglich zu machen.

Nimmt man speciell an, es sei

$$ds = \sqrt{Edu^2+2Fdudv+Gdv^2}$$

das Bogenelement einer Fläche Φ, so sind Edu und Gdv die Bogenelemente der Curven $v=\text{const.}$ und $u=\text{const.}$; wenn daher u und v unendlich klein sind, so sind E_0u und G_0v die schiefwinkligen Parallelcoordinaten eines Punktes der Fläche in unendlicher Nähe von O; die erste Gleichung (33.) stellt daher, wenn ihre rechte Seite unendlich klein ist, eine unendlich kleine Ellipse dar, längs deren bis auf Grössen höherer Ordnung das Potential U constant ist. Die durch die Gleichungen (34.) definirten beiden Richtungen sind daher auch diejenigen, nach welchen U von O aus im Verhältniss zum durchlaufenen Wege am stärksten und schwächsten zu-

---

*) *Baltzer,* Theorie und Anwendung der Determinanten (1881) § 14, 13. S. 209.

nimmt. Dass diese beiden Richtungen auf der Fläche Φ einen rechten Winkel bilden, ist auch ohne Infinitesimalbetrachtungen leicht ersichtlich; sind nämlich λ_1 und λ_2 die Wurzeln der Gleichung (35.), $u^{(1)}$, $v^{(1)}$ und $u^{(2)}$, $v^{(2)}$ die entsprechenden Lösungen des Systems (34.), und setzt man

$$\Omega = E_0 u^{(1)} u^{(2)} + F_0(u^{(1)} v^{(2)} + v^{(1)} u^{(2)}) + G_0 v^{(1)} v^{(2)},$$
$$\Psi = L u^{(1)} u^{(2)} + M(u^{(1)} v^{(2)} + v^{(1)} u^{(2)}) + N v^{(1)} v^{(2)},$$

so folgt leicht

$$\Psi + \lambda_1 \Omega = 0, \quad \Psi + \lambda_2 \Omega = 0$$

also, da λ_1 und λ_2 verschieden sind,

$$\Omega = 0.$$

Das ist aber die Bedingung dafür, dass auf der Fläche Φ die von O ausgehenden Richtungen, welche durch eine der Proportionen

$$u:v = u^{(\nu)}:v^{(\nu)} \qquad (\nu = 1, 2)$$

definirt werden, auf einander senkrecht stehen.

Aus diesen Erwägungen und den Resultaten des § 4 ergiebt sich auf Grund der Beziehungen, welche zwischen den Bewegungen des Systems S und des Punktes P bestehen, das folgende Theorem.

Ein materielles System S, dessen Lage durch die Parameter u und v bestimmt ist, habe die lebendige Kraft

$$T = \tfrac{1}{2}(Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2),$$

wobei E, F, G in der Umgebung der durch die Werthe $u = v = 0$ definirten Stelle O ebenso wie das Potential der wirkenden Kräfte reguläre analytische Functionen von u und v seien; letzteres habe die Form

$$U = \tfrac{1}{2}(Lu^2 + 2Muv + Nv^2) + \cdots,$$

wobei L, M, N Constante sind, die Relationen

$$L > 0, \quad LN - M^2 > 0$$

bestehen, und die weggelassenen Glieder in u und v von mindestens dritter Dimension sind, sodass O eine Lage labilen Gleichgewichts für das System S ist. Alsdann giebt es Bewegungen des Systems, bei welchen es sich der Lage O beliebig annähert, ohne sie nach endlicher Zeit zu erreichen. Nehmen E, F, G an der Stelle O die Werthe E_0, F_0, G_0 an und besteht nicht die Proportion

$$E_0 : F_0 : G_0 = L : M : N,$$

so convergirt bei jeder dieser besonderen Bewegungen das Verhältniss $u:v$

gegen einen von zwei bestimmten Grenzwerthen $(u^{(1)}:v^{(1)})$ *und* $(u^{(2)}:v^{(2)})$, *für welche die Gleichung*

$$Eu^{(1)}v^{(2)}+F_0(u^{(1)}v^{(2)}+u^{(1)}v^{(2)})+G_0u^{(1)}v^{(2)} = 0$$

besteht. Sind x, y *rechtwinklige Coordinaten, so sind*

$$x:y=u^{(1)}:v^{(1)}, \quad x:y=u^{(2)}:v^{(2)}$$

die Gleichungen der gemeinsamen conjugirten Durchmesser der Kegelschnitte

$$Lx^2+2Mxy+Ny^2 = \text{const.}, \quad E_0x^2+2F_0xy+G_0y^2 = \text{const.}$$

Speciell sei S ein materieller Punkt von der Masse Eins, und

$$\sqrt{E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2} = ds$$

das Bogenelement einer Fläche, auf der er sich unter der Wirkung der vom Potential U herrührenden Kräfte bewegt; dann convergirt bei asymptotischer Annäherung des Punktes S an die labile Gleichgewichtslage O die Richtung der Bahncurve gegen eine der Axenrichtungen der unendlich kleinen Ellipsen, welche die Linien $U=\text{const.}$ *in der Nähe der Stelle O bilden, also eine der Richtungen, nach denen von O aus das Potential im Verhältniss zum durchlaufenen Wege am stärksten und am schwächsten zunimmt.*

Einen Theil dieses Theorems sowie der folgenden Resultate habe ich kürzlich ohne vollständigen Beweis publicirt*).

§ 6.

Ein besonderes System asymptotischer Bewegungen.

Nachdem wir an einem ersten Resultat das Uebertragungsprincip schätzen gelernt haben, welches einen sehr allgemeinen Typus von Problemen mit zwei Graden der Bewegungsfreiheit auf die Bewegung eines Punktes in der Ebene zurückführt, wenden wir uns wieder letzterer Aufgabe unter den in § 1 eingeführten Voraussetzungen zu, um eine Uebersicht der Gesammtheit aller möglichen asymptotischen Bewegungen zu gewinnen.

Nach *Poincaré* giebt es, wie im § 5 unseres ersten Aufsatzes näher auseinandergesetzt, wenn $\sqrt{a:b}$ nicht eine positive ganze Zahl und grösser als Eins ist, ein gewisses System von Bewegungen der bezeichneten Art, für

*) *Kneser,* Zwei Sätze über Bewegungen in der Nähe labiler Gleichgewichtslagen, Sitzungsberichte der Dorpater Naturforschergesellschaft Bd. XI Heft 2 (1896).

welche folgende Gleichungen bestehen:

$$(36.)\qquad \begin{cases} 2\sqrt{a}x = -\alpha e^{-t\sqrt{a}} + \mathfrak{P}^{(1)}(\alpha e^{-t\sqrt{a}},\ \beta e^{-t\sqrt{b}}), \\ 2\sqrt{b}y = -\beta e^{-t\sqrt{b}} + \mathfrak{P}^{(2)}(\alpha e^{-t\sqrt{a}},\ \beta e^{-t\sqrt{b}}); \end{cases}$$

hierin bedeuten $\mathfrak{P}^{(\nu)}$ Potenzreihen, welche nur Glieder von mindestens zweiter Dimension enthalten, α und β willkürliche Constante, und die Quadratwurzeln sind, wie fortan immer, positiv zu nehmen. Aus jenen Gleichungen ergiebt sich, wenn β von Null verschieden ist,

$$\sqrt{\frac{a}{b}}\,\frac{x}{y} = \frac{-\alpha e^{-t(\sqrt{a}-\sqrt{b})} + e^{t\sqrt{b}}\mathfrak{P}^{(1)}(\alpha e^{-t\sqrt{a}},\ \beta e^{-t\sqrt{b}})}{-\beta + e^{t\sqrt{b}}\mathfrak{P}^{(2)}(\alpha e^{-t\sqrt{a}},\ \beta e^{-t\sqrt{b}})},$$

also, da $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ positiv ist,

$$\lim \frac{x}{y} = 0.$$

Wenn dagegen β verschwindet, α aber nicht, so hat man

$$\sqrt{\frac{b}{a}}\,\frac{y}{x} = \frac{e^{t\sqrt{a}}\mathfrak{P}^{(2)}(\alpha e^{-t\sqrt{a}},\ 0)}{-\alpha + e^{+t\sqrt{a}}\mathfrak{P}^{(1)}(\alpha e^{-t\sqrt{a}},\ 0)},$$

mithin

$$\lim \frac{y}{x} = 0.$$

Für $\beta = 0$ erhält man eine von zwei Bahncurven $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$, je nachdem α positiv oder negativ ist; denn bei zwei Werthen von α, welche gleiches Zeichens sind, reduciren sich die entsprechenden Gleichungen (36.) auf einander, indem man den Zeitpunkt $t = 0$ verlegt. Die Bahncurven der übrigen unter (36.) definirten Bewegungen, bei welchen $|\beta|$ positiv ist, bezeichnen wir durch $\mathfrak{B}_0$; sie ergeben für $t = +\infty$ als Grenzlage der Tangente und des Radiusvectors die y-Axe, $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ dagegen die x-Axe.

Die orthogonalen Trajectorien dieser Linien $\mathfrak{B}$ können, wie ich a. a. O. gezeigt habe, durch eine Gleichung

$$(37.)\qquad \mathfrak{R} = -\tfrac{1}{2}(\sqrt{a}x^2 + \sqrt{b}y^2) + \cdots = \text{const.}$$

dargestellt werden, in welcher $\mathfrak{R}$ eine convergente Potenzreihe der Argumente x und y bedeutet, ihre Glieder niedrigster Dimension die hingeschriebenen sind, und die Differentialgleichung

$$(38.)\qquad \left(\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial y}\right)^2 = \mathfrak{R}_x^2 + \mathfrak{R}_y^2 = 2U$$

besteht. Aus der Form der Reihe $\mathfrak{R}$ kann man ähnlich, wie dies für die Niveaulinien im § 1 des ersten Aufsatzes geschehen ist, schliessen, dass die

Linien (37.) in einer gewissen Umgebung des Punktes O einfache geschlossene Curven von endlicher, nicht verschwindender Krümmung sind, und ebenso wie dies die Curven $\mathfrak{B}$ thun, ein gewisses den Punkt O umschliessendes Gebiet genau einfach bedecken. Ein solches möge etwa durch eine bestimmte Linie (37.) begrenzt gedacht und durch Γ bezeichnet werden. In jedem seiner Punkte mit Ausnahme von O sei τ die Richtung der im Sinne wachsender Werthe von $\mathfrak{R}$ gezogenen Tangente der Curve $\mathfrak{B}$; bezeichnet man, wie fortan immer, durch die eingeklammerten Zeichen zweier Richtungen z. B. $(x\tau)$ den zwischen ihnen liegenden concaven Winkel, durch x und y die positiven Coordinatenrichtungen, so hat man

$$(39.)\qquad \cos(x\tau)=\frac{\mathfrak{R}_x}{\sqrt{\mathfrak{R}_x^2+\mathfrak{R}_y^2}}=\frac{\mathfrak{R}_x}{\sqrt{2U}},\quad \cos(y\tau)=\frac{\mathfrak{R}_y}{\sqrt{2U}}.$$

Aus der Form der Reihe $\mathfrak{R}$ folgt weiter, dass die Grösse

$$-\mathfrak{R}_{xx}\mathfrak{R}_{yy}+\mathfrak{R}_{xy}^2,$$

wenn x und y unbegrenzt abnehmen, sich der negativen Grenze $-\sqrt{ab}$ annähert; in dem Ausdruck

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}'' &= \mathfrak{R}_{xx}x'^2+2\mathfrak{R}_{xy}x'y'+\mathfrak{R}_{yy}y'^2+\mathfrak{R}_x x''+\mathfrak{R}_y y''\\ &= \mathfrak{R}_{xx}x'^2+2\mathfrak{R}_{xy}x'y'+\mathfrak{R}_{yy}y'^2+U_x\mathfrak{R}_x+U_y\mathfrak{R}_y\end{aligned}$$

bilden daher die drei ersten Glieder eine definite, negative quadratische Form, sobald x und y hinreichend klein sind. Ebenso ist unter dieser Bedingung die Summe der letzten beiden Glieder negativ; denn man hat

$$\begin{aligned}U_x\mathfrak{R}_x+U_y\mathfrak{R}_y &= -a\sqrt{a}x^2-b\sqrt{b}y^2+\cdots\\ &= -r^2(a\sqrt{a}\cos^2\varphi+b\sqrt{b}\sin^2\varphi)+\cdots,\end{aligned}$$

und die weggelassenen Glieder bilden ein Aggregat von der Form r^3R, wenn durch R eine Reihe von derselben Beschaffenheit wie im § 3 bezeichnet wird; dabei bleibt der Coefficient von $-r^2$ oberhalb der Grenze $b\sqrt{b}$. Bei hinreichender Beschränkung des Gebietes Γ ist daher die Grösse $\mathfrak{R}''$ negativ und hieraus schliesst man wie beim Beweise des Satzes VII:

XV. Das Gebiet Γ kann so angenommen werden, dass in ihm die Grösse $\mathfrak{R}''$ stets negativ ist und bei jeder asymptotischen Bewegung die Grösse $\mathfrak{R}$ beständig zunehmend gegen den Werth Null convergirt; die Bewegung längs einer Bahncurve $\mathfrak{B}$ hat daher stets die Richtung τ, nie die entgegengesetzte.

Gäbe es nun eine asymptotische Bewegung des Punktes P, deren Bahncurve $\mathfrak{C}$ ist und mit keiner Curve $\mathfrak{B}$ zusammenfällt, und wäre σ die Richtung dieser Bewegung, sodass

$$\cos(x\sigma) = \frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}, \quad \cos(y\sigma) = \frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}},$$

so würde nach (39.) und den elementaren Formeln des § 1 folgen

$$(40.) \qquad \pm\sin(\sigma\tau) = \frac{x'\mathfrak{R}_y - y'\mathfrak{R}_x}{\sqrt{x'^2+y'^2}\sqrt{\mathfrak{R}_x^2+\mathfrak{R}_y^2}} = \frac{x'\mathfrak{R}_y - y'\mathfrak{R}_x}{2U}.$$

Es convergiren aber für $t = +\infty$ nach § 4 der Radiusvector und die Tangente des Punktes P gegen eine der Coordinatenaxen als Grenzlage; es sei dies z. B. die y-Axe, sodass die Gleichungen

$$(40^a.) \qquad \lim\frac{x}{y} = \lim\frac{x'}{y'} = 0$$

bestehen. Aus ihnen folgt sofort

$$(41.) \qquad \lim\frac{x}{r} = 0, \quad \lim\frac{y}{r} = 1, \quad \lim\frac{2U}{r^2} = \lim\frac{2U}{y^2} = b,$$

und ferner

$$(42.) \qquad \lim\left(\frac{rr'}{yy'}\right) = \lim\left(1+\frac{x}{y}\frac{x'}{y'}\right) = 1, \quad \lim\frac{r'}{y'} = 1.$$

Andererseits ergiebt die Gleichung der lebendigen Kraft

$$\left(\frac{r'}{r}\right)^2 + \varphi'^2 = a\left(\frac{x}{r}\right)^2 + b\left(\frac{y}{r}\right)^2 + \frac{2}{r^2}\mathfrak{P}(x, y),$$

und nach (41.), da nach § 4 die Grösse φ' für $t = +\infty$ unendlich klein wird,

$$\lim\left(\frac{r'}{r}\right)^2 = b, \quad \lim\frac{r'}{r} = -\sqrt{b}$$

mithin nach (42.)

$$(43.) \qquad \lim\frac{y'}{r} = -\sqrt{b} = \lim\frac{y'}{y}.$$

Die Gleichung (40.) ergiebt somit

$$(44.) \quad \lim(\pm\sin(\sigma\tau)) = \lim\frac{x'\mathfrak{R}_y - y'\mathfrak{R}_x}{by^2} = \lim\frac{x'\mathfrak{R}_y - y'\mathfrak{R}_x}{br^2}.$$

Nun gilt die Gleichung

$$(45.) \qquad \lim\frac{\mathfrak{R}_x}{r} = 0,$$

da die Entwickelung von $\mathfrak{R}_x$ mit $-\sqrt{b}x$ beginnt, und gegen dieses Glied alle andern x enthaltenden verschwinden, die von x freien Glieder aber

den Factor y^2 enthalten und nach (41.) die Gleichung

$$\lim \frac{y^2}{r} = 0$$

besteht. Verbindet man die Gleichungen (43.) und (44.), so sieht man, dass

$$\lim \frac{y'\mathfrak{R}_x}{r^2} = 0. \tag{46.}$$

Weiter kann man schreiben

$$\frac{x'\mathfrak{R}_y}{y^2} = \frac{x'}{y} \cdot \frac{-\sqrt{b}y+\cdots}{y} = \frac{y'}{y} \cdot \frac{x'}{y'} \cdot \frac{-\sqrt{b}y+\cdots}{y};$$

im Zähler des letzten Bruches rechts können nach (40*.) alle weggelassenen Glieder gegen das erste vernachlässigt werden, der erste Bruch hat nach (43.) einen endlichen Grenzwerth für $t = +\infty$, während der mittlere verschwindet; somit folgt

$$\lim \frac{x'\mathfrak{R}_y}{y^2} = \lim \frac{x'\mathfrak{R}_y}{r^2} = 0,$$

also nach (44.) und (46.)

$$\lim(\pm \sin(\sigma\tau)) = 0.$$

Dies Resultat gilt auch, wenn in der Argumentation x und y vertauscht werden. Der Winkel $(\sigma\tau)$ convergirt daher gegen einen der Grenzwerthe 0 und π; letzterer ist aber auszuschliessen, da die Grösse

$$\cos(\sigma\tau) = \frac{x'\mathfrak{R}_x+y'\mathfrak{R}_y}{\sqrt{x'^2+y'^2}\sqrt{\mathfrak{R}_x^2+\mathfrak{R}_x^2}} = \frac{\mathfrak{R}'}{2U},$$

wenn x und y hinlänglich klein geworden sind, positiv, der concave Winkel $(\sigma\tau)$ also spitz ist. Eine unmittelbare Folge dieser Erwägungen ist folgender Satz.

XVI. Wenn es eine asymptotische Bewegung giebt, deren Bahn nicht durch eine der Linien $\mathfrak{B}$ dargestellt wird, so bildet die Richtung dieser Bewegung mit der Richtung τ einen concaven Winkel, der jedenfalls zu gewissen Zeiten und in beliebiger Nähe der Gleichgewichtslage O spitz ist und abnimmt; für $t = +\infty$ wird dieser Winkel unendlich klein.

Ein ähnliches Resultat ergiebt sich für eine nicht asymptotische Bewegung des Punktes P, bei welcher er sich in einer gewissen Lage Q tangential zur Linie $\mathfrak{R} = \text{const.}$ bewegt und $h = 0$ ist. An einer solchen Stelle hat man

$$\mathfrak{R}' = x'\mathfrak{R}_x+y'\mathfrak{R}_y = 0,$$

und wenn der Abstand OQ hinreichend klein ist, geht $\mathfrak{R}'$ von positiven zu negativen Werthen über, da nach dem Satze XV die Grösse $\mathfrak{R}''$

negativ ist. Wenn nun σ_0 die Richtung des Punktes P bei der betrachteten Bewegung ist, so ergiebt sich

$$\cos(\sigma_0\tau) = \frac{x'\mathfrak{R}_x + y'\mathfrak{R}_y}{\sqrt{x'^2+y'^2}\sqrt{\mathfrak{R}_x^2+\mathfrak{R}_y^2}},$$

oder nach der Gleichung der lebendigen Kraft und der Differentialgleichung (38.)

$$\cos(\sigma_0\tau) = \frac{\mathfrak{R}'}{2U}.$$

Da nun U positiv ist in der Nähe der Stelle O, so ist der Winkel $(\sigma_0\tau)$, bevor die Lage Q erreicht wird, spitz, nachher stumpf und nimmt zu. D. h.

XVII. Giebt man dem Punkte P in der Lage Q, welche dem Innern des Gebiets Γ angehöre, tangential zur Curve $\mathfrak{R} = \text{const.}$ eine solche Geschwindigkeit, dass bei seiner Bewegung $h = 0$ ist, so nimmt in der Umgebung der Lage Q der concave Winkel zwischen der Bewegungsrichtung des Punktes P und der Richtung τ zu, und ist daher stumpf, nachdem die Lage Q verlassen ist, spitz, bevor sie erreicht wird.

§ 7.

Anwendung des *Gauss*schen Krümmungsmaasses auf das dynamische Problem.

Nach diesen Vorbereitungen gehen wir zu einer neuen Anwendung des Princips der kleinsten Action über. Nach diesem können, wie schon in § 5 bemerkt wurde, die Bahncurven aller Bewegungen, für welche $h = 0$, durch die Gleichung

$$\delta\int\sqrt{U}\sqrt{dx^2+dy^2} = 0$$

definirt werden; ordnet man daher jeder Lage des Punktes P einen Punkt der Fläche Θ zu, auf welcher das Bogenelement die folgende Form hat

$$ds = \sqrt{U(dx^2+dy^2)},$$

und zwar den Punkt, für welchen x und y dieselben Werthe haben wie in P, so entsprechen jenen Bahncurven die geodätischen Linien der Fläche Θ, und diese ist conform auf die Ebene abgebildet. Dabei ist jedoch zu beachten, dass dem Punkte O ein im allgemeinen singulärer Punkt der Fläche entspricht, da in ihm alle Coefficienten der quadratischen Differentialform ds^2 verschwinden. Für das Krümmungsmaass der Fläche Θ gilt, wie die ursprüngliche Formel von *Gauss**) lehrt, wenn man in ihr x und y für p

*) *Gauss*, Disquisitiones generales circa superficies curvas art. 11. Werke (1880) Bd. IV S. 236.

und q einführt und $F = 0$, $E = G = U$ setzt, die Formel

$$4kU^4 = 2U(U_x^2+U_y^2)-2U^2(U_{xx}+U_{yy})$$

oder

$$k = \frac{U_x^2+U_y^2-U(U_{xx}+U_{yy})}{2U^3}.$$

Entwickelt man den Zähler dieses Bruches nach Potenzen von x und y, so sind die Glieder niedrigster Dimension

$$\tfrac{1}{2}(a-b)(ax^2-by^2).$$

Dieser Ausdruck ist positiv wie $a-b$, wenn $y = 0$, negativ, wenn $x = 0$; schreibt man ihn in der Form

$$\text{(47.)} \qquad \frac{r^2}{2}(a-b)(a\cos^2\varphi-b\sin^2\varphi),$$

so bleibt der Factor von r^2 oberhalb einer gewissen positiven Grenze, wenn $\sin\varphi$, unterhalb einer gewissen negativen, wenn $\cos\varphi$ auf ein hinreichend kleines den Werth Null umfassendes Intervall beschränkt wird. In beiden Fällen hat der Zähler des Ausdruckes k, wenn r hinreichend klein ist, das Zeichen der Grösse (47.), da alle übrigen Glieder den Factor r^3 haben und, wenn man die Bezeichnung des § 3 benutzt, zu einer Reihe r^3R zusammengefasst werden können. Wenn z. B. $\sin\varphi$ im ersten, $\cos\varphi$ im zweiten jener Fälle zwischen den Grenzen $\pm g$, der Punkt P also nach § 1 in einem der Gebiete ξ, η verbleibt, so ist k im ersten Falle stets positiv, im zweiten stets negativ. Da nun nach § 4 der Punkt P bei jeder asymptotischen Bewegung schliesslich ein gewisses der Gebiete $\xi_\pm$, $\eta_\pm$ nicht mehr verlässt, so hat man folgenden Satz.

XVIII. Bei jeder asymptotischen Bewegung des Punktes P ist von einem gewissen Zeitpunkte ab in dem entsprechenden Punkte der Fläche Θ das Krümmungsmaass entweder stets positiv oder stets negativ.

Um dieses Resultat benutzen zu können, schieben wir zunächst eine allgemeine Hülfsbetrachtung ein (Fig. 7)*). Es sei Q ein beliebiger Punkt des Gebietes Γ und liege etwa auf der Curve

$$\mathfrak{R} = c,$$

sodass c eine negative Constante ist. Von ihr seien c_1 und c_2 beliebig wenig verschieden und es sei

$$c_1 < c < c_2 < 0.$$

---

*) Diese Figur wie die folgende sind von schematischer Bedeutung. Die Linien $\mathfrak{B}$ sind als Gerade gezeichnet, was sie in dem Falle $a = b$ auch wirklich sein können.

Die Linien

$$\mathfrak{R} = c_1, \quad \mathfrak{R} = c_2$$

mögen von der durch Q gehenden Curve $\mathfrak{B}$ in den Punkten Q_1 und Q_2 geschnitten werden; auf der ersten jener beiden sei A_1B_1 ein beliebig kleiner, den Punkt Q_1 umfassender Bogen. Die durch A_1 und B_1 gehenden Curven $\mathfrak{B}$ mögen die Curve $\mathfrak{R} = c_2$ in den Punkten A_2 und B_2 schneiden; da nun keine zwei Linien $\mathfrak{R} =$ const. und keine zwei Curven $\mathfrak{B}$ sich schneiden, jede der letzteren aber mit jeder der ersteren nach dem Satze XV einen einzigen Punkt gemein hat, so sind A_1, B_1, B_2, A_2 die Ecken eines krummlinigen Vierecks (Q), dessen Umfang sich selbst nicht schneidet, dessen Inneres den Punkt Q enthält und dessen Dimensionen beliebig klein sein können. Ist ferner V_1 irgend ein Punkt des Bogens A_1B_1, so schneidet die durch ihn gehende Curve $\mathfrak{B}$ den Bogen A_2B_2, da sie in das Viereck (Q) hineingeht und es an keiner anderen Seite verlassen kann; der Schnittpunkt sei V_2. Der Bogen V_1V_2 theilt daher das Viereck in zwei Hälften, die als erste und zweite unterschieden werden mögen; die erste liege an der Seite A_1A_2.

Die Halbgeraden, die von den Punkten des Bogens V_1V_2 in die erste Hälfte hinein gerichtet sind, können in einander stetig übergeführt werden, ohne inzwischen den Bogen zu berühren; sie sind daher gegen τ, d. h. eine bestimmte Richtung der Tangente alle in demselben Sinne gedreht nach der in § 1 gegebenen Definition. Im entgegengesetzten Sinne sind die nach der zweiten Hälfte weisenden Richtungen gegen τ gedreht. Wenn daher eine Curve, deren Tangente sich stetig ändert, von einem Punkte durchlaufen wird, der seine Bewegung auf dem Bogen V_1V_2 beginnt und endigt und das Gebiet (Q) nicht verlässt, so ist die Bewegungsrichtung gegen τ zu Anfang in dem einen, zu Ende in dem anderen Sinne gedreht, muss also inzwischen mindestens einmal mit τ zusammengefallen oder entgegengesetzt gewesen sein. Weiss man daher von einer das Gebiet (Q) durchsetzenden Curve, dass sie keine Linie $\mathfrak{B}$ berührt, so hat sie mit keinem Bogen V_1V_2 mehr als einen Punkt gemein. Wird eine solche Curve von einem Punkte V in bestimmter Richtung durchlaufen, so ist seine Bewegungsrichtung gegen die Richtung τ stets in demselben Sinne gedreht; der Punkt V geht entweder immer von der ersten in die zweite oder immer von der zweiten in die erste der Hälften, welche der jeweils durch V gehende Bogen V_1V_2 definirt.

Diese allgemeine Betrachtung wenden wir an auf die Bahncurven zweier Bewegungen des Punktes P, bei welchen $h = 0$ ist, die Curve $\mathfrak{C}$ und die Bahncurve der im Satze XVII definirten Bewegung, welche durch $\mathfrak{C}_0$ bezeichnet und vom Punkte $\bar{P}$, dessen Masse die Einheit ist, in der Richtung σ_0 durchlaufen werde. Beide Curven berühren keine der Linien $\mathfrak{B}$; ist daher Q ein Punkt der Curve $\mathfrak{C}$ und beschränkt man das Viereck (Q) hinreichend, so kann in seinem Innern jeder Lage von P eine einzige Lage von $\bar{P}$ so zugeordnet werden, dass beide Punkte demselben Bogen $V_1 V_2$ angehören. Wenn nun, was man annehmen darf, die Richtung σ_0 im Punkte Q nach derselben der durch den Bogen $Q_1 Q_2$ definirten Hälften des Vierecks Q hineinweist wie die Richtung σ, so gilt nach dem Obigen dasselbe in irgend zwei entsprechenden Punkten P und $\bar{P}$, d. h. in ihnen zeigen die Richtungen σ und σ_0 nach derselben der Hälften hinein, in welche das Gebiet (Q) durch den die Punkte P und $\bar{P}$ enthaltenden Bogen $V_1 V_2$ zerlegt wird. Betrachtet man also eine Anzahl von Lagen des Punktes P in der Reihenfolge, in welcher sie bei der natürlichen Bewegung längs der Curve $\mathfrak{C}$ erreicht werden, so folgen die entsprechenden Punkte $\bar{P}$ ebenfalls so aufeinander, wie sie bei der freien Bewegung des Punktes $\bar{P}$ unter dem Einfluss der wirkenden Kraft erreicht werden, und die Richtung σ_0 geht in jeder dieser Lagen nach der nächstfolgenden hin.

Speciell seien P_1, P_2, P_3, P_4 (Fig. 8) vier in dieser Reihenfolge erreichte Lagen des Punktes P; zwischen P_2 und P_3 liege der Punkt Q, in welchem zwei entsprechende Punkte P und $\bar{P}$ zusammenfallen. Allgemein sei in der angegebenen Weise $\bar{P}_\nu$ dem Punkte P_ν zugeordnet; dann liegen im Innern des Gebiets (Q) die beiden krummlinigen Vierecke $P_1 P_2 \bar{P}_2 \bar{P}_1$ und $P_3 P_4 \bar{P}_4 \bar{P}_3$, deren Seiten von Bahncurven solcher Bewegungen gebildet werden, für welche $h = 0$ ist; die entsprechenden Linien auf der Fläche Θ sind also geodätische. Die Beziehung zwischen der Ebene, in welcher die Bewegung stattfindet, und der Fläche Θ ist nun, wie oben bemerkt, eine conforme; die Winkel der auf dieser Fläche definirten geodätischen Vierecke sind also gleich den entsprechenden der Vierecke $P_1 P_2 \bar{P}_2 \bar{P}_1$ und $P_3 P_4 \bar{P}_4 \bar{P}_3$. Die inneren Winkel dieser sind, da σ und σ_0 die Bewegungsrichtungen auf den Curven $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}_0$ sind, den Winkeln $(\sigma\tau)$, $(\sigma_0\tau)$ in den betreffenden Ecken oder den Supplementen dieser Winkel gleich.

Um hierüber völlig genaue Aussagen machen zu können, gehen wir davon aus, dass die Function $\mathfrak{R}$ in $\bar{P}_1$ grösser ist als in P_1. Denn schneidet die beide Punkte verbindende Linie $\mathfrak{B}$ die Curve $\mathfrak{R}=c$ im Punkte W, so wird, da letztere und die Curve $\mathfrak{C}_0$ sich berühren, der Abstand $W\bar{P}_1$ unendlich klein gegen QP_1 und QW, sobald man den Punkt P_1 gegen die Lage Q convergiren lässt. Im Punkte P_1 ist aber der Werth von $\mathfrak{R}$, da er nach XV beständig zunimmt, kleiner als in Q und W, und die Differenz wird von derselben Ordnung wie die Strecke QP_1 unendlich klein; somit ist $\mathfrak{R}$ auch im Punkte $\bar{P}_1$ kleiner als im Punkte P_1, sobald man alle Punkte P hinreichend nahe bei Q angenommen hat. Dasselbe Verhältniss findet für die Punkte P_2 und $\bar{P}_2$ statt, während in P_3 und P_4 die Function $\mathfrak{R}$ schon deshalb grösser ist als beziehentlich in $\bar{P}_3$ und $\bar{P}_4$, weil sie in diesen kleiner als c ist. In den Punkten P_1, P_2, $\bar{P}_3$, $\bar{P}_4$ stimmt daher die Richtung wachsender Werthe von $\mathfrak{R}$, d. h. die Richtung τ überein mit der Richtung einer in dem betreffenden Punkte beginnenden Vierecksseite; in den Punkten P_3, P_4, $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$ findet das Entgegengesetzte statt. Ferner folgt aus der Definition der Richtungen σ und σ_0, dass in den Punkten P_1, $\bar{P}_1$, P_3, $\bar{P}_3$ die Richtung σ oder σ_0 übereinstimmt, in den Punkten P_2, $\bar{P}_2$, P_4, $\bar{P}_4$ entgegengesetzt ist mit der Richtung einer in dem betreffenden Punkte beginnenden Vierecksseite. Nennt man daher $(\sigma\tau)_\nu$ und $(\sigma_0\tau)_\nu$ die Winkel $(\sigma\tau)$ und $(\sigma_0\tau)$ in den Punkten P_ν und $\bar{P}_\nu$, so sind die inneren Winkel des Vierecks $P_1P_2\bar{P}_2\bar{P}_1$

$$(\sigma\tau)_1, \quad \pi-(\sigma\tau)_2, \quad (\sigma_0\tau)_2, \quad \pi-(\sigma_0\tau)_1;$$

die inneren Winkel des Vierecks $P_3P_4\bar{P}_4\bar{P}_3$

$$\pi-(\sigma\tau)_3, \quad (\sigma\tau)_4, \quad \pi-(\sigma_0\tau)_4, \quad (\sigma_0\tau)_3.$$

Die Regel, nach welcher diese Ausdrücke erhalten werden, kann folgendermassen formulirt werden. Dann und nur dann, wenn in einer Ecke von den in ihr definirten Richtungen σ und τ oder σ_0 und τ die eine entgegengesetzt, die andere gleich ist der Richtung einer von der Ecke ausgehenden Vierecksseite, ist der innere Winkel das Supplement des Winkels $(\sigma\tau)$ oder $(\sigma_0\tau)$.

Nach dem Satze XVI kann nun der Punkt Q auf der Curve $\mathfrak{C}$ so gewählt werden, dass in seiner Umgebung der Winkel $(\sigma\tau)$ abnimmt,

während nach XVII der Winkel $(\sigma_0\tau)$ zunimmt; man darf also annehmen

$$(\sigma_0\tau)_1 < (\sigma_0\tau)_2 < (\sigma_0\tau)_3 < (\sigma_0\tau)_4,$$
$$(\sigma\tau)_1 > (\sigma\tau)_2 > (\sigma\tau)_3 > (\sigma\tau)_4.$$

Daraus folgt, dass die Summe der inneren Winkel des Vierecks $P_1P_2\bar{P}_2\bar{P}_1$, also die Grösse

$$2\pi+[(\sigma\tau)_1-(\sigma\tau)_2]+[(\sigma_0\tau)_2-(\sigma_0\tau)_1]$$

grösser als 2π ist, während der entsprechende Ausdruck für das Viereck $P_3P_4\bar{P}_4\bar{P}_3$, nämlich

$$2\pi-[(\sigma\tau)_3-(\sigma\tau)_4]-[(\sigma_0\tau)_4-(\sigma_0\tau)_3]$$

offenbar kleiner als 2π ist. Auf der Fläche Θ liegen daher in beliebiger Nähe des dem Punkte Q entsprechenden Punktes Q_0 sowohl geodätische Vierecke, deren Winkelsumme grösser, als auch solche, deren Winkelsumme kleiner ist als vier Rechte. Nach dem Satze XVIII ist aber das Krümmungsmaass der Fläche im Punkte Q_0 entweder positiv oder negativ; das erhaltene Resultat steht daher im Widerspruch mit einem berühmten Theorem von *Gauss*, nach welchem die Summe der Winkel eines geodätischen Vierecks, in dessen Inneren das Krümmungsmaass nicht verschwindet, grösser oder kleiner als vier Rechte ist, je nachdem das Krümmungsmaass positiv oder negativ ist*).

Die Annahme, von der wir ausgingen, eine asymptotische Bewegung finde statt in einer Bahncurve $\mathfrak{C}$, welche nicht zu den Curven $\mathfrak{B}$ gehört, ist also unhaltbar; ***durch die Gleichungen*** (36.) ***werden alle möglichen asymptotischen Bewegungen dargestellt.***

Eine bedeutende Verallgemeinerung dieses Resultats ergiebt das im § 5 erörterte Uebertragungsprincip. Bedeutet U wie dort, abweichend von der zuletzt gebrauchten Bezeichnungsweise, das Potential bei der Bewegung eines Punktes auf der Fläche Φ oder des Systems S, also eine Function von u und v, so hat die Grösse $\varLambda U$, wenn man sie nach (28ª.) durch x und y ausdrückt und diese Grössen vielleicht noch einer orthogonalen linearen Transformation unterwirft, nach § 5 genau dieselbe Form wie das Potential U bei der Bewegung des Punktes P in der Ebene. Man kann daher die soeben erhaltene Sätze auf die Bewegungsgleichungen

(48.) $$x'' = \frac{\partial(U\varLambda)}{\partial x}, \quad y'' = \frac{\partial(U\varLambda)}{\partial y}$$

*) *Gauss*, a. a. O. Art. 20 S. 246.

anwenden; an Stelle der Gleichung (38.) tritt dann die folgende

$$(49.)\qquad \mathfrak{R}_x^2+\mathfrak{R}_y^2 = 2U\Delta.$$

Nun kann $\mathfrak{R}$, bei der Natur des zwischen den Variablen x, y einerseits und u, v andererseits bestehenden Zusammenhangs, auch nach Potenzen von u und v entwickelt werden; die Gleichung (49.) transformirt sich dann in die Gestalt

$$(50.)\qquad \frac{1}{EG-F^2}\Big[G\Big(\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial u}\Big)^2-2F\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial u}\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial v}+E\Big(\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial v}\Big)^2\Big] = 2U.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist nämlich, wie bekannt und schon aus den Formeln von *Gauss**) für die Transformation einer quadratischen Differentialform ersichtlich ist, eine Covariante der Form ds^2; d. h. geht diese durch Einführung neuer Variablen in die Form

$$\bar{E}\,d\bar{u}^2+2\bar{F}\,d\bar{u}\,d\bar{v}+\bar{G}\,d\bar{v}^2$$

über, so wird jener Ausdruck, auch wenn $\mathfrak{R}$ eine beliebige Function ist,

$$\frac{1}{\bar{E}\bar{G}-\bar{F}^2}\Big[\bar{G}\Big(\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial\bar{u}}\Big)^2-2\bar{F}\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial\bar{u}}\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial\bar{v}}+\bar{E}\Big(\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial\bar{v}}\Big)^2\Big],$$

also wenn x und y die neuen Variablen sind, und demnach

$$\bar{E}=\bar{G}=\Delta,\quad \bar{F}=0,$$

gesetzt wird,

$$\frac{1}{\Delta}\Big[\Big(\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial x}\Big)^2+\Big(\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial y}\Big)^2\Big],$$

sodass die Differentialgleichungen (49.) und (50.) in der That aus einand- entstehen. Bedenkt man noch, wie im § 5, dass jeder asymptotischen B- wegung, die den Gleichungen (48.) gemäss vor sich geht, eine solche e- spricht, bei welcher das System S sich der Lage O asymptotisch annä- und umgekehrt; dass ferner, wenn man entwickelt

$$U\Delta = \tfrac{1}{2}(ax^2+by^2)+\cdots,$$

das Verhältniss $a:b$ dem Verhältniss der Wurzeln der Gleichung gleich ist, so ergiebt sich folgendes Theorem.

Fügt man zu den Voraussetzungen des Theorems am Schlusse d- noch die weitere, dass nicht die grössere Wurzel der Gleichung

$$\begin{vmatrix} E_0+\lambda L & F_0+\lambda M \\ F_0+\lambda M & G_0+\lambda N \end{vmatrix} = 0$$

*) *Gauss*, a. a. O. Art. 21 S. 248.

ein ganzes Vielfaches der kleineren sei, so kann die Gesammtheit aller Bewegungen, bei denen das System S sich der labilen Gleichgewichtslage O asymptotisch annähert, in folgender Weise charakterisirt werden. Es giebt eine gewisse nach ganzen positiven Potenzen von u und v entwickelbare Lösung $\mathfrak{R}$ *der Jacobi-Hamiltonschen Differentialgleichung* (50.) *von der Beschaffenheit, dass bei jenen Bewegungen immer die Beziehung*

$$du:dv = \frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial u}:\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial v}$$

besteht. Von jeder Lage aus, die einer gewissen Umgebung der Stelle O angehört, kann das System S auf eine einzige Weise so in Bewegung gesetzt werden, dass es für $t=+\infty$ *gegen die Grenzlage O convergirt.*

Ist speciell S derselbe materielle Punkt wie in § 5, *so sind die einzigen Bahncurven, längs deren er sich der Lage O annähert, die orthogonalen Trajectorien der Linien* $\mathfrak{R} = const.$ *Jene Bahncurven bedecken eine gewisse Umgebung der Gleichgewichtslage O genau einfach; zuletzt haben zwei von ihnen die Richtung der kleinen, die übrigen die Richtung der grossen Axe jener im* § 5 *definirten unendlich kleinen Ellipse* $U = const.$

Als Functionen der Zeit sind bei den bezeichneten Bewegungen u und v entwickelbar nach ganzen positiven Potenzen zweier Exponentialgrössen, deren Exponenten der Zeit proportional sind.

Wenn $\sqrt{a:b}$ eine ganze Zahl ist, so können, wie aus Sätzen von *Ljapunoff* und *Horn**) folgt, den Gleichungen (36.) analoge aufgestellt werden, in welchen aber neben den Exponentialgrössen ganze rationale Functionen von t als Coefficienten auftreten, sodass man ein gewisses System von asymptotischen Bewegungen dargestellt hat, aber zunächst nicht weiss, ob es noch andere giebt. Um dies nach unserer Methode zu entscheiden, müsste man die Reihe $\mathfrak{R}$, welche als rein formale Lösung der Gleichung (38.) stets gebildet werden kann und, wenn $\sqrt{a:b}$ keine ganze Zahl ist, nach § 5 unseres ersten Aufsatzes convergirt, auch für ganzzahlige Werthe von $\sqrt{a:b}$ als convergent nachweisen. Ob das möglich ist, muss zunächst dahingestellt bleiben; ebenso bleibe der leichter zu erledigende Fall $a=b$ einer anderen Gelegenheit vorbehalten.

*) *Ljapunoff,* Die allgemeine Aufgabe von der Stabilität der Bewegung (russisch). Charkoff 1892. S. 36. *Horn,* über die Reihenentwickelung der Integrale etc. Bd. CXVI dieses Journals S. 265.

Ueber einen Zusammenhang zwischen den Elementen orthogonaler Neuner- und Sechzehnersysteme.

(Von Herrn *E. Jahnke.*)

Für die Theorie und Anwendung der Thetafunctionen hat Herr *F. Caspary* eine neue und einfache Grundlage geschaffen. Herr *Caspary* hat gezeigt, dass die Thetafunctionen einerseits*) mit den 16 Coefficienten g_{ij} $(i, j = 1, 2, 3, 4)$ einer orthogonalen Substitution mit der Determinante $+g^2$, und andererseits**) mit denjenigen 15 Grössen, die er *Elemente eines Orthogonalsystems* nennt, in engstem Zusammenhange stehen. Als Elemente eines Orthogonalsystems bezeichnet Herr *Caspary* die neun Coefficienten a_{mn} $(m, n = 1, 2, 3)$ einer orthogonalen Substitution mit der Determinante $+1$ und die sechs aus ihnen gebildeten Differentialgrössen

$$(1.)\qquad \begin{cases} p_h = -(a_{1k}da_{1l}+a_{2k}da_{2l}+a_{3k}da_{3l}), \\ v_h = \quad a_{k1}da_{l1}+a_{k2}da_{l2}+a_{k3}da_{l3}. \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} h, k, l = 1, 2, 3 \\ 2, 3, 1 \\ 3, 1, 2 \end{pmatrix}$$

Zwischen diesen beiden von Herrn *Caspary* aufgedeckten Beziehungen besteht, wie ich gefunden, ein einfacher und folgenreicher Zusammenhang. Um diesen darzulegen, gehe ich genauer auf die Art und Weise ein, wie Herr *Caspary* seine Ergebnisse herleitet.

Bezeichnet man mit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$; $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ zwei Quadrupel beliebiger Parameter, so bilden die zweimal 16 Grössen

$$\begin{array}{cccc} \alpha_1 & -\alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & -\alpha_4 & \alpha_3 \\ -\alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_4 & \alpha_3 & \alpha_2 & -\alpha_1 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} \beta_1 & \beta_2 & -\beta_3 & \beta_4 \\ -\beta_2 & \beta_1 & \beta_4 & \beta_3 \\ \beta_3 & -\beta_4 & \beta_1 & \beta_2 \\ \beta_4 & \beta_3 & \beta_2 & -\beta_1 \end{array}$$

die 16 Coefficienten zweier orthogonalen Substitutionen, welche den Bedin-

---

*) Vgl. dieses Journal Bd. 94., S. 74—86 und C. R. CIV, p. 490—493, 1887.

**) Vgl. C. R. CXI, p. 225—227, 1890 und *Liouville*'s J. (4), t. VI, p. 367—404.

gungen der Orthogonalität *identisch* genügen. Componirt man die Elemente der $i$ten Horizontalreihe der ersten Substitution mit denen der $j$ten Horizontalreihe der zweiten, so ergiebt sich die Darstellung der 16 Coefficienten g_{ij} $(i, j = 1, 2, 3, 4)$ mit Hülfe der zwei Quadrupel von Parametern α_1, α_2, α_3, α_4; β_1, β_2, β_3, β_4 (§ 1, $\mathfrak{C}_1$).

Andererseits lassen sich durch die vier Parameter α_1, α_2, α_3, α_4 (oder durch vier andere, aus ihnen linear zusammengesetzte) die 9 Coefficienten a_{mn} $(m, n = 1, 2, 3)$ einer orthogonalen Substitution mit der Determinante $+1$ und ebenso durch β_1, β_2, β_3, β_4 die 9 Coefficienten b_{mn} $(m, n = 1, 2, 3)$ einer zweiten ebensolchen Substitution ausdrücken (§ 1, C_1).

Dadurch werden den 16 Coefficienten g_{ij} $(i, j = 1, 2, 3, 4)$ zweimal 9 Coefficienten a_{mn}, b_{mn} $(m, n = 1, 2, 3)$ zugeordnet. Zu diesen gehören die durch (1.) definirten Differentialgrössen p_h, v_h, welche, um die Parameter, von denen sie abhängen, in Evidenz zu setzen, mit $p_h(\alpha)$, $v_h(\alpha)$; $p_h(\beta)$, $v_h(\beta)$ bezeichnet werden mögen. Entsprechend führe ich die zu g_{ij} $(i, j = 1, 2, 3, 4)$ gehörenden Differentialgrössen p_{rs}, v_{rs} $(r, s = 1, 2, 3, 4)$ durch die Definition

$$(2.)\qquad \begin{cases} g p_{rs} = -(g_{1i}dg_{1j} + g_{2i}dg_{2j} + g_{3i}dg_{3j} + g_{4i}dg_{4j}), \\ g v_{rs} = g_{i1}dg_{j1} + g_{i2}dg_{j2} + g_{i3}dg_{j3} + g_{i4}dg_{j4} \end{cases}$$

ein, wo

$$g = g_{1i}^2 + g_{2i}^2 + g_{3i}^2 + g_{4i}^2 = g_{i1}^2 + g_{i2}^2 + g_{i3}^2 + g_{i4}^2$$

gesetzt ist; die Indices i, j, r, s sind einander ungleich und sollen so gewählt werden, dass sie durch eine gerade Anzahl von Vertauschungen in die Reihenfolge 1, 2, 3, 4 übergehen, woraus unmittelbar

$$p_{rs} = -p_{sr}, \quad v_{rs} = -v_{sr}$$

folgt.

Zur Unterscheidung werde ich das aus den 16 Coefficienten g_{ij} gebildete Orthogonalsystem (g_{ij}) ein *orthogonales Sechzehnersystem* und die aus den zweimal 9 Coefficienten a_{mn}, b_{mn} gebildeten Systeme (a_{mn}), (b_{mn}) *orthogonale Neunersysteme* nennen. Ausserdem sollen die beiden Neunersysteme (a_{mn}), (b_{mn}) zum Sechzehnersystem (g_{ij}) *zugehörig*, und die 16 Coefficienten g_{ij} nebst den 12 Differentialgrössen p_{rs}, v_{rs} *Elemente des Sechzehnersystems* heissen.

Indem ich nun diese Differentialgrössen durch die acht Parameter α_i, β_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ ausdrücke, gelange ich zu Theorem I, nach welchem die Differentialgrössen p_{rs} und v_{rs} des Sechzehnersystems (g_{ij}) sich als Summen und Differenzen der entsprechenden Differentialgrössen $p_h(\alpha)$, $p_h(\beta)$;

$v_h(\alpha)$, $v_h(\beta)$ der zu (g_{ij}) ***zugehörigen*** Neunersysteme (a_{mn}) und (b_{mn}) erweisen. Nachdem ich im zweiten Abschnitt, in Verallgemeinerung der von Herrn ***Caspary*** für die da_{mn} gefundenen Differentialidentitäten, die analogen Differentialidentitäten für die dg_{ij} aufgestellt habe (Formel $\mathfrak{C}_2$.), erschliesse ich hieraus und aus Theorem I das Ergebniss, dass auch die Coefficienten a_{mn} und b_{mn} Summen und Differenzen sind (Formel $\mathfrak{C}_3$.). Die Glieder, aus denen diese Summen und Differenzen sich zusammensetzen, sind die aus den Coefficienten g_{ij} gebildeten Unterdeterminanten zweiter Ordnung, dividirt durch einen gemeinsamen Factor. Diese Erkenntniss führt zu Theorem II, wonach die Neunersysteme (a_{mn}) und (b_{mn}) ***componirte*** Systeme sind und durch Composition des allgemeinen Sechzehnersystems $(g_{ij}:g)$ mit einem identischen Sechzehnersystem entstehen.

Zum Schluss entwickele ich für die dg_{ij} Differentialidentitäten ($\mathfrak{C}_4$.), welche die allgemeine Form erkennen lassen, die man den Differentialgleichungen der Drehungsprobleme geben kann.

I.

Theorem über den Zusammenhang zwischen den Differentialelementen p_{rs}, v_{rs} und $p_h(\alpha)$, $p_h(\beta)$; $v_h(\alpha)$, $v_h(\beta)$.

Wie Herr *F. Caspary**) gezeigt hat, lassen sich die 16 Elemente eines orthogonalen Neunersystems durch vier beliebige Grössen α_1, α_2, α_3, α_4 ***identisch*** in folgender Form ausdrücken:

$$(\mathrm{C}_1.)\quad \left\{\begin{array}{lll}
 & A = \alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+\alpha_4^2, & \\
Aa_{11} = \alpha_1^2-\alpha_2^2-\alpha_3^2+\alpha_4^2, & Aa_{12} = -2(\alpha_1\alpha_2-\alpha_3\alpha_4), & Aa_{13} = 2(\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_4), \\
Aa_{21} = 2(\alpha_1\alpha_2+\alpha_3\alpha_4), & Aa_{22} = \alpha_1^2-\alpha_2^2+\alpha_3^2-\alpha_4^2, & Aa_{23} = -2(\alpha_1\alpha_4-\alpha_2\alpha_3), \\
Aa_{31} = -2(\alpha_1\alpha_3-\alpha_2\alpha_4), & Aa_{32} = 2(\alpha_1\alpha_4+\alpha_2\alpha_3), & Aa_{33} = \alpha_1^2+\alpha_2^2-\alpha_3^2-\alpha_4^2, \\
 & Ap_1 = 2(\alpha_1 d\alpha_4+\alpha_2 d\alpha_3-\alpha_3 d\alpha_2-\alpha_4 d\alpha_1), & \\
 & Ap_2 = 2(\alpha_1 d\alpha_3-\alpha_2 d\alpha_4-\alpha_3 d\alpha_1+\alpha_4 d\alpha_2), & \\
 & Ap_3 = 2(\alpha_1 d\alpha_2-\alpha_2 d\alpha_1+\alpha_3 d\alpha_4-\alpha_4 d\alpha_3), & \\
 & Av_1 = 2(\alpha_1 d\alpha_4-\alpha_2 d\alpha_3+\alpha_3 d\alpha_2-\alpha_4 d\alpha_1), & \\
 & Av_2 = 2(\alpha_1 d\alpha_3+\alpha_2 d\alpha_4-\alpha_3 d\alpha_1-\alpha_4 d\alpha_2), & \\
 & Av_3 = 2(\alpha_1 d\alpha_2-\alpha_2 d\alpha_1-\alpha_3 d\alpha_4+\alpha_4 d\alpha_3). &
\end{array}\right.$$

*) Bull. des Sc. math. XIII, p. 90; und *Liouville* J. (4) VI, p. 370. Aus der a. a. O. gegebenen Darstellung folgt die obige, wenn man für die daselbst auftretenden Parameter α_1, α_2, α_3, α_4, bezw. $i(\alpha_2-\alpha_3)$, $\alpha_2+\alpha_3$, $\alpha_1-\alpha_4$, $i(\alpha_1+\alpha_4)$ substituirt.

Bezeichnen ebenso α_i, β_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ beliebige Parameter, so kann man mit ihrer Hülfe die 28 Elemente eines orthogonalen Sechzehnersystems *identisch* darstellen. Die 16 Coefficienten g_{mn} $(m, n = 1, 2, 3, 4)$ nehmen, nach den Untersuchungen von Herrn *F. Caspary**), folgende Form an:

$$(\mathfrak{S}_1.)\quad \begin{cases} g_{11} = \alpha_1\beta_1-\alpha_2\beta_2-\alpha_3\beta_3+\alpha_4\beta_4, & g_{21} = \alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1+\alpha_3\beta_4+\alpha_4\beta_3, \\ g_{12} = -(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1-\alpha_3\beta_4-\alpha_4\beta_3), & g_{22} = \alpha_1\beta_1-\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3-\alpha_4\beta_4, \\ g_{13} = \alpha_1\beta_3+\alpha_2\beta_4+\alpha_3\beta_1+\alpha_4\beta_2, & g_{23} = -(\alpha_1\beta_4-\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2+\alpha_4\beta_1), \\ g_{14} = \alpha_1\beta_4-\alpha_2\beta_3+\alpha_3\beta_2-\alpha_4\beta_1, & g_{24} = \alpha_1\beta_3+\alpha_2\beta_4-\alpha_3\beta_1-\alpha_4\beta_2, \\ g_{31} = -(\alpha_1\beta_3-\alpha_2\beta_4+\alpha_3\beta_1-\alpha_4\beta_2), & g_{41} = -(\alpha_1\beta_4+\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2-\alpha_4\beta_1), \\ g_{32} = \alpha_1\beta_4+\alpha_2\beta_3+\alpha_3\beta_2+\alpha_4\beta_1, & g_{42} = -(\alpha_1\beta_3-\alpha_2\beta_4-\alpha_3\beta_1+\alpha_4\beta_2), \\ g_{33} = \alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2-\alpha_3\beta_3-\alpha_4\beta_4, & g_{43} = -(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1+\alpha_3\beta_4-\alpha_4\beta_3), \\ g_{34} = \alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1-\alpha_3\beta_4+\alpha_4\beta_3, & g_{44} = \alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3+\alpha_4\beta_4. \end{cases}$$

Die zugehörigen 12 Differentialgrössen lassen sich gemäss ihrer Definition (2.) und im Hinblick auf $(\mathfrak{S}_1.)$ in folgende Gestalt bringen:

$$\begin{aligned} g(p_{14}+v_{14}) &= 2A(\beta_1 d\beta_4-\beta_4 d\beta_1)+2B(\alpha_1 d\alpha_4-\alpha_4 d\alpha_1), \\ g(p_{24}+v_{24}) &= 2A(\beta_1 d\beta_3-\beta_3 d\beta_1)+2B(\alpha_1 d\alpha_3-\alpha_3 d\alpha_1), \\ g(p_{34}+v_{34}) &= 2A(\beta_1 d\beta_2-\beta_2 d\beta_1)+2B(\alpha_1 d\alpha_2-\alpha_2 d\alpha_1); \\ g(p_{23}+v_{23}) &= 2A(\beta_1 d\beta_4-\beta_4 d\beta_1)-2B(\alpha_1 d\alpha_4-\alpha_4 d\alpha_1), \\ g(p_{31}+v_{31}) &= 2A(\beta_1 d\beta_3-\beta_3 d\beta_1)-2B(\alpha_1 d\alpha_3-\alpha_3 d\alpha_1), \\ g(p_{12}+v_{12}) &= 2A(\beta_1 d\beta_2-\beta_2 d\beta_1)-2B(\alpha_1 d\alpha_2-\alpha_2 d\alpha_1); \\ g(p_{14}-v_{14}) &= 2A(\beta_2 d\beta_3-\beta_3 d\beta_2)+2B(\alpha_2 d\alpha_3-\alpha_3 d\alpha_2), \\ g(p_{24}-v_{24}) &= 2A(\beta_4 d\beta_2-\beta_2 d\beta_4)+2B(\alpha_4 d\alpha_2-\alpha_2 d\alpha_4), \\ g(p_{34}-v_{34}) &= 2A(\beta_3 d\beta_4-\beta_4 d\beta_3)+2B(\alpha_3 d\alpha_4-\alpha_4 d\alpha_3); \\ g(p_{23}-v_{23}) &= 2A(\beta_2 d\beta_3-\beta_3 d\beta_2)-2B(\alpha_2 d\alpha_3-\alpha_3 d\alpha_2), \\ g(p_{31}-v_{31}) &= 2A(\beta_4 d\beta_2-\beta_2 d\beta_4)-2B(\alpha_4 d\alpha_2-\alpha_2 d\alpha_4), \\ g(p_{12}-v_{12}) &= 2A(\beta_3 d\beta_4-\beta_4 d\beta_3)-2B(\alpha_3 d\alpha_4-\alpha_4 d\alpha_3), \end{aligned}$$

wo

$$A = \sum_{\nu=1}^{4} \alpha_\nu^2, \quad B = \sum_{\nu=1}^{4} \beta_\nu^2$$

---

*) Vgl. *F. Caspary,* Zur Theorie der Thetafunctionen mit zwei Argumenten. Dieses Journal Bd. 94, S. 75; und *F. Caspary,* Sur une nouvelle manière d'établir les relations algébriques qui ont lieu entre les fonctions hyperelliptiques de première espèce. Ann. de l'Éc. Norm. (3) X, p. 290, 293.

gesetzt ist. Dabei besteht die Beziehung

$$g = A.B.$$

Vergleicht man diese Darstellung der Grössen p_{rs}, v_{rs} mit derjenigen der Grössen $p_h(\alpha)$, $p_h(\beta)$; $v_h(\alpha)$, $v_h(\beta)$ in (C_1.), so erkennt man das

Theorem I*).

Die Differentialgrössen p_{rs}, v_{rs} des allgemeinen Sechzehnersystems sind mit den entsprechenden Differentialgrössen $p_h(\alpha)$, $v_h(\alpha)$; $p_h(\beta)$, $v_h(\beta)$ der beiden zugehörigen Neunersysteme linear wie folgt verknüpft:

$$\begin{array}{ll}
2p_{14} = \quad p_1(\alpha)+p_1(\beta), & 2v_{14} = \quad v_1(\alpha)+v_1(\beta), \\
2p_{24} = \quad p_2(\alpha)+p_2(\beta), & 2v_{24} = \quad v_2(\alpha)+v_2(\beta), \\
2p_{34} = \quad p_3(\alpha)+p_3(\beta), & 2v_{34} = \quad v_3(\alpha)+v_3(\beta), \\
2p_{23} = -p_1(\alpha)+p_1(\beta), & 2v_{23} = -v_1(\alpha)+v_1(\beta), \\
2p_{31} = -p_2(\alpha)+p_2(\beta), & 2v_{31} = -v_2(\alpha)+v_2(\beta), \\
2p_{12} = -p_3(\alpha)+p_3(\beta), & 2v_{12} = -v_3(\alpha)+v_3(\beta).
\end{array}$$

Dieses Theorem setzt in Evidenz, dass sich jede Identität, welche zwischen den Differentialgrössen eines orthogonalen Neunersystems besteht, unmittelbar in eine solche für die Differentialgrössen des zugehörigen orthogonalen Sechzehnersystems umsetzen lässt.

II.

Algebraische und Differential-Identitäten zwischen den *Elementen* eines orthogonalen Sechzehnersystems.

Zwischen den *Elementen* eines orthogonalen Neunersystems besteht, wie Herr *Caspary* gezeigt hat**), das durch seine Einfachheit ausgezeichnete System von Differential-Identitäten:

$$(C_2.) \qquad \begin{cases} da_{1h} = a_{1k}p_l - a_{1l}p_k = -a_{2h}v_3 + a_{3h}v_2, \\ da_{2h} = a_{2k}p_l - a_{2l}p_k = -a_{3h}v_1 + a_{1h}v_3, \\ da_{3h} = a_{3k}p_l - a_{3l}p_k = -a_{1h}v_2 + a_{2h}v_1, \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} h,\ k,\ l = 1,\ 2,\ 3 \\ 2,\ 3,\ 1 \\ 3,\ 1,\ 2 \end{pmatrix}$$

*) Dieses Theorem hat der Verfasser bereits in der Arbeit „Ueber ein allgemeines aus Thetafunctionen von zwei Argumenten gebildetes Orthogonalsystem und seine Verwendung in der Mechanik" (vorgelegt von Herrn *Fuchs*) Sitzungsber. der Berl. Akad. S. 1023—1030, 30. Juli 1896 ohne Beweis mitgetheilt.

**) *Liouvilles* Journal (4) VI, p. 377.

aus welchen die ferneren Identitäten*)

$$(\mathrm{C}_3.)\qquad \begin{cases} p_h = a_{1h}v_1 + a_{2h}v_2 + a_{3h}v_3, \\ v_h = a_{h1}p_1 + a_{h2}p_2 + a_{h3}p_3 \end{cases}$$

hervorgehen.

Entsprechende Identitäten existiren zwischen den *Elementen* eines orthogonalen Sechzehnersystems.

Aus den Bedingungen der Orthogonalität

$$\begin{aligned} g_{i1}^2 + g_{i2}^2 + g_{i3}^2 + g_{i4}^2 &= g, \\ g_{i1}g_{j1} + g_{i2}g_{j2} + g_{i3}g_{j3} + g_{i4}g_{j4} &= 0 \end{aligned} \qquad (i \neq j = 1, 2, 3, 4)$$

gewinnt man nämlich durch Differentiation und wegen der Definition (2.) das folgende wichtige System von Differentialidentitäten:

$$(\mathfrak{S}_2.)\qquad \begin{cases} dg_{1i} = g_{1j}p_{rs} + g_{1r}p_{sj} + g_{1s}p_{jr} = -g_{2i}v_{34} - g_{3i}v_{42} - g_{4i}v_{23}, \\ dg_{2i} = g_{2j}p_{rs} + g_{2r}p_{sj} + g_{2s}p_{jr} = -g_{3i}v_{14} - g_{4i}v_{31} - g_{1i}v_{43}, \\ dg_{3i} = g_{3j}p_{rs} + g_{3r}p_{sj} + g_{3s}p_{jr} = -g_{4i}v_{12} - g_{1i}v_{24} - g_{2i}v_{41}, \\ dg_{4i} = g_{4j}p_{rs} + g_{4r}p_{sj} + g_{4s}p_{jr} = -g_{1i}v_{32} - g_{2i}v_{13} - g_{3i}v_{21} \text{**}). \end{cases}$$

Dabei sind die Indices i, j, r, s wie oben zu wählen, d. h. derart dass sie durch eine gerade Anzahl von Permutationen in die Reihenfolge 1, 2, 3, 4 übergehen. Aus ($\mathfrak{S}_2.$) fliessen weiter die Identitäten:

$$\begin{aligned} gp_{rs} &= g_{ij}^{23}v_{14} + g_{ij}^{31}v_{24} + g_{ij}^{12}v_{34} + g_{ij}^{14}v_{23} + g_{ij}^{24}v_{31} + g_{ij}^{34}v_{12}, \\ gv_{rs} &= g_{23}^{ij}p_{14} + g_{31}^{ij}p_{24} + g_{12}^{ij}p_{34} + g_{14}^{ij}p_{23} + g_{24}^{ij}p_{31} + g_{34}^{ij}p_{12}, \end{aligned}$$

wobei zur Abkürzung

$$(3.)\qquad g_{i'j'}^{ij} = g_{ii'}g_{jj'} - g_{ij'}g_{ji'}$$

gesetzt ist und die Indices i, j, i', j', ebenso wie die Indices i, j, r, s, aber unabhängig von diesen zu wählen sind. Benutzt man die bekannten Relationen zwischen den Unterdeterminanten zweiter Ordnung einer Determinante

---

*) l. c. p. 378.

**) Das eine dieser beiden Systeme findet sich auch bei *W. Frahm*, Ueber gewisse Differentialgleichungen. Math. Ann. Bd. 8, S. 37, und ein specieller Fall desselben bei *G. Landsberg*, Zur Theorie der Krümmungen eindimensionaler, in höheren Mannigfaltigkeiten enthaltener Gebilde. Dieses Journal Bd. 114, S. 338—344.

vierter Ordnung:

$$(4.)\qquad g^{ij}_{i'j'} = g^{rs}_{r's'},$$

so gehen die obigen Identitäten über in

$$(\mathfrak{C}_3.)\qquad \begin{cases} gp_{rs} = g^{14}_{rs}v_{14}+g^{24}_{rs}v_{24}+g^{34}_{rs}v_{34}+g^{14}_{ij}v_{23}+g^{24}_{ij}v_{31}+g^{34}_{ij}v_{12}, \\ gv_{rs} = g^{rs}_{14}p_{14}+g^{rs}_{24}p_{24}+g^{rs}_{34}p_{34}+g^{ij}_{14}p_{23}+g^{ij}_{24}p_{31}+g^{ij}_{34}p_{12}. \end{cases}$$

Ich benutze diese Identitäten zunächst, um weitere algebraische Identitäten aufzustellen. Durch Subtraction und Addition gewinnt man aus ($\mathfrak{C}_3$.), mit Rücksicht auf Theorem I:

$$(5.)\qquad \begin{cases} gp_h(\alpha) = (g^{14}_{ij}-g^{14}_{rs})v_1(\alpha)+(g^{24}_{ij}-g^{24}_{rs})v_2(\alpha)+(g^{34}_{ij}-g^{34}_{rs})v_3(\alpha), \\ gp_h(\beta) = (g^{14}_{ij}+g^{14}_{rs})v_1(\beta)+(g^{24}_{ij}+g^{24}_{rs})v_2(\beta)+(g^{34}_{ij}+g^{34}_{rs})v_3(\beta); \\ gv_h(\alpha) = (g^{ij}_{14}-g^{rs}_{14})p_1(\alpha)+(g^{ij}_{24}-g^{rs}_{24})p_2(\alpha)+(g^{ij}_{34}-g^{rs}_{34})p_3(\alpha), \\ gv_h(\beta) = (g^{ij}_{14}+g^{rs}_{14})p_1(\beta)+(g^{ij}_{24}+g^{rs}_{24})p_2(\beta)+(g^{ij}_{34}+g^{rs}_{34})p_3(\beta), \end{cases}$$

wo für

$$h=1 \qquad i,\ j,\ r,\ s = 1,\ 4,\ 2,\ 3,$$
$$h=2 \qquad i,\ j,\ r,\ s = 2,\ 4,\ 3,\ 1,$$
$$h=3 \qquad i,\ j,\ r,\ s = 3,\ 4,\ 1,\ 2$$

zu wählen ist.

Eine Vergleichung der Identitäten (5.) mit (C_3.) lässt eine Proportionalität zwischen den in (5.) auftretenden Summen und Differenzen von Unterdeterminanten zweiter Ordnung einerseits und den Coefficienten der beiden zum Sechzehnersystem gehörigen Neunersysteme andererseits erkennen. Es wird

$$(\mathfrak{C}.)\qquad \begin{cases} ga_{1h} = g^{14}_{ij}-g^{14}_{rs}, & gb_{1h} = g^{14}_{ij}+g^{14}_{rs}, \\ ga_{2h} = g^{24}_{ij}-g^{24}_{rs}, & gb_{2h} = g^{24}_{ij}+g^{24}_{rs}, \\ ga_{3h} = g^{34}_{ij}-g^{34}_{rs}, & gb_{3h} = g^{34}_{ij}+g^{34}_{rs}. \end{cases}$$

Unter Hinzuziehung der Definition (3.) übersieht man unmittelbar, dass die a_{mn} sowohl wie die b_{mn} *componirte* Systeme darstellen, Systeme, die durch Composition des in Rede stehenden Sechzehnersystems $g_{ij}:g$ $(i,j=1,2,3,4)$ mit dem *identischen* Sechzehnersystem

$$\begin{array}{cccc} g_{44} & \mp g_{43} & \pm g_{42} & -g_{41}, \\ \pm g_{43} & g_{44} & \mp g_{41} & -g_{42}, \\ \mp g_{42} & \pm g_{41} & g_{44} & -g_{43}, \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{array}$$

hervorgehen. Dabei ist das obere bezw. untere Zeichen zu wählen, wenn die a_{mn} bezw. b_{mn} zu componiren sind.

Berücksichtigt man noch die Determinantenrelationen (4.), so gelangt man, in Verallgemeinerung der Identitäten ($\mathfrak{C}$.), zu dem

Theorem II.

Die Coefficienten des allgemeinen Sechzehnersystems (g_{ij}) *sind mit den Coefficienten der beiden zugehörigen Neunersysteme* (a_{mn}), (b_{mn}) *derart verknüpft, dass die letzteren durch Composition des Sechzehnersystems* $(g_{ij}:g)$ *mit einem der vier identischen Sechzehnersysteme*

$$\begin{array}{cccc} g_{i4} & \mp g_{i3} & \pm g_{i2} & -g_{i1}, \\ \pm g_{i3} & g_{i4} & \mp g_{i1} & -g_{i2}, \\ \mp g_{i2} & \pm g_{i1} & g_{i4} & -g_{i3}, \\ g_{i1} & g_{i2} & g_{i3} & g_{i4} \end{array} \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

entstehen. Dabei kommt das obere Zeichen dem ersten, das untere dem zweiten Neunersystem zu.

Nebenbei ergeben sich hieraus interessante Folgerungen für die 36 Unterdeterminanten zweiter Ordnung einer Determinante vierter Ordnung, z. B.:

Die 18 ungleichen Unterdeterminanten zweiter Ordnung einer Determinante vierter Ordnung lassen sich zu 2.9 so anordnen, dass die Summen und die Differenzen von je zwei die Coefficienten zweier orthogonaler Neunersysteme bilden.

Daraus folgt ohne weiteres die Anordnung der 36 Unterdeterminanten zweiter Ordnung einer Determinante vierter Ordnung zu einem Orthogonalsystem mit 36 Coefficienten*).

Die Identitäten ($\mathfrak{C}_3$.) lassen sich zweitens zur Aufstellung weiterer Differentialidentitäten verwenden, aus denen ich die folgenden wegen ihrer

*) Wie sich diese Beziehungen auf Determinanten höherer Ordnung verallgemeinern lassen, gedenke ich demnächst mittheilen zu können.

Bedeutung für die Mechanik hervorhebe. Aus der Definition der Grössen p_{rs} und v_{rs} fliessen durch Differentiation und unter Anwendung von $(\mathfrak{E}_3.)$ die Identitäten:

$$(\mathfrak{E}_4.)\quad \begin{cases} dgp_{ij} = g(p_{ir}p_{is}+p_{jr}p_{js})-\sum_{m=1}^{4} g_{mr}d^2g_{ms}, \\ dgv_{ij} = g(v_{ir}v_{is}+v_{jr}v_{js})-\sum_{m=1}^{4} g_{rm}d^2g_{sm}, \end{cases}$$

wo i, j, r, s wie oben zu wählen sind. Man kann ihnen noch die Gestalt:

$$(\mathfrak{E}'_4.)\quad \begin{cases} dg(p_{ij}\pm p_{rs}) = g(p_{ir}\pm p_{js})(p_{is}\pm p_{jr})-\sum_{m=1}^{4} (g_{mr}d^2g_{ms}\pm g_{mi}d^2g_{mj}), \\ dg(v_{ij}\pm v_{rs}) = g(v_{ir}\pm v_{js})(v_{is}\pm v_{jr})-\sum_{m=1}^{4} (g_{rm}d^2g_{sm}\pm g_{im}d^2g_{jm}), \end{cases}$$

geben. Hieraus folgt mit Rücksicht auf Theorem I:

$$(\mathfrak{E}^{\cdot}_4.)\quad \begin{cases} dgp_h(\alpha) = gp_k(\alpha)p_l(\beta)+\sum_{m=1}^{4} (g_{mi}d^2g_{mj}-g_{mr}d^2g_{ms}), \\ dgp_h(\beta) = gp_k(\beta)p_l(\alpha)-\sum_{m=1}^{4} (g_{mi}d^2g_{mj}+g_{mr}d^2g_{ms}); \\ dgv_h(\alpha) = gv_k(\alpha)v_l(\beta)+\sum_{m=1}^{4} (g_{im}d^2g_{jm}-g_{rm}d^2g_{sm}), \\ dgv_h(\beta) = gv_k(\beta)v_l(\alpha)-\sum_{m=1}^{4} (g_{im}d^2g_{jm}+g_{rm}d^2g_{sm}), \end{cases}$$

wo den früheren Festsetzungen gemäss für

$$\begin{array}{ll} h,\ k,\ l = 1,\ 2,\ 3, & i,\ j,\ r,\ s = 1,\ 4,\ 2,\ 3, \\ \phantom{h,\ k,\ l = {}} 2,\ 3,\ 1, & \phantom{i,\ j,\ r,\ s = {}} 2,\ 4,\ 3,\ 1, \\ \phantom{h,\ k,\ l = {}} 3,\ 1,\ 2, & \phantom{i,\ j,\ r,\ s = {}} 3,\ 4,\ 1,\ 2 \end{array}$$

zu wählen ist.

Die Identitäten $(\mathfrak{E}_4.)$ und $(\mathfrak{E}^{\cdot}_4.)$ lassen die Form erkennen, in welche sich die Differentialgleichungen *aller* Probleme bringen lassen müssen, welche sich auf die Drehung beziehen. Diese Bemerkung hat, ausser durch die *Jacobi*schen Arbeiten, bereits ihre Bestätigung durch die Arbeiten der Herren *Hermite**), *W. Frahm***), *H. Weber****), *A. Wangerin*†),

*) Sur quelques applications des fonctions elliptiques. Paris 1885.

**) Ueber gewisse Differentialgleichungen. Math. Ann. Bd. VIII, S. 35—44.

***) Anwendung der Thetafunctionen zweier Veränderlichen auf die Theorie der Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit. Math. Ann. Bd. XIV, S. 184, 186.

†) Ueber die Rotation mit einander verbundener Körper. Univers. Schr. Halle 1889, S. 16, 17.

F. Caspary *), *F. Kötter* **), *F. Schottky* ***) und *V. Volterra* †) erfahren ††).

---

*) Sur une méthode élémentaire pour établir les équations différentielles dont les fonctions théta forment les intégrales. C. R. CXII, 1120—1123, 1891.

Sur deux systèmes d'équations différentielles dont les fonctions hyperelliptiques de première espèce forment les intégrales. C. R. CXII, 1305—1308, 1891.

**) Ueber die Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit. Sitzungsber. der Berl. Ak. 1891, S. 47—56; dieses Journal Bd. CIX, S. 59.

***) Ueber das analytische Problem der Rotation eines starren Körpers im Raume von vier Dimensionen. Sitzungsber. der Berl. Ak. 1891, S. 227—232.

†) Sulla rotazione di un corpo in cui esistono sistemi policiclici. Ann. di Mat. XXIV, p. 29—58.

††) Die vollständige Lösung des von den Herrn *Wangerin* und *Volterra* behandelten dynamischen Problems hoffe ich in Kürze veröffentlichen zu können.

Ueber die Zurückführung der Divisorensysteme auf eine reducirte Form.

(Von Herrn *Kurt Hensel*.)

§ 1.

In der elementaren Zahlentheorie, wie sie von *Gauss* begründet worden ist, wird das Grössengebiet der rationalen Zahlen untersucht, es werden die Beziehungen aufgestellt, welche zwischen seinen Elementen bestehen, und diese Elemente in ihre einfachsten Bestandtheile zerlegt.

Die nächstliegende Erweiterung der Zahlentheorie ist die, dass man von dem Gebiete der rationalen Zahlen, zu dem der ganzen ganzzahligen Function von einer oder von beliebig vielen Variablen $(x, y, z, \dots)$ übergeht, denn in jenem einfachsten Falle, erhält man das Gebiet aller rationalen Zahlen, wenn man die Einheit beliebig oft mit sich selbst durch die elementaren Rechenoperationen der Addition, Subtraction, Multiplication und Division verbindet, während man alle jene Functionen erhält, wenn man die gleichen Operationen auf die Variablen $(x, y, z, \dots)$ anwendet. Ebenso wie im Gebiet der Zahlen nur die ganzen Zahlen betrachtet zu werden brauchen, kann man in jenem erweiterten Gebiete die Untersuchung auf die ganzen ganzzahligen Functionen von $(x, y, z, \dots)$ beschränken, da jede gebrochene Function als Quotient zweier ganzen Functionen dargestellt werden kann. Die Gesammtheit aller dieser ganzen Grössen soll durch $[1, x, y, z, \dots]$, die Gesammtheit aller ganzen Zahlen speciell durch $[1]$ bezeichnet werden.

Jede Grösse A des Bereiches $[1, x, \dots]$ kann nun auf eine und nur eine Weise in irreductible oder Primfactoren zerlegt werden, und man kann jene Zerlegung stets durch eine endliche Anzahl von Versuchen bewirken*). Während aber für den Zahlenbereich $[1]$ jene Primzahlen wirklich die ein-

*) Vgl. *Kronecker*: Die Zerlegung der ganzen Grössen eines natürlichen Rationalitätsbereiches in ihre irreductiblen Factoren Bd. 94 S. 344—348 dieses Journals.

fachsten Elemente sind, ist dieses für die höheren Bereiche, sogar schon für den nächsthöheren $[1, x]$ der ganzen ganzzahligen Functionen von einer Variablen keineswegs der Fall, sondern zwei Grössen können sehr wohl etwas gemeinsames haben, ohne dass sie einen gemeinsamen Theiler in diesem Sinne besässen. So haben, um nur ein einfaches Beispiel anzuführen, die drei ganzen Grössen $(x^2+4x+3,\ 2x^2-2x+1,\ x^2+8x+9)$ keinen Theiler, wohl aber die Eigenschaft gemeinsam, dass sie durch die beiden Elemente $(1+2x,\ x^2+1)$ homogen und linear mit ganzen Coefficienten dargestellt werden können, denn es bestehen die Gleichungen

$$\begin{aligned} x^2+4x+3 &= 2(1+2x)+\ (x^2+1),\\ 2x^2-2x+1 &= -(1+2x)+2(x^2+1),\\ x^2+8x+5 &= 4(1+2x)+\ (x^2+1). \end{aligned}$$

Giebt man der Variablen x den speciellen Werth $i=\sqrt{-1}$, so ergiebt sich hieraus, dass die auf der linken Seite stehenden Ausdrücke alsdann den complexen Primfactor $1+2i$ gemeinsam haben, und indem man auch bei höheren Problemen dieser Art für x die Wurzel einer algebraischen Gleichung einführt, gelangt man unmittelbar zur Theorie der algebraischen Zahlen und der idealen Theiler, welche seit *Kummer* die Algebra und die Zahlentheorie in gleicher Weise mächtig gefördert hat.

Erst in neuerer Zeit hat aber *Leopold Kronecker* darauf hingewiesen, dass man jene Theorie in einem viel weiteren Umfange nämlich für das Gebiet beliebig vieler Variablen umfassen und beherrschen kann, wenn man den Veränderlichen keine speciellen algebraischen Werthe beilegt, sondern in rein arithmetischer Behandlung untersucht, was einem System von ganzen Grössen $F_1, F_2, \ldots, F_\nu$ eines Bereiches $[1, x, y, z, \ldots]$ gemeinsam ist. Durch diese Aufgabe wurde *Kronecker* auf den Begriff der Divisoren- oder Modulsysteme geführt, indem er jene Functionen zu einem Modulsysteme

$$(M) = (F_1,\ F_2,\ \ldots,\ F_\nu)$$

zusammenfasst, und eine Grösse F durch (M) *theilbar* nennt, wenn sie in der Form

$$F = u_1F_1+u_2F_2+\cdots+u_\nu F_\nu$$

dargestellt werden kann, worin $u_1, \ldots, u_\nu$ *ganze* Grössen des Bereiches sind. Indem *Kronecker* diese Systeme (M) zu den ganzen Grössen des Be-

reiches $[1, x, \dots]$ hinzunimmt, gelangt er zu einer vollständigen und erschöpfenden rein arithmetischen Theorie jener Grössen, welche es ermöglicht, das beliebig vielen unter ihnen Gemeinsame, ihren grössten gemeinsamen Theiler, vollständig und in der einfachsten Weise darzustellen und so jene höheren Grössengebiete wörtlich ebenso zu behandeln, wie dies in der Zahlentheorie mit den Elementen des Gebietes [1], den ganzen Zahlen, geschieht. So haben z. B. jene drei Functionen das Modulsystem $(1+2x, x^2+1)$ gemeinsam und in ähnlicher Weise kann für das Gebiet $[1, x]$ die Theorie der Ideale durch die der Divisorensysteme $(F_1(x), \dots, F_\nu(x))$ ersetzt werden.

Von zwei Divisorensystemen $(F_1, \dots, F_\nu)$ und $(G_1, \dots, G_\varrho)$ ist das erste durch das zweite ***theilbar***, wenn jedes seiner Elemente F_i durch $(G_1, \dots, G_\varrho)$ in dem oben angegebenen Sinne darstellbar ist. Ist sowohl das erste System durch das zweite, als auch das zweite System durch das erste theilbar, so heissen jene Systeme äquivalent, weil in allen Fragen der Theilbarkeit das eine durch das andere ersetzt werden kann. Eine der wichtigsten Fragen in diesem Gebiete ist nun die, wirklich zu entscheiden, wann zwei Divisorensysteme äquivalent sind; diese Frage ist dann beantwortet, wenn man jedes System in ein eindeutig bestimmtes äquivalentes System überführen kann; denn kann man ein derartiges sog. ***reducirtes System*** finden, so lautet die Antwort auf diese Frage einfach: zwei Systeme (F_i) und (G_k) sind dann und nur dann äquivalent, wenn die zugehörigen reducirten Systeme identisch sind. *Kronecker* selbst hat sich mit dieser Frage eingehend beschäftigt, ja man kann wohl sagen, dass die hierauf bezüglichen Untersuchungen die letzten seines Lebens gewesen sind, denn ihre Resultate hat er in den Decembervorlesungen des Jahres 1891 unmittelbar vor seinem Tode zum ersten Male bekannt gegeben.

Kronecker hat in diesen Vorlesungen nur den Bereich $[1, x]$ behandelt, und die Divisorensysteme $(F_1, \dots, F_\nu)$ desselben auf eine einfache Form gebracht, welche jedoch ***nicht*** die reducirte ist. Nur für die Systeme $(p, F_1, \dots, F_\nu)$ und $(p^2, F_1, \dots, F_\nu)$, welche eine Primzahl oder das Quadrat einer solchen unter ihren Elementen enthalten, ist es ihm gelungen, eine solche Form anzugeben und sie als reducirte zu erweisen. Bei der Vorbereitung jener Vorlesungen für den Druck suchte ich seine Untersuchungen weiter zu führen, und es gelang mir, diese Frage vollständig zu lösen. Diese Untersuchungen sollen in dieser und einer späteren Abhandlung durchgeführt werden. Ich werde hier die elementarsten Sätze über die Divisoren-

systeme, welche in der *Kronecker*schen Festschrift (dieses Journal Bd. 91 § 21) bewiesen worden sind, als bekannt voraussetzen.

§ 2.

Es sei

$$(M) = (F_1, F_2, \ldots, F_\nu)$$

ein beliebiges Divisorensystem des Bereiches $[1, x, y, \ldots]$, dessen Elemente $F_1(x, y, \ldots)$, $F_2(x, y, \ldots) \ldots$ erforderlichen Falles als relativ prim im gewöhnlichen Sinne des Wortes vorausgesetzt werden können. Sind nämlich alle jene Elemente durch eine Function $F_0(x, y, \ldots)$ theilbar und ist allgemein $F_i = F_0 . f_i$, so ist offenbar

$$(M) \sim (F_1, \ldots, F_\nu) \sim F_0(f_1, \ldots, f_\nu),$$

und es ist nur noch jenes zweite Divisorensystem $(f_1, \ldots, f_\nu)$ weiter zu untersuchen. Ein solches Divisorensystem $(f_1, ., ., f_\nu)$, dessen Elemente relativ prim sind, soll im Folgenden kurz ein *primitives* System genannt werden.

Ist nun (M) ein ganz beliebiges Divisorensystem, so erhält man alle und nur die durch dasselbe theilbaren Grössen F, wenn man in dem Ausdrucke

$$F = u_1 F_1 + u_2 F_2 + \cdots + u_\nu F_\nu$$

die Coefficienten $u_1, \ldots, u_\nu$ unabhängig von einander alle ganzen Grössen des zu Grunde gelegten Bereiches $[1, x, y, \ldots]$ durchlaufen lässt; so ergiebt sich ein Bereich von unendlich vielen durch (M) theilbaren ganzen Grössen, welcher durch (F) bezeichnet werden möge, und dessen Individuen sich durch die Operationen der Addition und Subtraction wiedererzeugen. Derselbe umfasst stets einen Theil des ganzen Bereiches $[1, x, y \ldots]$ und fällt dann und nur dann mit diesem zusammen, wenn er die Zahl Eins enthält, weil in ihm dann auch alle Multipla von Eins, oder also *alle* Grössen von $[1, x, y, \ldots]$ enthalten sind. Allgemeiner ist von zwei Systemen $(F_1, \ldots, F_\nu)$ und $(G_1, \ldots, G_\varrho)$ das zweite ein Theiler des ersten, wenn der Bereich (F) einen Theil von (G) bildet, und beide Divisorensysteme sind äquivalent, wenn $(F) = (G)$ ist.

Greift man nun aus dem zu $(F_1, \ldots, F_\nu)$ gehörigen Gebiete (F) eine beliebige Anzahl von Elementen $(\bar{F}_1, \ldots, \bar{F}_\mu)$ willkürlich heraus, so ist das aus ihnen gebildete Modulsystem $(\bar{M})$ stets ein Vielfaches von (M), weil alle seine Elemente durch (M) theilbar sind.

Der Gedanke, welcher der hier anzugebenden Reduction jener Modulsysteme auf eine kanonische Form zu Grunde liegt, ist nun der, dass man

aus (F) eine Anzahl eindeutig bestimmter Elemente $(\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_a)$ so herausgreift, dass das aus ihnen gebildete Modulsystem nicht nur durch (M) theilbar, sondern äquivalent (M) ist; dann besitzt jenes System nothwendig eine reducirte Form, da es dann nicht von der speciellen Gestalt von (M) sondern nur von dem zugehörigen Bereiche abhängt; zwei äquivalente Systeme besitzen alsdann dieselbe reducirte Form, da sie denselben Bereich (F) bestimmen.

Diese Methode werde zuerst an dem einfachen Beispiele des Bereiches [1] der ganzen Zahlen erläutert. Für jedes Divisorensystem $(F_1, \dots, F_\nu)$ mit beliebigen ganzzahligen Elementen besteht dann zunächst die Aequivalenz:

$$(1.) \qquad (F_1, \dots, F_\nu) \sim F_0 . (f_1, \dots, f_\nu),$$

wo F_0 den grössten gemeinsamen Theiler aller Elemente F_i bedeutet und $f_1, \dots, f_\nu$ ganze Zahlen ohne gemeinsamen Theiler sind. Um nun das primitive System $(f_1, \dots, f_\nu)$ auf seine kanonische Form zu bringen, betrachte ich den Bereich (f) aller durch dasselbe darstellbaren Zahlen:

$$f = u_1 f_1 + u_2 f_2 + \dots + u_\nu f_\nu,$$

und es sei

$$f_0 = a_1 f_1 + a_2 f_2 + \dots + a_\nu f_\nu$$

die kleinste Zahl jenes Bereiches. Dann muss f_0 nothwendig ein gemeinsamer Theiler aller ν Elemente f_i sein, denn ist allgemein $\bar{f}_i$ der kleinste Rest der Division von f_i durch f_0, so gehört auch jede dieser Zahlen, wegen der Gleichung

$$\bar{f}_i = f_i - \lambda_i f_0,$$

dem Bereiche (f) an, muss also, da sie kleiner als f_0 ist, nothwendig gleich Null sein. Da aber die Elemente f_i theilerfremd vorausgesetzt waren, so ist $f_0 = 1$. Da somit der Bereich des Systemes die Zahl Eins enthält, so ist dieses, also auch jedes primitive ganzzahlige System, äquivalent Eins, und aus der Aequivalenz (1.) folgt unmittelbar der Satz:

> Im Gebiete der ganzen Zahlen ist jedes Modulsystem $(F_1, \dots, F_\nu)$ einer Zahl F_0 äquivalent, nämlich dem grössten gemeinsamen Theiler seiner Elemente; für dieses Gebiet ist daher die Einführung der Divisorensysteme überflüssig.

Es sei jetzt $(M) = (F^{(1)}(x), \dots, F^{(\mu)}(x))$ ein beliebiges Divisorensystem im Bereiche $[1, x]$ der ganzen ganzzahligen Functionen von x. Auch hier

kann und soll dasselbe von vorn herein als primitiv, d. h. seine Elemente als theilerfremd vorausgesetzt werden. Jedes Element $F_d(x)$ des zu (M) gehörigen Gebietes (F) kann dann als das Product aus einer ganzen Zahl d, dem Zahlentheiler und einer primitiven Function $f_d(x)$, ihrem primitiven Factor, also in der Form $F_d(x) = d f_d(x)$ dargestellt werden. Hier kann man nun aus dem Gebiete (F) sowohl ein Element mit möglichst kleinem Zahlentheiler, als auch ein solches herausgreifen, dessen primitiver Factor von möglichst niedrigem Grade ist, und da diese beiden Elemente im allgemeinen nicht zusammenfallen, so sind die primitiven Modulsysteme dieses Bereiches im allgemeinen nicht äquivalent Eins.

Es sei nämlich $F_{d_0}(x)$ zunächst ein Element von (F), dessen Zahlentheiler d_0 möglichst klein ist; dann muss d_0 ein gemeinsamer Divisor aller übrigen Zahlentheiler des Bereiches (F) sein. Ist nämlich $F_d(x)$ irgend ein anderes Element, so gehört auch die Function

$$F_{d_0}(x) + x^{\lambda} F_d(x)$$

für jedes ganzzahlige λ demselben Bereiche an, und ihr Zahlentheiler ist gleich dem grössten gemeinsamen Divisor von d und d_0, wenn nur λ grösser als der Grad von $F_{d_0}(x)$ angenommen wird; und da d_0 bereits der kleinste Zahlentheiler des Bereiches sein sollte, so muss in der That d_0 in d enthalten sein. Da aber die Elemente $(F^{(1)}, \dots, F^{(\mu)})$ von (M) relativ prim sind, also auch keinen gemeinsamen Zahlentheiler besitzen, so ist d_0 gleich Eins, also $F_{d_0}(x) = F_0(x)$ eine primitive Function. ***Jedes primitive Divisorensystem des Bereiches*** $[1, x]$ ***enthält also mindestens ein primitives Element.***

Es sei nun zweitens

$$F_\delta(x) = \delta . f_\delta(x)$$

ein Element von (F) von möglichst niedrigem Grade in x. Dann zeigt man ganz ebenso, dass sein primitiver Factor $f_\delta(x)$ ein gemeinsamer Theiler aller Elemente des Bereiches (F), speciell also von $(F^{(1)}, \dots, F^{(\mu)})$ sein muss. Ist nämlich $F(x)$ ein beliebiges Element des Bereiches (F) und sucht man den Rest, den $F(x)$ nach Division durch $F_\delta(x)$ lässt, so besitzt dieser sowohl als auch der Quotient im allgemeinen gebrochene Zahlencoefficienten. Beseitigt man aber die Nenner durch Multiplication mit ihrem kleinsten Vielfachen r, so erhält man eine Gleichung:

$$R(x) = r . F(x) - \lambda(x) F_\delta(x),$$

in welcher $\lambda(x)$ und $R(x)$ ganzzahlige Functionen von x bedeuten, und

$R(x)$ von niedrigerem Grade als $F_\delta(x)$ ist. Da aber wegen dieser Gleichung $R(x)$ zum Bereiche (F) gehört und von niedrigerem Grade sein soll als $F_\delta(x)$, so muss $R(x)$ nothwendig gleich Null sein, da sonst $F_\delta(x)$ nicht die Function des niedrigsten Grades in (F) wäre, und aus der dann aus (3.) sich ergebenden Gleichung:

$$rF(x) = \lambda(x).\delta.f_\delta(x)$$

folgt ohne weiteres, dass $f_\delta(x)$ ein Theiler der beliebig aus (F) herausgegriffenen Function $F(x)$ ist. Da aber andererseits $F^{(1)}(x), \ldots, F^{(\mu)}(x)$ relativ prim angenommen waren, so muss $f_\delta(x) = 1$, also $F_\delta(x) = \delta$ d. h. gleich einer ganzen Zahl sein, und hieraus in Verbindung mit dem vorher gefundenen Resultate ergiebt sich der Satz, welcher in der oben erwähnten Vorlesung von *Kronecker* auf ganz andere Art hergeleitet wurde:

> Jedem primitiven Modulsysteme des Bereiches $[1, x]$ kann man ohne es im Sinne der Aequivalenz zu ändern eine ganze Zahl und eine ganze Function von x ohne Zahlentheiler hinzufügen.

§ 3.

Der am Ende des vorigen Abschnittes gefundene Satz giebt nun das Mittel, ein Divisorensystem in das Product einer Anzahl von einfacheren Systemen zu zerlegen. Hierzu führt folgender Hülfssatz, der eine leichte Verallgemeinerung eines von *Kronecker* aufgestellten ist: Ist $(F, F_1, \ldots, F_\mu)$ ein beliebiges Divisorensystem und ist

$$(1.)\qquad F \equiv F_0 F_0' \quad \text{mod.}(F_1, \ldots, F_\mu),$$

während die beiden Factoren F_0, F_0' relativ prim sind, so dass also

$$(2.)\qquad (F_0, F', F_1, \ldots, F_\mu) \backsim 1$$

ist, so besteht die Aequivalenz:

$$(3.)\quad (F, F_1, \ldots, F_\mu) \backsim (F_0.F_0', F_1, \ldots, F_\mu) \backsim (F_0, F_1, \ldots, F_\mu)(F_0', F_1, \ldots, F_\mu).$$

Multiplicirt man nämlich das Product auf der rechten Seite von (3.) aus, so ergiebt sich:

$$(4.)\qquad (F_0, F_i)(F_0', F_k) \backsim (F_0 F_0', F_0 F_i, F_0' F_k, F_i F_k). \qquad {\scriptstyle (i, k = 1, 2, \ldots, \mu)}$$

Andererseits folgt, wenn man die Aequivalenz (2.) auf beiden Seiten mit $(F_1, \ldots, F_\mu)$ multiplicirt:

$$(F_0 F_i, F' F_k, F_i F_k) \backsim (F_1, \ldots, F_\mu),$$

und hieraus folgt in der That, dass die rechte Seite von (4.) äquivalent $(F_0 F_0', F_1, \ldots, F_\mu)$ oder äquivalent $(F, F_1, \ldots, F_\mu)$ ist.

Es sei nun m die kleinste durch das Modulsystem $(F_1, \ldots, F_\mu)$ darstellbare ganze Zahl, welche demselben also ohne es im Sinne der Aequivalenz zu ändern hinzugefügt werden kann, und

$$m = p^a q^b \ldots r^c$$

ihre Zerlegung in Primfactoren; dann besteht nach dem eben bewiesenen Satze die Aequivalenz:

$$(F_1 \ldots F_\mu) \backsim (m, F_1 \ldots F_\mu) \backsim (p^a, F_1 \ldots F_\mu)(q^b, F_1 \ldots F_\mu) \ldots (r^c, F_1 \ldots F_\mu);$$

es sind demnach nur noch die speciellen Divisorensysteme $(p^a, F_1 \ldots F_\mu)$ weiter zu untersuchen, deren Zahlenelement eine Primzahlpotenz ist.

Um nun diese in noch einfachere Elemente zu zerlegen, sei jetzt $F_0(x)$ eine primitive Function von möglichst niedrigem Grade, welche das System:

$$(M_1) \backsim (p^a, F_1 \ldots F_\mu)$$

nach dem am Schlusse des vorigen Abschnittes bewiesenen Satze stets enthält, welche demselben also zugefügt werden kann, und es werde $F_0(x)$ in ihre modulo p irreductiblen Factoren zerlegt. Die so sich ergebende Congruenz

$$F_0(x) \equiv P^\alpha P_1^{\alpha_1} \ldots P_h^{\alpha_h} \quad (\text{mod.} p)$$

vertritt eine Gleichung:

$$F_0 = P^\alpha \ldots P_h^{\alpha_h} - p\bar{F},$$

welche, da F_0 das Modulsystem (M_1) enthält, auch folgendermassen als Congruenz für jenes System geschrieben werden kann

$$P^\alpha \ldots P_h^{\alpha_h} \equiv p\bar{F} \quad \text{mod.}(p^a, F_1 \ldots F_\mu);$$

erhebt man aber diese zur $a$ten Potenz und beachtet, dass alsdann die rechte Seite durch (M_1) theilbar wird, so folgt

$$P^{a\alpha} . P_1^{a\alpha_1} \ldots P_h^{a\alpha_h} \equiv 0 \quad (\text{mod.} M_1).$$

Man kann also anstatt F_0 auch das Product $P^{a\alpha} . P_1^{a\alpha_1} \ldots$ unserem System zufügen und mit Benutzung des im Anfange dieses Abschnittes bewiesenen Satzes ergiebt sich die weitere Zerlegung:

$$(p^a, F_1 \ldots F_\mu, P^{a\alpha} \ldots P_h^{a\alpha_h}) \backsim (p^a, F_1 \ldots F_\mu, P^{a\alpha}) \ldots (p^a, F_1 \ldots F_\mu, P_h^{a\alpha_h}).$$

Man braucht also jetzt nur die Systeme

$$(p^a, F_1 \ldots F_\mu, P^b)$$

weiter zu betrachten, wenn P^b die niedrigste Potenz von P ist, welche in

dem Modulsysteme $(p^a, F_1 \dots F_\mu, P^{aa})$ enthalten ist, und man erhält hiernach den wichtigen Satz:

Jedes Modulsystem $(F_1 \dots F_\mu)$ ist äquivalent einem Producte *einfacher Systeme:*

$$(p^a, F_1 \dots F_\mu, P^b),$$

welche aus dem ursprünglichen dadurch hervorgehen, dass ihm die Potenz einer Primzahl p als Zahlenelement und die Potenz einer modulo p irreductiblen Function P als primitives Element zugefügt wird.

Im Folgenden brauchen daher nur diese speciellen Systeme weiter behandelt zu werden.

§ 4.

Zu der Aufstellung eines zu $(M) \sim (p^a, F_1 \dots F_\mu, P^b)$ äquivalenten reducirten Systemes führen nun die folgenden Betrachtungen: Unter den durch (M) theilbaren Functionen giebt es auch primitive, d. h. solche, deren Zahlentheiler gleich Eins ist; eine solche Function ist z. B. die Potenz P^b. Es sei nun $\Phi_0(x)$ eine derartige Function von möglichst niedrigem Grade und es sei dieser Grad gleich n_0. Dann besitzen alle Elemente des Bereiches (F) von niedrigerem als dem $n_0$ten Grade einen Zahlentheiler, und es sei für den Augenblick δ der grösste gemeinsame Zahlentheiler aller jener Elemente. Dann muss δ nothwendig eine Potenz von p also etwa gleich p^{d_1} sein; denn besitzt eine Function $F(x)$ den Theiler cp^{d_1}, wo c die Primzahl p nicht mehr enthält, und ist c' so bestimmt, dass:

$$cc' \equiv 1 \pmod{p^a}$$

ist, so besitzt die Function $c'F(x)$ den Theiler p^{d_1} allein, also kann δ keinen Primfactor ausser p enthalten. Unter den soeben betrachteten Elementen giebt es dann aber auch solche, welche *genau* durch jenen gemeinsamen Divisor p^{d_1} theilbar sind, und es sei $\Phi_1(x)$ eine Function dieser Art, deren Grad n_1 wieder möglichst klein ist. Dann ist $n_1 < n$ und $d_1 > 0$, denn sonst wäre ja $\Phi_1(x)$ entgegen unserer Voraussetzung ebenfalls primitiv. Alle Elemente des Bereiches (F) von niedrigerem als dem $n_1$ten Grade besitzen dann einen Zahlentheiler, welcher durch eine höhere als die $d_1$te Potenz von p theilbar ist. Es sei weiter p^{d_2} ihr grösster gemeinsamer Theiler und $\Phi_2(x)$ eine solche Function des Bereiches (F), welche genau p^{d_2} enthält und deren Grad n_2 möglichst niedrig ist. In derselben Weise

kann man fortfahren, und da die Grade $n_0, n_1, \ldots$ eine abnehmende Reihe bilden, so gelangt man zuletzt zu einer Function $\Phi_\nu(x)$ vom nullten Grade, deren Zahlentheiler p^{d_ν} ist, d. h. jene Function ist selbst gleich p^{d_ν}, und zwar ist $p^{d_\nu} = p^a$, weil dies ja die niedrigste zum Bereiche (F) gehörige Potenz von p war. Man erhält auf diese Weise eine Reihe von $(\nu+1)$ Functionen

$$\Phi_0(x), \quad \Phi_1(x), \quad \ldots, \quad \Phi_\nu(x)$$

des Bereiches (F), deren Grade

$$n_0, \quad n_1, \quad \ldots, \quad n_\nu$$

eine abnehmende Reihe bilden, während $n_\nu = 0$ ist, und von deren Zahlentheilern

$$p^{d_0}, \quad p^{d_1}, \quad \ldots, \quad p^{d_\nu}$$

der erste gleich 1 und jeder ein Theiler des folgenden ist.

Offenbar ist das aus diesen Elementen gebildete Modulsystem $(\Phi_0(x), \Phi_1(x), \ldots, \Phi_\nu(x))$ durch (M) theilbar, weil seine Elemente alle zu (F) gehören, aber man zeigt weiter, dass es äquivalent (M) ist und dass man aus ihm leicht eine reducirte Form für (M) herleiten kann. Hierzu führt der folgende wichtige Satz:

Jede der Functionen $\Phi_i(x)$ ist von der Form:

$$\Phi_i(x) = p^{d_i}\varphi_i(x) = p^{d_i}(x^{n_i} + a_1 x^{n_i-1} + \cdots + a_{n_i}),$$

d. h. in ihrem primitiven Factor kann der Coefficient der höchsten Potenz von x gleich Eins angenommen werden.

Wäre nämlich jener Coefficient nicht Eins, sondern etwa gleich cp^ϱ, wo c nicht mehr durch p theilbar ist, so könnte zunächst wieder c dadurch beseitigt werden, dass man $\Phi_i(x)$ durch $c'\Phi_i(x)$ ersetzt, wenn c' die zu c complementäre Zahl modulo p^a bedeutet. Nun ist unsere Behauptung für die letzte Function $\Phi_\nu(x) = p^{d_\nu}$ bereits erfüllt. Um ihre allgemeine Gültigkeit zu erweisen, nehme ich an es sei in Uebereinstimmung mit diesem Satze: für irgend einen Werth von i

$$\Phi_{i+1}(x) = p^{d_{i+1}} x^{n_{i+1}} + \cdots,$$

aber es sei für die nächstvorhergende Function $\Phi_i(x)$

$$\Phi_i(x) = p^{d_i+\varrho} x^{n_i} + \cdots,$$

und beweise dann, dass ϱ nothwendig gleich Null sein muss, da man anderenfalls aus $\Phi_i(x)$ und $\Phi_{i+1}(x)$ eine andere Function von niedrigerem als dem

$n_i$ten Grade des Bereiches (F) herleiten könnte, deren Theiler kleiner als $p^{d_{i+1}}$ wäre, was mit der Definition von $\Phi_{i+1}(x)$ im Widerspruch steht. Setzt man nämlich:

$$\Psi(x) = \Phi_i(x) - p^{(d_i+\varrho)-d_{i+1}} x^{n_i-n_{i+1}} \Phi_{i+1}(x)$$

oder

$$\Psi(x) = p^{d_{i+1}-(d_i+\varrho)} \Phi_i(x) - x^{n_i-n_{i+1}} \Phi_{i+1}(x),$$

jenachdem $d_i+\varrho \geqq d_{i+1}$ oder $d_i+\varrho < d_{i+1}$ ist, so ist $\Psi(x)$ eine Function von niedrigerem als dem $n_i$ten Grade des Bereiches (F), denn der Coefficient von x^{n_i} hebt sich in beiden Fällen fort, und ihr Zahlentheiler ist im ersten Falle genau p^{d_i}, im zweiten genau gleich $p^{d_{i+1}-\varrho}$, da beide Male der Minuendus genau die angegebene, der Subtrahendus aber eine höhere Potenz von p nämlich bezw. $p^{d_i+\varrho}$ und $p^{d_{i+1}}$ enthält; damit ist der verlangte Beweis vollständig erbracht.

Hieraus ergiebt sich aber ohne Weiteres der Beweis des Satzes:

Jedes Element des Bereiches (F) enthält auch das Modulsystem $(\Phi_0(x), \Phi_1(x), \ldots, \Phi_\nu(x))$, d. h. dieses ist dem ursprünglichen System $(p^a, F_1 \ldots F_\mu, P^b)$ äquivalent.

Ist nämlich $F(x)$ irgend ein Element von (F), so sei $\Phi_i(x)$ die erste Function der Reihe $\Phi_0, \Phi_1, \ldots$, deren Grad n_i kleiner oder gleich dem von $F(x)$ ist. Dann besitzt $F(x)$ nothwendig den Theiler p^{d_i}, und da $\Phi_i = p^{d_i}(x^{n_i}+\cdots)$ ist, so ergiebt sich durch einfache Division von F durch Φ_i eine Gleichung:

$$F(x) = \lambda_i(x)\Phi_i(x) + F_1(x),$$

in der $\lambda_i(x)$ und $F_1(x)$ ganze ganzzahlige Functionen bedeuten, und die letzte von niedrigerem als dem $n_i$ten Grade ist. Da diese aber wegen der Gleichung

$$F_1(x) = F(x) - \lambda_i(x)\Phi_i(x)$$

ebenfalls dem Bereiche (F) angehört, so ist ihr Zahlentheiler mindestens gleich $p^{d_{i+1}}$ und man erhält durch Division von $F_1(x)$ durch $\Phi_{i+1}(x)$ eine neue Gleichung derselben Art:

$$F_1(x) = \lambda_{i+1}(x)\Phi_{i+1}(x) + F_2(x),$$

wo $F_2(x)$ wieder ganz und von niedrigerem Grade als $\Phi_{i+1}(x)$ ist, und durch analoges Fortschreiten erhält man eine Kette ähnlicher Gleichungen, aus denen sich ohne Weiteres die folgende Darstellung durch das System

$(\Phi_0, \Phi_1, \ldots)$ und somit der Beweis unserer Behauptung ergiebt:

$$F(x) = \lambda_i(x)\Phi_i(x)+\lambda_{i+1}(x)\Phi_{i+1}(x)+\cdots+\lambda_\nu(x)\Phi_\nu(x).$$

Mit Rücksicht auf diese Darstellung von $F(x)$ durch das System $(\Phi_0 \ldots \Phi_\nu)$ kann man endlich noch den folgenden Satz aussprechen, welcher im nächsten Abschnitte benutzt werden wird:

Eine Function $F(x)$ enthält dann und nur dann das Modulsystem (M), wenn sie auch durch das Divisorensystem $(\Phi_i(x), \Phi_{i+1}(x), \ldots, \Phi_\nu(x))$ theilbar ist und $\Phi_i(x)$ die erste Function der Reihe $\Phi_0(x), \Phi_1(x), \ldots$ bedeutet, deren Grad gleich oder kleiner als der von $F(x)$ ist. Enthält $F(x)$ jenes System, so besteht eine Gleichung:

$$F(x) = \lambda_i(x)\Phi_i(x)+\lambda_{i+1}(x)\Phi_{i+1}(x)+\cdots+\lambda_\nu(x)\Phi_\nu(x),$$

in welcher der Grad eines jeden Productes $\lambda_k(x)\Phi_k(x)$ kleiner als derjenige der nächstvorhergehenden Function $\Phi_{k-1}(x)$ und der Grad des ersten Productes $\lambda_i(x)\Phi_i(x)$ genau gleich demjenigen von $F(x)$ ist.

§ 5.

So einfach die im vorigen Abschnitte gefundene Form $(\Phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi_\nu)$ auch ist, so ist sie doch noch nicht eindeutig bestimmt, denn dieses System behält seine Eigenschaften, wenn man ein beliebiges Element $\Phi_i(x)$ durch ein anderes $\bar{\Phi}_i(x)$ ersetzt, welches mit jenem durch eine Gleichung:

$$\bar{\Phi}_i(x) = \Phi_i(x)+\lambda_{i+1}(x)\Phi_{i+1}(x)+\cdots+\lambda_\nu(x)\Phi_\nu(x)$$

zusammenhängt; nur sind hier die Coefficienten $\lambda_k(x)$ so zu wählen, dass jedes Product $\lambda_k\Phi_k$ von niedrigerem Grade ist als $\Phi_i(x)$; denn auch die Function $\bar{\Phi}_i(x)$ ist dann ein Element von (F), dessen Theiler gleich p^{d_i} und dessen Grad möglichst klein ist. Aber diese einfache Bemerkung giebt andererseits ein Mittel um dieses System in ein äquivalentes reducirtes überzuführen.

Ist nämlich $\Phi_{i-1}(x)$ irgend ein Element unseres Systemes, so kann man dasselbe mit einer solchen Potenz p^δ von p multipliciren, dass das Product $p^\delta\Phi_{i-1}(x)$ das aus den folgenden Elementen gebildete Divisorensystem $(\Phi_i(x) \ldots \Phi_\nu(x))$ enthält. Da nun alle Elemente von $(\Phi_i, \Phi_{i+1}, \ldots, \Phi_\nu)$ mindestens den Theiler p^{d_i} enthalten, so muss auch jenes Product $p^\delta\Phi_{i-1}(x)$ mindestens durch dieselbe Potenz von p theilbar sein, und da $\Phi_{i-1}(x)$ selbst nur den Zahlentheiler $p^{d_{i-1}}$ besitzt, so muss p^δ mindestens gleich $p^{d_i-d_{i-1}}$ sein.

Diese Potenz von p genügt aber auch, denn da das Product $p^{d_i-d_{i-1}}\Phi_{i-1}(x)$ ein Element des Bereiches (F) vom Zahlentheiler p^{d_i} und vom Grade $n_{i-1} > n_i$ ist, so kann man diese Function durch $\Phi_i(x)$ dividiren und auf die im vorigen Abschnitte beschriebene Weise so lange fortfahren, bis man eine Gleichung von der folgenden Form erhält:

$$(1.)\qquad p^{d_i-d_{i-1}}\Phi_{i-1}(x) = b_{ii}\Phi_i(x)+b_{i,i+1}\Phi_{i+1}(x)+\cdots+b_{i\nu}\Phi_\nu(x),$$

womit die Behauptung bewiesen ist. In dieser Gleichung sind die Coefficienten b_{ik} solche ganze ganzzahlige Functionen von x, dass allgemein der Grad eines jeden Productes $b_{ik}\Phi_k(x)$ kleiner ist als der Grad der vorhergehenden Function $\Phi_{k-1}(x)$, während der Grad von $b_{ii}\Phi_i(x)$ genau mit dem von $\Phi_{i-1}(x)$ übereinstimmt; endlich ergiebt sich durch Vergleichung der höchsten Potenz von x auf beiden Seiten von (1.), dass in b_{ii} der Coefficient der höchsten Potenz gleich Eins ist.

Zur Vereinfachung mögen im Folgenden die positiven Zahlen:

$$d_i-d_{i-1} = e_i \quad\text{und}\quad n_{i-1}-n_i = f_i \qquad (i=1,2,\ldots,\nu)$$

gesetzt werden, so dass also die Zahlen $e_1, e_2, \ldots, e_\nu$ angeben, um wieviel die Exponenten von p in den Theilern von $\Phi_0(x), \Phi_1(x), \Phi_2(x), \ldots, \Phi_\nu(x)$ zunehmen, und die Zahlen $f_1, f_2, \ldots, f_\nu$ um wie viel der Grad in derselben Reihe abnimmt. Dann ist allgemein der Zahlentheiler des Elementes $\Phi_h(x)$ gleich $p^{e_1+e_2+\cdots+e_h}$ und ihr Grad $n_h = f_{h+1}+\cdots+f_{\nu-1}+f_0$, und die Gleichungen (1.) können folgendermassen geschrieben werden:

$$(2.)\qquad \begin{cases} p^{e_1}\Phi_0(x) = b_{11}\Phi_1+b_{12}\Phi_2+b_{13}\Phi_3+\cdots+b_{1\nu}\Phi_\nu, \\ p^{e_2}\Phi_1(x) = \qquad b_{22}\Phi_2+b_{23}\Phi_3+\cdots+b_{2\nu}\Phi_\nu, \\ p^{e_3}\Phi_2(x) = \qquad\qquad b_{33}\Phi_3+\cdots+b_{3\nu}\Phi_\nu, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p^{e_\nu}\Phi_{\nu-1}(x) = \qquad\qquad\qquad b_{\nu\nu}\Phi_\nu. \end{cases}$$

Hier bilden die Coefficienten ein Dreieckssystem

$$(b_{ik}) = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1\nu} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2\nu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & b_{\nu\nu} \end{pmatrix}$$

ganzer ganzzahliger Functionen von x, in welchem alle Elemente einer und derselben Colonne $b_{1i}, b_{2i}, \ldots, b_{i-1,i}$ mit Ausnahme des Diagonalgliedes

b_{ii} sämmtlich von niedrigerem als dem $f_i$ten Grade sind, während b_{ii} genau vom $f_i$ten Grade ist und als Coefficienten von x^{f_i} die Eins hat. In der That folgt dies daraus, dass der Grad jedes Productes $b_{ih}\Phi_h$ kleiner als der von Φ_{h-1} sein muss.

Man kann nun aber weiter a priori voraussetzen, dass auch die Horizontalreihen des Dreieckssystemes (b_{ik}) in der Weise reducirt sind, dass in allen Elementen b_{ii}, $b_{i,i+1}, \ldots, b_{i\nu}$ der $i$ten Zeile die Zahlencoefficienten kleiner sind, als p^{e_i}, oder also dass sie auf ihre kleinsten Reste modulo p^{e_i} reducirt sind. Angenommen nämlich diese Voraussetzung sei schon für das eine Element $b_{\nu\nu}$ der letzten Zeile, für die beiden der vorletzten Zeile u. s. w., bis zu den Elementen der $(i+1)$-ten Zeile erfüllt, aber noch nicht für die Elemente der $i$ten Zeile, so setze man für alle diese Elemente $b_{ii}, b_{i,i+1}, \ldots$

$$b_{ik} = b_{ik}^{(0)} + p^{e_i} b'_{ik} \qquad (k = i, i+1, \ldots, \nu),$$

wo jetzt alle $b_{ik}^{(0)}$ modulo p^{e_i} reducirt sind. Setzt man dann diese Werthe in die $i$te Gleichung des Systemes (2.)

$$p^{e_i}\Phi_{i-1} = b_{ii}\Phi_i + b_{i,i+1}\Phi_{i+1} + \cdots + b_{i\nu}\Phi_\nu$$

ein, und vereinigt dann alle mit p^{e_i} multiplicirten Elemente mit $p^{e_i}\Phi_{i-1}$ auf der linken Seite, so ergiebt sich

$$p^{e_i}(\Phi_{i-1} - b'_{ii}\Phi_i - b'_{i,i+1}\Phi_{i+1} - \cdots - b'_{i,\nu}\Phi_\nu) = b_{ii}^{(0)}\Phi_i + b_{i,i+1}^{(0)}\Phi_{i+1} + \cdots + b_{i\nu}^{(0)}\Phi_\nu.$$

Setzt man also

$$\bar{\Phi}_{i-1}(x) = \Phi_{i-1} - b'_{ii}\Phi_i - \cdots - b'_{i\nu}\Phi_\nu,$$

so ist das System $(\Phi_0 \ldots \bar{\Phi}_{i-1} \ldots \Phi_\nu) \backsim (\Phi_0 \ldots \Phi_{i-1} \ldots \Phi_\nu)$ und das neue Element $\bar{\Phi}_{i-1}$ ist offenbar ebenfalls eine Function des n_{i-1}ten Grades mit dem Zahlentheiler $p^{d_{i-1}}$. In der dann sich ergebenden Gleichung:

$$p^{e_i}\bar{\Phi}_{i-1}(x) = b_{ii}^{(0)}\Phi_i + \cdots + b_{i\nu}^{(0)}\Phi_\nu$$

besitzen nun alle Coefficienten in Bezug auf ihre Grade in x, dieselben Eigenschaften, wie vorher, sind aber ausserdem noch modulo p^{e_i} reducirt; die folgenden Gleichungen bleiben ungeändert, da in ihnen $\bar{\Phi}_{i-1}$ garnicht vorkommt, und nur die vorhergehenden Gleichungen ändern sich dadurch, dass das ursprüngliche System durch das neue $(\Phi_0 \ldots \bar{\Phi}_{i-1}\Phi_i \ldots \Phi_\nu)$ ersetzt wird. Reducirt man jetzt die $(i-1)$-te Zeile des neuen Systems in derselben Weise modulo $p^{e_{i-1}}$, und fährt so fort, so erhält man zu-

letzt ein den Anforderungen unseres Satzes entsprechendes System, und wir können daher gleich das System $(\Phi_0(x) \dots \Phi_\nu(x))$ in dieser Weise gegeben voraussetzen.

§ 6.

Es soll jetzt endlich nachgewiesen werden, dass die im vorigen Abschnitt gefundene reducirte Form, auf die jedes Divisorensystem $(p^a, F_1 \dots F_\mu, P^b)$ gebracht werden kann, eine eindeutig bestimmte ist, d. h. dass zwei Systeme dieser Art nur dann äquivalent sein können, wenn sie identisch sind. Zu diesem Zwecke nehme ich an, die beiden reducirten Systeme

$$(\Phi_0(x),\ \Phi_1(x),\ \dots,\ \Phi_\nu(x)) \quad \text{und} \quad (\Psi_0(x),\ \Psi_1(x),\ \dots,\ \Psi_\varrho(x))$$

seien einander äquivalent, d. h. das System (F) aller durch sie theilbaren Functionen sei für beide Systeme das gleiche. Dann ist die Anzahl der Elemente $\Phi_i(x)$ und $\Psi_k(x)$ dieselbe, und sowohl der Grad als auch der Zahlentheiler von je zwei entsprechenden Functionen $\Phi_i(x)$ und $\Psi_i(x)$ sind identisch, denn alle diese Zahlen sind ja allein durch den Bereich (F) bestimmt, welcher für die beiden äquivalenten Systeme der gleiche ist. In den beiden als äquivalent vorausgesetzten Systemen $(\Phi_0(x), \Phi_1(x), \dots, \Phi_\nu(x))$ und $(\Psi_0(x), \Psi_1(x), \dots, \Psi_\nu(x))$ sind ferner die letzten Elemente $\Phi_\nu(x)$ und $\Psi_\nu(x)$ identisch, denn es ist $\Phi_\nu(x) = \Psi_\nu(x) = p^{d_\nu}$ die kleinste ganze Zahl des zugehörigen Bereiches (F). Um nun den angekündigten Beweis vollständig zu führen, nehme ich an, man wisse bereits, dass die $(\nu - i - 1)$ letzten Elemente $\Phi_i(x), \dots, \Phi_\nu(x)$ in beiden Systemen übereinstimmen, und ich zeige dann, dass aus der Aequivalenz der beiden reducirten Systeme:

$$(\Phi_0,\ \dots,\ \Phi_{i-1},\ \Phi_i,\ \dots,\ \Phi_\nu) \quad \text{und} \quad (\Psi_0,\ \dots,\ \Psi_{i-1},\ \Phi_i,\ \dots,\ \Phi_\nu)$$

mit Nothwendigkeit die Identität der beiden nächstvorhergehenden Elemente Φ_{i-1} und Ψ_{i-1} folgt.

Nach der Definition der reducirten Systeme bestehen nun für diese beiden Elemente zwei Gleichungen:

$$\begin{aligned} p^{e_i}\Phi_{i-1} &= b_{ii}\Phi_i + b_{i,i+1}\Phi_{i+1} + \dots + b_{i\nu}\Phi_\nu, \\ p^{e_i}\Psi_{i-1} &= b'_{ii}\Phi_i + b'_{i,i+1}\Phi_{i+1} + \dots + b'_{i\nu}\Phi_\nu, \end{aligned}$$

in welchen die Coefficienten b_{ik} und b'_{ik} modulo p^{e_i} reducirt sind, und der Grad eines jeden Productes $b_{ik}\Phi_k$, $b'_{ik}\Phi_k$ mit Ausnahme der beiden

ersten kleiner ist, als der des nächstvorhergehenden Elementes Φ_{k-1}. Durch Subtraction beider Gleichungen erhält man eine neue:

$$(1.) \qquad p^{e_i}(\Phi_{i-1}-\Psi_{i-1}) = \mu_i\Phi_i+\mu_{i+1}\Phi_{i+1}+\cdots+\mu_\nu\Phi_\nu,$$

in welcher jetzt der Grad *aller* Coefficienten $\mu_{ik} = b_{ik}-b'_{ik}$ mit Einschluss des ersten μ_i in der eben angegebenen Weise reducirt ist, denn da b_{ii} und b'_{ii} beide mit x^{f_i} beginnen, so hebt sich dieses Glied in $\mu_i = b_{ii}-b'_{ii}$ fort; ferner sind die Zahlencoefficienten aller Functionen μ_k *ihrem absoluten Werthe nach* kleiner als p^{e_i} da dieselben in b_{ik} und b'_{ik} *positiv* und kleiner als p^{e_i} waren; es kann daher eine jener Functionen $\mu_k(x)$ nur dann durch p^{e_i} theilbar sein, wenn sie gleich Null ist. Da nun die Differenz $(\Phi_{i-1}-\Psi_{i-1})$ auf der linken Seite der Gleichung (1.) dem Bereiche (F) angehört und von niedrigerem als dem n_{i-1}ten Grade ist, weil sich die höchsten Glieder von Φ_{i-1} und Ψ_{i-1} ebenfalls fortheben, so kann die linke Seite der Gleichung (1.) nach dem am Schlusse des § 4 bewiesenen Satze folgendermassen geschrieben werden:

$$p^{e_i}(\lambda_i(x)\Phi_i(x)+\lambda_{i+1}(x)\Phi_{i+1}(x)+\cdots+\lambda_\nu(x)\Phi_\nu(x)),$$

wo ebenfalls jedes Product $\lambda_k\Phi_k$ von niedrigerem Grade als Φ_{k-1} ist. So geht die Gleichung (1.) über in

$$p^{e_i}(\lambda_i\Phi_i+\lambda_{i+1}\Phi_{i+1}+\cdots+\lambda_\nu\Phi_\nu) = \mu_i\Phi_i+\mu_{i+1}\Phi_{i+1}+\cdots+\mu_\nu\Phi_\nu,$$

oder, wenn man zur Abkürzung

$$(2.) \qquad \mu_k-p^{e_i}\lambda_k = m_k(x)$$

setzt, in

$$m_i\Phi_i+m_{i+1}\Phi_{i+1}+\cdots+m_\nu\Phi_\nu = 0.$$

Diese Gleichung, in welcher der Grad eines jeden Productes $m_k\Phi_k$ ebenfalls kleiner ist als der von $\Phi_{k-1}(x)$, kann aber nur dann erfüllt sein, wenn alle Coefficienten $m_k(x)$ gleich Null sind. Wäre nämlich $m_k(x)$ der erste nicht verschwindende Coefficient, so wäre die linke Seite der letzten Gleichung genau von dem Grade von $m_k\Phi_k$, da alle folgenden Summanden von niedrigerem Grade sind. Da demnach in den Gleichungen (2.) alle rechten Seiten gleich Null sind, so müssen alle Elemente μ_k durch p^{e_i} theilbar, also selbst gleich Null sein und aus der Gleichung (1.) ergiebt sich endlich, dass $\Phi_{i-1} = \Psi_{i-1}$ ist, was zu beweisen war. Damit ist der vollständige Beweis erbracht, dass jedes Divisorensystem $(p^a, F_1(x), \ldots, F_\mu(x), P')$

auf eine und auch nur auf eine Weise in ein äquivalentes System ($\Phi_0(x), \ldots, \Phi_\nu(x)$ transformirt werden kann, dass also die hier angegebene Form in der That eine kanonische oder reducirte Form ist.

Die vorliegende Arbeit habe ich im Sommer des vorigen Jahres abgeschlossen und der Redaction dieses Journals am 7. Juni 1896 übergeben. Inzwischen ist es mir gelungen, den Beweis dafür, dass das System ($\Phi_0(x), \ldots, \Phi_\nu(x)$) ein reducirtes ist, wesentlich zu vereinfachen, und aus diesem Grunde habe ich den letzten Paragraphen dieser Abhandlung umgearbeitet und auch in den früheren Abschnitten einige jedoch unwesentliche Aenderungen angebracht.

Ueber einige Anwendungen des Correspondenzprincips.

(Von Herrn *K. Th. Vahlen* in Königsberg i. Pr.)

Am Schlusse meiner Arbeit: Ueber den Grad der Eliminationsresultante eines Gleichungssystems*) ergab sich das Correspondenzprincip:

Bestehen zwischen den Punkten zweier ebenen n-fachen Mannigfaltigkeiten zwei Correspondenzen, die eine mit den charakteristischen Zahlen** $g_0, g_1, \ldots, g_n$**, die andere mit den charakteristischen Zahlen** $h_0, h_1, \ldots, h_n$**, so giebt es** $g_0 h_n + g_1 h_{n-1} + \cdots + g_n h_0$ **Paare einander nach beiden Correspondenzen entsprechender Punkte.

Im Folgenden sollen einige Anwendungen dieses Princips gegeben werden.

I.

Eine ebene algebraische Curve (g_0, g_1) habe die Ordnung g_0, die Klasse g_1. Projiciren wir einen auf ihr sich bewegenden Punkt P' von einem Projectionscentrum S aus auf eine Gerade s in den Punkt P und schneidet die Tangente p' im Punkte P' der Curve die Gerade s im Punkte Q, so besteht zwischen P und Q eine Correspondenz mit den charakteristi-Zahlen g_0 und g_1.

Ein Punkt P'', der eine Curve (h_0, h_1) durchläuft, giebt mittels S eine zweite Correspondenz auf s; dieselbe besitzt die charakteristischen Zahlen h_0, h_1. Zufolge des Eingangs genannten Satzes kommt es $(g_0 h_1 + g_1 h_0)$-mal vor, dass P und Q sich nach beiden Correspondenzen einander entsprechen.

Betrachten wir nunmehr, von S und s absehend, die Correspondenz zwischen der Geraden $P'P'' = q$ und dem Schnittpunkt P der zugehörigen Tangenten p' und p''. Zunächst ist klar, dass einem Punkt P $g_1 h_1$ Gerade q, einer Geraden q $g_0 h_0$ Punkte P entsprechen.

*) Dieses Journal Bd. 113 S. 348—352.

Ferner geht aus dem Obigen hervor, dass, wenn P eine Gerade s beschreibt, q $(g_0 h_1 + g_1 h_0)$-mal durch einen festen Punkt S geht; und umgekehrt, dass, wenn q sich um einen Punkt S dreht, P $(g_0 h_1 + g_1 h_0)$-mal eine Gerade s passirt. So erhalten wir also den Satz:

1. *Zwischen der Verbindungsgeraden zweier Punkte zweier Curven* (g_0, g_1), (h_0, h_1) *und dem zugehörigen Tangentenschnittpunkt besteht eine Correspondenz mit den charakteristischen Zahlen:*

$$g_0 h_0, \quad g_0 h_1 + g_1 h_0, \quad g_1 h_1 \text{*)}.$$

Diese drei Zahlen spielen für das System der beiden Curven (g_0, g_1), (h_0, h_1) eine ähnliche Rolle wie die Gradzahlen g_0 und g_1 für die Curve (g_0, g_1) und können daher die „Gradzahlen des Systems der beiden Curven" heissen.

Wir wollen z. B. die Anzahl der den beiden Curven gemeinsamen Normalen ermitteln. Die Gerade q ist in projectivem Sinne normal zur Curve (g_0, g_1) oder zur Tangente p', wenn q und p' zu einander conjugirt sind in Bezug auf zwei fest gegebene Punkte S_1 und S_2 einer Geraden s.

Dreht sich q um seinen Schnittpunkt Q mit s, so geht der zugehörige Tangentenschnittpunkt $p'p'' = P$ $(g_0 h_1 + g_1 h_0)$-mal durch s; umgekehrt entsprechen einem P auf s $g_1 h_1$ Punkte Q, so dass zwischen P und Q eine Correspondenz mit den charakteristischen Zahlen: $g_0 h_1 + g_1 h_0$, $g_1 h_1$ besteht. Die Correspondenz zwischen zwei zu S_1 und S_2 conjugirten Punkten hat die charakteristischen Zahlen 1, 1. Demnach fallen P und Q mit zwei zu S_1 und S_2 conjugirten Punkten $(g_0 h_1 + g_1 h_0 + g_1 h_1)$-mal zusammen. Dann ist jedesmal q normal zu beiden Curven; also:

2. *Zwei algebraische Curven* (g_0, g_1), (h_0, h_1) *besitzen im allgemeinen:*

$$g_0 h_1 + g_1 h_0 + g_1 h_1$$

gemeinsame Normalen.

Ist insbesondere $h_0 = 0$, $h_1 = 1$, so reducirt sich die Curve (h_0, h_1) auf einen Punkt und der vorstehende Satz auf den folgenden:

3. *Von einem Punkte lassen sich im allgemeinen:*

$$g_0 + g_1$$

Normalen auf eine Curve (g_0, g_1) *fällen.*

Dem Begriff zweier zu einander normalen Geraden steht der Begriff

---

*) In der oben citirten Arbeit ist zwar nur von Correspondenzen zweier Punkte die Rede, jedoch geht aus dem Obigen von selbst hervor, was unter charakteristischen Zahlen einer Correspondenz zwischen einem Punkt und einer Geraden zu verstehen sei. Aehnliches ist später zu bemerken.

zweier zu einander normalen Punkte als solcher Punkte, welche zu zwei gegebenen Geraden conjugirt sind, dual gegenüber. Demgemäss entsprechen obigen Sätzen die folgenden:

4. ***Es giebt im allgemeinen $g_0 h_0 + g_0 h_1 + g_1 h_0$ solche Schnittpunkte zweier Tangenten zweier algebraischen Curven (g_0, g_1), (h_0, h_1), welche zu beiden Berührungspunkten conjugirt sind.***

5. ***Es giebt im allgemeinen $g_0 + g_1$ Tangenten der Curve (g_0, g_1), welche eine gegebene Gerade in einem zum Berührungspunkte conjugirten Punkte treffen.***

Die vier vorstehenden Sätze ergeben sich auch leicht als singuläre Fälle des aus dem Satze 1 folgenden:

6. ***Die Verbindungsgerade zweier Punkte zweier Curven (g_0, g_1), (h_0, h_1) und der zugehörige Tangentenschnittpunkt sind:***

$$(g_0 h_0 + g_0 h_1 + g_1 h_0 + g_1 h_1)\text{-} = (g_0 + g_1)(h_0 + h_1)\text{-mal}$$

conjugirt in Bezug auf einen gegebenen Kegelschnitt.

II.

Eine algebraische Fläche (g_0, g_1, g_2) im Raume habe die Ordnung g_0, den Rang g_1*), die Klasse g_2. Von einem Punkt S aus projiciren wir einen Punkt P' der Fläche auf die Ebene σ in den Punkt P. Die Berührungsebene der Fläche in P' schneide σ in der Geraden q. Zwischen q und P besteht eine Correspondenz mit den charakteristischen Zahlen g_0, g_1, g_2.

Ein Punkt P'' einer zweiten algebraischen Fläche (h_0, h_1, h_2) liefert mittels S eine zweite Correspondenz auf σ; dieselbe hat die charakteristischen Zahlen h_0, h_1, h_2.

Dass sich P und q nach beiden Correspondenzen einander entsprechen, kommt $(g_0 h_2 + g_1 h_1 + g_2 h_0)$-mal vor; d. h. wenn die Gerade $P'P''$ ein Bündel beschreibt, geht die Tangentialebenenschnittgerade q $(g_0 h_2 + g_1 h_1 + g_2 h_0)$-mal durch eine gegebene Ebene σ, und umgekehrt.

Betrachten wir überhaupt die Correspondenz zwischen der Verbindungsgeraden $P'P''$ und der Schnittgeraden q der zugehörigen Tangentialebenen.

Einer Geraden $P'P''$ entsprechen $g_0 h_0$ Gerade q; einer Geraden q entsprechen $g_2 h_2$ Gerade $P'P''$. Nunmehr sind noch zwei charakteristische Zahlen zu ermitteln.

*) Das Wort „Rang" wird zwar für verschiedene Begriffe gebraucht; doch ist hier in der Zustammenstellung mit „Ordnung" und „Klasse" die Bedeutung desselben nicht zweifelhaft.

Legen wir durch S eine Ebene, welche σ in der Geraden s schneidet. Auf s erhalten wir zwei Correspondenzen (g_0, g_1) und (h_0, h_1), sodass, wenn $P'P''$ einen Büschel beschreibt, q $(g_0 h_1 + g_1 h_0)$-mal durch eine gegebene Gerade s geht.

Ferner: Von einem Punkte Σ der Ebene σ legen wir Berührungskegel an die beiden Flächen. Von der Geraden $S\Sigma = s$ aus projiciren wir zwei Gerade p' und p'' der beiden Kegel auf σ; die Schnittgeraden q' und q'' der zugehörigen Berührungsebenen bilden mit p' und p'' zusammen zwei Correspondenzen (g_1, g_2) und (h_1, h_2). Es fällt daher p' mit p'' und gleichzeitig q' mit q'' $(g_1 h_2 + g_2 h_1)$-mal zusammen; d. h. wenn q einen Büschel um Σ in σ beschreibt, so geht $P'P''$ $(g_1 h_2 + g_2 h_1)$-mal durch eine gegebene Gerade s.

Zusammenfassend können wir sagen:

7. *Zwischen der Verbindungsgeraden zweier Punkte zweier Flächen* (g_0, g_1, g_2), (h_0, h_1, h_2) *und der Schnittgeraden der zugehörigen Berührungsebenen besteht eine Correspondenz mit den charakteristischen Zahlen:*

$$g_0 h_0, \quad g_0 h_1 + g_1 h_0, \quad g_0 h_2 + g_1 h_1 + g_2 h_0, \quad g_1 h_2 + g_2 h_1, \quad g_2 h_2.$$

Wir wollen nunmehr die Anzahl der Normalen ermitteln, die den beiden Flächen gemein sind. Eine Gerade und eine Ebene sind in projectivem Sinne normal zu einander, wenn sie conjugirt zu einem gegebenen Kegelschnitt sind. Nehmen wir in der Ebene σ dieses Kegelschnitts eine Gerade q, legen durch sie zwei Berührungsebenen an die beiden Flächen, und schneidet die Verbindungslinie der Berührungspunkte $P'P''$ die Ebene σ im Punkte P, so besteht zwischen P und q eine Correspondenz mit den charakteristischen Zahlen:

$$g_0 h_2 + g_1 h_1 + g_2 h_0, \quad g_1 h_2 + g_2 h_1, \quad g_2 h_2,$$

wie man aus Satz 7. leicht ableitet.

Jedesmal, wenn P und q in Bezug auf den Kegelschnitt conjugirt sind, ist $P'P''$ normal zu beiden Flächen; mithin:

8. *Zwei Flächen* (g_0, g_1, g_2), (h_0, h_1, h_2) *haben im allgemeinen:*

$$g_0 h_2 + g_1 h_1 + g_2 h_0 + g_1 h_2 + g_2 h_1 + g_2 h_2$$

gemeinsame Normalen.

Insbesondere für $h_0 = 0,\ h_1 = 0,\ h_1 = 1$:

9. *Von einem Punkte lassen sich auf eine Fläche* (g_0, g_1, g_2) *im allgemeinen:*

$$g_0 + g_1 + g_2$$

Normalen fällen.

Die beiden dual entsprechenden Sätze und der zu 6. analoge mögen der Kürze halber unerwähnt bleiben.

III.

Die vorstehenden Sätze lassen sich ohne Weiteres auf n-fache Mannigfaltigkeiten ausdehnen, nachdem die n Gradzahlen $g_0, g_1, \ldots, g_{n-1}$ einer algebraischen $(n-1)$-fachen Mannigfaltigkeit definirt sind.

Um zu dieser Definition zu gelangen, müssen wir die Punkte, Tangenten, Berührungsebenen u. s. w. der gegebenen algebraischen Mannigfaltigkeit F einer hinreichenden Anzahl linearer Bedingungsgleichungen unterwerfen. Es bezeichne nämlich allgemein $R_{\nu-1}$ eine ebene $(\nu-1)$-faltigkeit und es sei $\mu+\nu = n+1$. Die Berührungs-$R_{\nu-1}$ der F bilden eine $(\mu\nu-1)$-fache Serie, aus welcher durch $\mu\nu-1$ Gleichungen, die in den $R_{\nu-1}$-Coordinaten linear sind, eine im allgemeinen endliche Anzahl von $R_{\nu-1}$ ausgeschieden wird. Diese Anzahl ist zwar noch nicht der Grad $g_{\nu-1}$, unterscheidet sich aber von diesem nur durch den Factor:

$$2^{\binom{n+1}{\nu}-1-\mu\nu},$$

welches der Grad des zwischen den $R_{\nu-1}$-Coordinaten identisch bestehenden Relationensystems ist*). Aehnlich werden die Gradzahlen für eine Mannigfaltigkeit von höherer als erster Stufe bestimmt.

Wir wollen nunmehr die Gradzahlen einer punktordinären Mannigfaltigkeit $F(x_0, x_1, \ldots, x_n) = 0$ ermitteln, deren Ordnung g_0 bekannt ist.

Die Klasse g_{n-1} bedeutet die Anzahl der Berührungs-R_{n-1}, welche durch $n-1$ gegebene Punkte:

$$x_{0k}, \quad x_{1k}, \quad \ldots, \quad x_{nk} \qquad (k=1, 2, \ldots, n-1)$$

gehen; d. h. sie ist gleich der Ordnung des Gleichungssystems:

$$F(x_0, \ldots, x_n) = 0, \quad \sum_i x_{ik}\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0, \qquad \left(\begin{smallmatrix} i=0, 1, \ldots, n \\ k=1, 2, \ldots, n-1 \end{smallmatrix}\right)$$

also im allgemeinen gleich $g_0(g_0-1)^{n-1}$.

Indem man den Schnitt der F mit einer $R_{\nu-1}$ betrachtet, ermittelt man ebenso: $g_{\nu-1} = g_0(g_0-1)^{\nu-1}$; also:

10. ***Für eine punktordinäre $(n-1)$-faltigkeit F von der Ordnung g_0 ist:***

$$g_1 = g_0(g_0-1), \quad g_2 = g_0(g_0-1)^2, \quad \ldots, \quad g_{n-1} = g_0(g_0-1)^{n-1}.$$

Enthält die F eine $(n-2)$-faltigkeit F' von den Geraden $g'_0, g'_1, \ldots$ singulär, so sind die obigen Werthe für $g_1, g_2, \ldots$ der Reihe nach um $\lambda' g'_0$,

---

*) Vgl. des Verfassers Arbeit: Ueber die Relationen zwischen den Determinanten einer Matrix, dieses Journal Bd. 112, S. 306—310, und *E. Pascal*, Sulle varie forme che possono darsi alle relazioni fra i determinanti di una matrice rettangolare, Annali di matematica, t. 24, fasc. 3, p. 241—253.

$\lambda' g_1'$, ... zu vermindern; dabei bedeutet λ' eine von der Stärke der Singularität abhängige Zahl. Ist z. B. die F' λ-fach in der F enthalten, ohne dass in ihr Berührungen der verschiedenen Blätter von F stattfinden, so ist $\lambda' = 2\cdot\binom{\lambda}{2}$. Enthält die F eine $(n-3)$-faltigkeit F'' von den Graden g_0'', g_1'', ... singulär, so sind die obigen Werthe für $g_2, g_3, \ldots$ der Reihe nach um $\lambda'' g_0''$, $\lambda'' g_1''$, ... zu vermindern; dabei bedeutet λ'' eine von der Stärke der Singularität abhängige Zahl. Ist z. B. die F'' λ-fach in der F enthalten und zwar in ordinärer Weise, so ist $\lambda'' = 2^2\binom{\lambda}{3}$. U. s. w.

Diese Sätze sind unschwer zu beweisen, sollen aber in grösserer Vollständigkeit bei anderer Gelegenheit behandelt werden.

Nachdem die Gradzahlen $g_0, g_1, \ldots, g_{n-1}$ definirt sind, lassen sich die früheren Sätze leicht in die folgenden verallgemeinern:

11. *Die Verbindungsgerade zweier Punkte zweier $(n-1)$-faltigkeiten $(g_0, g_1, \ldots, g_{n-1})$, $(h_0, h_1, \ldots, h_{n-1})$ und die Schnitt-R_{n-2} der beiden zugehörigen Berührungs-R_{n-1} bilden eine Correspondenz mit den charakteristischen Zahlen:*

$$g_0h_0,\quad g_0h_1+g_1h_0,\quad g_0h_2+g_1h_1+g_2h_0,\quad \ldots,\quad g_{n-2}h_{n-1}+g_{n-1}h_{n-2},\quad g_{n-1}h_{n-1}.$$

12. *Zwei algebraische $(n-1)$-faltigkeiten $(g_0, g_1, \ldots, g_{n-1})$, $(h_0, h_1, \ldots, h_{n-1})$ besitzen im allgemeinen*

$$(g_0h_{n-1}+g_1h_{n-2}+\cdots+g_{n-1}h_0)+(g_1h_{n-1}+\cdots+g_{n-1}h_1)$$
$$+(g_2h_{n-1}+\cdots+g_{n-1}h_2)+\cdots+g_{n-1}h_{n-1}$$

gemeinsame Normalen.

13. *Von einem Punkte lassen sich auf eine algebraische $(n-1)$-faltigkeit $(g_0, g_1, \ldots, g_{n-1})$ im allgemeinen*

$$g_0+g_1+\cdots+g_{n-1}$$

Normalen fällen.

Aus diesem letzteren Satz ergiebt sich in Verbindung mit dem Satz 10 der folgende:

14. *Auf eine punktordinäre $(n-1)$-faltigkeit von der Ordnung g_0 lassen sich von einem Punkte aus im allgemeinen*

$$g_0\frac{(g_0-1)^n-1}{g_0-2}$$

Normalen fällen.

Dieses specielle Resultat ist auch, vermuthlich auf anderem Wege, von *Wolstenholm* (s. Educational Times 10) erhalten worden.

Berlin, im April 1896.

Fig. 1.

Fig. 3.

Fig. 4.

Fig. 8.

Ueber das Verhalten der Integrale von Differentialgleichungen bei der Annäherung der Veränderlichen an eine Unbestimmtheitsstelle.

(Von Herrn *J. Horn* in Charlottenburg.)

Erster Theil.

Herr *Poincaré* hat im 7. Bande des American Journal und im 8. Bande der Acta mathematica untersucht, wie sich die Integrale einer linearen Differentialgleichung verhalten, wenn die unabhängige Veränderliche auf einem bestimmten Wege in eine Stelle der Unbestimmtheit geht. Er hat gezeigt, dass die im allgemeinen divergenten Normalreihen, welche die Differentialgleichung formell befriedigen, Aufschluss über das Verhalten der Integrale auf einem nach der Unbestimmtheitsstelle $x = \infty$ gehenden Wege geben, indem er mit Hülfe der *Laplace*schen Transformirten nachwies, dass diese divergenten Reihen die Integrale asymptotisch darstellen*). Durch diese Untersuchungen des Herrn *Poincaré* ist ein Weg gewiesen, auf welchem es gelingt, auch für andere als lineare Differentialgleichungen einigen Einblick in das Verhalten der Integrale in der Nähe von singulären Stellen der Unbestimmtheit zu gewinnen. Nun ist aber die Methode, welche Herr *Poincaré* für lineare Differentialgleichungen benutzt hat, die *Laplace*sche Transformation, nur auf lineare Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten anwendbar und auch hier unmittelbar nur auf Differentialgleichungen vom Range 1, während die Differentialgleichungen höheren Ranges erst auf solche vom Range 1 zurückgeführt werden müssen. Die Sätze über die asymptotische Darstellung der Integrale durch die Normalreihen, welche

---

*) Eine einfache Darstellung der *Poincaré*schen Methode findet sich bei *Picard,* Traité d'Analyse, Band III, Kap. 14. Man vergleiche auch *Schlesinger,* Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen, Bd. I, 6. und 7. Abschnitt, sowie die älteren Untersuchungen über die *Bessel*schen Functionen (etwa *Jordan,* Cours d'Analyse, Bd. III, 1. Aufl. S. 241—274).

sich lediglich auf die Umgebung der Unbestimmtheitsstelle $x = \infty$ beziehen, sind aber nur durch das Verhalten der Coefficienten in der Umgebung dieser Stelle bedingt und gelten auch, ohne dass die Coefficienten der Differentialgleichung in der ganzen Ebene rational sind.

Im Folgenden stelle ich mir die Aufgabe, diese Sätze zunächst für lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung ohne Benutzung der *Laplace*schen Transformirten zu beweisen und in einigen Punkten zu ergänzen, lediglich unter Verwendung von Hülfsmitteln, welche an die Betrachtungen anknüpfen, die Herr *Poincaré* am Eingange seiner Abhandlung im American Journal zur Bestimmung des Grenzwerthes der logarithmischen Ableitung der Integrale anstellt; ich benutze dabei nur die Voraussetzung, dass die Coefficienten der Differentialgleichung in der Umgebung der Unbestimmtheitsstelle den Charakter rationaler Functionen haben, und brauche keine Unterscheidung zwischen Differentialgleichungen vom Range 1 und von höherem Range zu machen.

Ich beginne mit der *Riccati*schen Differentialgleichung, bei welcher sich die Darstellung besonders einfach gestaltet und die Bedeutung der asymptotischen Reihen deutlich hervortritt, um von hier aus zur linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung*) überzugehen. Die Untersuchungen des vorliegenden ersten Theiles der Arbeit wurden hauptsächlich unternommen, um Methoden zu gewinnen, welche sich auf allgemeinere Differentialgleichungen erster Ordnung übertragen lassen, wie sich im zweiten und dritten Theil zeigen wird.

§ 1.

In der *Riccati*schen Differentialgleichung mit der Unbestimmtheitsstelle $x = \infty$

$$(1.)\qquad x^{-k}\frac{dy}{dx}+Ay^2+By+C = 0$$

---

*) Der erste Aufsatz des Herrn *Kneser* „Untersuchung und asymptotische Darstellung der Integrale gewisser Differentialgleichungen bei grossen reellen Werthen des Arguments" im 116. Band dieses Journals, bei dessen Erscheinen der erste Theil meiner Arbeit bereits vollendet war, hat eine ähnliche Tendenz wie dieser erste Theil. Auch Herr *Kneser* beweist, ohne (wie Herr *Poincaré*) von bestimmten Integralen auszugehen, die asymptotische Darstellung der Integrale von linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung durch divergente Reihen; indessen behandelt Herr *Kneser* eine speciellere Klasse von Differentialgleichungen als die vorliegende Arbeit; er beschränkt sich durchweg auf reelle Grössen und wendet andere Methoden an.

sei k eine ganze positive Zahl einschliesslich Null, während sich die Coefficienten A, B, C bei $x=\infty$ regulär verhalten, ohne sämmtlich für $x=\infty$ zu verschwinden:

$$(2.)\qquad \begin{cases} A = a_0+\dfrac{a_1}{x}+\dfrac{a_2}{x^2}+\cdots, \\ B = b_0+\dfrac{b_1}{x}+\dfrac{b_2}{x^2}+\cdots, \\ C = c_0+\dfrac{c_1}{x}+\dfrac{c_2}{x^2}+\cdots. \end{cases}$$

Soll die Gleichung (1.) durch die Potenzreihe

$$(3.)\qquad F = K_0+\frac{K_1}{x}+\frac{K_2}{x^2}+\cdots$$

formell befriedigt werden, so muss zunächst

$$(4.)\qquad a_0K_0^2+b_0K_0+c_0 = 0$$

sein; die Wurzeln K_0', K_0'' dieser quadratischen Gleichung werden vorläufig verschieden angenommen. Zur Bestimmung von K_ν dient die Recursionsformel

$$(2a_0K_0+b_0)K_\nu = \cdots,$$

deren rechte Seite von K_0, K_1, ..., $K_{\nu-1}$ abhängt, so dass jedem der beiden Werthe von K_0 eine Potenzreihe

$$(3'.)\qquad F' = K_0'+\frac{K_1'}{x}+\frac{K_2'}{x^2}+\cdots,$$

$$(3''.)\qquad F'' = K_0''+\frac{K_1''}{x}+\frac{K_2''}{x^2}+\cdots$$

entspricht, welche im allgemeinen divergent ist. Es handelt sich darum, zu zeigen, dass diese divergenten Reihen Aufschluss über das Verhalten der Integrale in der Nähe der Stelle $x=\infty$ geben.

Wir beginnen mit dem Beweise des folgenden Satzes:

„*Wenn x als reelle positive Grösse ins Unendliche geht und wenn der reelle Theil von $a_0(K_0'-K_0'')$ positiv ist, haben alle Integrale y der Differengleichung* (1.) *den Grenzwerth K_0', mit Ausnahme eines einzigen, welches den Grenzwerth K_0'' besitzt.*“

Von Herrn *Poincaré* (Am. Journ. Bd. 7) ist der Satz so weit bewiesen, als gezeigt ist, dass der Grenzwerth eines Integrals im allgemeinen gleich K_0' ist, ausnahmsweise auch gleich K_0'' sein kann. Die obige bestimmtere Fassung ist für das Folgende wesentlich.

Die Gleichung (1.) geht durch die Substitution

$$y = \frac{K'_0 z + K''_0}{z+1}$$

über in

$$x^{-k}\frac{dz}{dx} + Pz^2 + (a+Q)z + R = 0,$$

wenn gesetzt wird:

$$P = \frac{AK'^2_0 + BK'_0 + C}{K'_0 - K''_0} = \frac{p_1}{x} + \frac{p_2}{x^2} + \cdots,$$

$$R = \frac{AK''^2_0 + BK''_0 + C}{K'_0 - K''_0} = \frac{r_1}{x} + \frac{r_2}{x^2} + \cdots,$$

$$Q = \frac{2AK'_0K''_0 + B(K'_0 + K''_0) + 2C}{K'_0 - K''_0} - a = \frac{q_1}{x} + \frac{q_2}{x^2} + \cdots,$$

wobei

$$a = \frac{2a_0K'_0K''_0 + b_0(K'_0 + K''_0) + 2c_0}{K'_0 - K''_0} = -a_0(K'_0 - K''_0) = -\sqrt{b_0^2 - 4a_0c_0}$$

einen negativen reellen Theil hat.

Wir untersuchen die Differentialgleichung

$$(5.) \qquad x^{-k}\frac{dy}{dx} + Py^2 + (a+Q)y + R = 0,$$

worin a eine Constante mit negativem reellen Theile darstellt und P, Q, R Potenzreihen von $\frac{1}{x}$, welche für $x = \infty$ verschwinden. Zunächst sieht man, dass der Grenzwerth eines Integrals von (5.) für $\lim x = +\infty$, wenn überhaupt ein solcher vorhanden ist, nur 0 oder ∞ sein kann. Denn wenn $\lim y = \eta$ von 0 und ∞ verschieden wäre, würde in der Gleichung

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dy}{Py^2 + (a+Q)y + R} = \frac{x_0^{k+1} - x^{k+1}}{k+1}$$

für $x = \infty$, $y = \eta$ die linke Seite endlich, die rechte unendlich gross sein.

Wir wollen den Beweis des ausgesprochenen Satzes zuerst unter der Voraussetzung führen, dass sämmtliche vorkommenden Grössen reell sind, indem wir das anschauliche Verfahren des Herrn *Picard* (Traité d'Analyse, Bd. III, S. 365—7) für unseren Zweck ergänzen.

*Erster Beweis**). Die Gleichung

$$Py^2 + (a+Q)y + R = 0$$

*) Dieser Beweis ist indessen nur als Einschaltung zu betrachten. Als Grundlage des Folgenden dient der zweite Beweis, welcher abgesehen von der reellen positiven

definirt für grosse x zwei getrennte Curven $y = \varepsilon(x)$, $y = \eta(x)$:

$$\lim_{x=+\infty} \varepsilon = 0, \quad \lim_{x=+\infty} \eta = \infty.$$

Um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, nehmen wir an, dass für $x \geqq x_0$ beide Curven steigen*), d. h. dass $\varepsilon < 0$, $\eta > 0$ ist, was im Falle $P > 0$, $R < 0$ eintritt; die anderen Fälle sind ähnlich zu behandeln. Die Gleichung (5.) schreibt sich

$$\frac{dy}{dx} = -x^k P(y-\varepsilon)(y-\eta).$$

Für $y > \eta$ und für $y < \varepsilon$ ist $\frac{dy}{dx} < 0$, für $\varepsilon < y < \eta$ ist $\frac{dy}{dx} > 0$, falls x hinreichend gross ($x \geqq x_0$) angenommen wird.

Ein Integral y', welches für $x = x_0$ grösser als η ist, nimmt ab, bis die Integralcurve die Curve η schneidet, um dann zu steigen und dem Grenzwerthe ∞ zuzustreben. Ein Integral y'' mit einem Anfangswerthe zwischen 0 und η geht fortwährend zunehmend zum Grenzwerthe ∞. Ist der Anfangswerth kleiner als ε, so nimmt das Integral y''' fortwährend ab, um, wenn es für einen endlichen Werth von x den Werth $-\infty$ erreicht hat, sein Vorzeichen zu wechseln und wie y' weiter zu verlaufen. Alle Integrale, deren Werth für $x = x_0$ nicht zwischen 0 und ε liegt, haben demnach den Grenzwerth ∞. Ein Integral mit einem Anfangswerthe zwischen 0 und ε kann auf drei Arten verlaufen: y_1 strebt wachsend dem Grenzwerthe ∞ zu; y_2 wächst, durchschneidet die Curve ε, um dann wie y''' ins Unendliche zu gehen; y_0 bleibt zwischen 0 und ε und geht wachsend zum Grenzwerthe 0. *Es ist zu zeigen, dass ein Integral y_0 von der letzteren Art nothwendig vorhanden ist und dass nicht mehr als ein solches Integral existiren kann.*

Durch jeden Punkt der x-Axe ($x \geqq x_0$) geht ein Integral y_1 und durch jeden Punkt der Curve ε ($x \geqq x_0$) ein Integral y_2. Das Integral y_1 habe für $x = x_0$ den Werth α_1 und schneide die x-Axe bei $x = x_1$; y_2 habe für $x = x_0$ den Werth α_2 und schneide bei $x = x_2$ die Curve ε. Für einen endlichen Werth $x \geqq x_0$ können sich nicht zwei Integralcurven schneiden, weil sich in der Nähe der Unbestimmtheitsstelle $x = \infty$ (abgesehen von

Grösse x sämmtliche Grössen complex annimmt und eine Ergänzung der *Poincaré*schen Entwickelungen bildet. Das erste Verfahren wird im zweiten Theile der Arbeit auf allgemeinere Differentialgleichungen erster Ordnung ausgedehnt.

*) Durch eine Figur lässt sich das Folgende leicht veranschaulichen.

Unendlichkeitsstellen) keine singulären Stellen der Integrale befinden. Jedem Werthe $x_1 > x_0$ entspricht ein Werth α_1 und jedem $x_2 > x_0$ ein Werth α_2. Mit wachsendem x_1 nimmt α_1 ab, während α_2 mit wachsendem x_2 zunimmt. Die Zahlenreihe α_1 hat demnach eine ihr nicht angehörige untere Grenze β_1 und die Zahlenreihe α_2 eine ihr nicht angehörige obere Grenze β_2, und es ist $\beta_1 \geqq \beta_2$. Jedes Integral y_0, dessen Anfangswerth α_0 die Bedingung $\beta_1 \geqq \alpha_0 \geqq \beta_2$ erfüllt, hat den Grenzwerth 0. Durch den Werth, welchen ein Integral für $x = x_0$ annimmt, ist sein Werth für alle reellen $x > x_0$ eindeutig bestimmt.

Setzt man, unter y_0 ein Integral mit dem Grenzwerthe 0 verstehend,

$$y = y_0 + z,$$

so genügt z der Differentialgleichung

$$x^{-k}\frac{dz}{dx} + Pz^2 + (a+Q+2Py_0)z = 0,$$

für welche sich dieselben Betrachtungen anstellen lassen wie für (5.). Hier fällt jedoch die Curve ε mit der x-Axe zusammen, und das einzige Integral mit dem Grenzwerthe 0 ist $z = 0$. Es ist demnach nur ein Integral y mit dem Grenzwerthe 0 für $x = +\infty$ vorhanden.

*Zweiter Beweis**). In der Differentialgleichung (5.) dürfen jetzt abgesehen von der reellen positiven Grösse x sämmtliche Grössen complex sein. Bezeichnet $\Re(A)$ den reellen Theil der complexen Grösse A, so ist

$$\Re(-a) > 0$$

und

$$x^{-k}\frac{d\log|y|}{dx} = -\Re\left(a+Q+Py+\frac{R}{y}\right) = \Re(-a) - \Re\left(Q+Py+\frac{R}{y}\right).$$

Eine positive Grösse δ_x, welche mit wachsendem x abnimmt und für $x = +\infty$ den Grenzwerth 0 hat, kann so eingeführt werden, dass für den Werth x und für alle grösseren Werthe der Veränderlichen die absoluten Beträge der Functionen P, Q, R kleiner als δ_x sind. Setzt man

$$\frac{2}{\varepsilon_x} = \frac{\Re(-a)-\lambda}{\delta_x} - 1,$$

wobei die positive Grösse λ kleiner als $\Re(-a)$ angenommen wird, so ist ε_x eine mit wachsendem x abnehmende positive Grösse mit

$$\lim_{x=+\infty} \varepsilon_x = 0.$$

---

*) Im dritten Theile der Arbeit wird eine allgemeinere Klasse von Differentialgleichungen erster Ordnung nach ähnlicher Methode behandelt.

Für

$$\varepsilon_x \leqq |y| \leqq \frac{1}{\varepsilon_x}$$

ist

$$|y|+\frac{1}{|y|}+1 \leqq \frac{2}{\varepsilon_x}+1 = \frac{\Re(-a)-\lambda}{\delta_x},$$

$$\Re(Py+\frac{R}{y}+Q) \leqq |P|\cdot|y|+\frac{|R|}{|y|}+|Q| < \Re(-a)-\lambda,$$

also

$$x^{-k}\frac{d\log|y|}{dx} > \lambda > 0.$$

Der absolute Betrag von y nimmt demnach, sobald er zwischen ε_x und $\frac{1}{\varepsilon_x}$ liegt, mit wachsendem x zu. Ist $|y| \geqq \varepsilon_{x_0}$ für $x = x_0$, so ist

$$\lim_{x=+\infty} y = \infty.$$

Nur dann kann $\lim y = 0$ sein, wenn für $x = x_0$ $|y| < \varepsilon_{x_0}$ ist. *Es muss zur Ergänzung der Poincaré'schen Darstellung gezeigt werden, dass nothwendig ein Integral y mit dem Grenzwerthe* 0 *vorhanden ist.*

Ist x_0 hinreichend gross, so ist das Integral

$$y = f(x, \alpha),$$

welches für $x = x_0$ den Werth α besitzt, für alle $x \geqq x_0$ eindeutig definirt; nach einem Satze des Herrn *Poincaré**) ist $f(x, \alpha)$ für hinreichend kleine Werthe von $|\alpha-\alpha_0|$ in eine Potenzreihe von $\alpha-\alpha_0$ entwickelbar, wenn $f(x, \alpha_0)$ eine in dem Intervall von x_0 bis $x > x_0$ stetige Function von x ist. Ist $x = \xi$ ein endlicher reeller Werth $> x_0$, so ist ein und nur ein Integral vorhanden, welches für $x = \xi$ den Werth ε_ξ annimmt; der Werth dieses Integrals für $x = x_0$ heisse α_ξ, so dass dasselbe mit $y = f(x, \alpha_\xi)$ zu bezeichnen ist; es ist dann

$$|\alpha_\xi| < \varepsilon_{x_0},$$
$$|f(x, \alpha_\xi)| < \varepsilon_x \quad \text{für} \quad x < \xi,$$
$$|f(x, \alpha_\xi)| > \varepsilon_x \quad \text{für} \quad x > \xi.$$

Verschiedenen Werthen ξ entsprechen verschiedene Werthe α_ξ. Setzen wir für ξ alle ganzen Zahlen $> x_0$, so erhalten wir unendlich viele Werthe α_ξ, und es ist eine Grösse α_0 so vorhanden, dass in jeder Nähe von α_0 un-

*) Acta math. Bd. 13; *Picard,* Traité d'Analyse, Bd. III, S. 157—162.

endlich viele α_ξ liegen. Wenn r eine beliebig kleine und ξ' eine beliebig grosse positive Zahl darstellt, so ist sicher eine Zahl $\xi > \xi'$ vorhanden, so dass $|\alpha_\xi - \alpha_0| < r$ ist. Wir werden sehen, dass für jeden Werth $x \geqq x_0$

$$|f(x, \alpha_0)| < \varepsilon_x,$$

also

$$\lim_{x=+\infty} f(x, \alpha_0) = 0$$

ist. Nehmen wir an, es sei für einen gewissen Werth $\xi' > x_0$

$$|f(\xi', \alpha_0)| > \varepsilon_{\xi'}.$$

Ist eine positive Zahl δ

$$\delta < |f(\xi', \alpha_0)| - \varepsilon_{\xi'}$$

beliebig gegeben, so ist wegen der Stetigkeit von $f(\xi', \alpha)$ als Function von α eine positive Zahl r so vorhanden, dass für *alle* der Bedingung $|\alpha - \alpha_0| < r$ genügenden Werthe α

$$|f(\xi', \alpha) - f(\xi', \alpha_0)| < \delta$$

und demnach

$$|f(\xi', \alpha)| > \varepsilon_{\xi'}$$

ist. Das widerspricht aber der vorhin gefundenen Thatsache, dass es Werthe α mit $|\alpha - \alpha_0| < r$ so giebt, dass für gewisse Werthe $\xi > \xi'$

$$f(\xi, \alpha) = \varepsilon_\xi,$$

also

$$|f(\xi', \alpha)| < \varepsilon_{\xi'}$$

ist.

Dass $y_0 = f(x, \alpha_0)$ *das einzige Integral mit dem Grenzwerthe* 0 *ist,* wird folgendermassen gezeigt. Für die Differentialgleichung, welcher $z = y - y_0$ genügt,

$$x^{-k}\frac{dz}{dx} + Pz^2 + (a + Q + 2Py_0)z = 0,$$

hat man, wenn

$$|P| < \delta_x, \quad |Q + 2Py_0| < \delta_x; \quad \lim_{x=+\infty} \delta_x = 0,$$

$$\frac{\Re(-a) - \lambda}{\delta_x} - 1 = \frac{1}{\varepsilon_x}; \quad \lim_{x=+\infty} \varepsilon_x = 0$$

ist,

$$x^{-k}\frac{d\log|z|}{dx} > \lambda > 0 \quad \text{für} \quad |z| < \frac{1}{\varepsilon_x}.$$

Es ist demnach

$$\lim_{x=+\infty} z = \infty$$

für alle Integrale ausser $z = 0$.

Bisher war $\Re(a) < 0$ angenommen; im Falle $\Re(a) > 0$, welcher durch die Substitution $y = \frac{1}{y'}$ auf den früheren zurückgeführt wird, ist für ein particuläres Integral $\lim y = \infty$, für alle anderen Integrale $\lim y = 0$. Die Gleichung (1.) wurde durch die Substitution

$$y = \frac{K_0' z + K_0''}{z+1}$$

auf die Form (5.) gebracht; den Werthen $z = \infty$ und $z = 0$ entsprechen $y = K_0'$ und $y = K_0''$. Es ist demnach für ein einziges particuläres Integral $\lim y = K_0''$, für jedes andere Integral $\lim y = K_0'$. Wegen

$$2a_0 K_0 + b_0 = \sqrt{b_0^2 - 4a_0 c_0}$$

ist K_0' diejenige Wurzel der quadratischen Gleichung (4.), welche der Quadratwurzel mit positivem reellen Theile entspricht.

Das Verhalten der Integrale der Differentialgleichung (1.) wird genauer dargestellt durch den folgenden Satz:

„*Wenn x als reelle positive Grösse ins Unendliche geht, wird jedes Integral der Differentialgleichung* (1.) *durch die Reihe*

$$F' = K_0' + \frac{K_1'}{x} + \frac{K_2'}{x^2} + \cdots$$

asymptotisch dargestellt, mit Ausnahme des einzigen Integrals mit dem Grenzwerthe K_0'', welches durch die Reihe

$$F'' = K_0'' + \frac{K_1''}{x} + \frac{K_2''}{x^2} + \cdots$$

asymptotisch dargestellt wird; d. h. es ist für $n = 0, 1, 2 \ldots$

$$\lim_{x=+\infty} x^n \left(y - K_0' - \frac{K_1'}{x} - \cdots - \frac{K_n'}{x^n} \right) = 0$$

für jedes Integral y mit Ausnahme eines einzigen, für welches

$$\lim_{x=+\infty} x^n \left(y - K_0'' - \frac{K_1''}{x} - \cdots - \frac{K_n''}{x^n} \right) = 0$$

ist.“

Setzen wir

$$\Delta(y) = x^{-k} \frac{dy}{dx} + Ay^2 + By + C$$

und

$$F_n = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{K_\nu}{x^\nu},$$

so haben wir, da die Reihe F der Differentialgleichung $\varDelta(y) = 0$ formell genügt,

$$\varDelta(F_n) = \frac{\varphi_n\left(\frac{1}{x}\right)}{x^{n+1}},$$

wo $\varphi_n\left(\frac{1}{x}\right)$ eine gewöhnliche Potenzreihe von $\frac{1}{x}$ darstellt; die durch die Substitution

(6.) $$y = K_0 + \frac{K_1}{x} + \cdots + \frac{K_n}{x^n} + \frac{z_n}{x^n}$$

entstehende Differentialgleichung für z_n

$$\varDelta\left(F_n + \frac{z_n}{x^n}\right) = 0$$

schreibt sich

(7.) $$x^{-k}\frac{dz_n}{dx} + \frac{A}{x^n} z_n^2 + \left(B + 2AF_n - \frac{n}{x^{k+1}}\right) z_n + \frac{\varphi_n}{x} = 0,$$

woraus $\lim_{x=+\infty} z_n$ zu bestimmen ist.

Wir benutzen zunächst die Substitution

(6'.) $$y = K_0' + \frac{K_1'}{x} + \cdots + \frac{K_n'}{x} + \frac{z_n'}{x^n}$$

und bezeichnen die so entstehende Gleichung (7.) mit (7'.) Wegen

$$\Re(b_0 + 2a_0 K_0') > 0$$

ist in diesem Falle für ein einziges Integral $\lim z_n' = \infty$, für jedes andere Integral $\lim z_n' = 0$. Jedem Integral y von (1.) mit dem Grenzwerthe K_0' entspricht ein Integral von (7'.) mit dem Grenzwerthe 0; denn das einzige Integral z_n' mit dem Grenzwerthe ∞ muss dem Integral y mit dem Grenzwerthe K_0'' entsprechen, da aus $\lim y = K_0''$ nach (6'.) $\lim z_n' = \infty$ folgt. Demnach wird jedes Integral y mit dem Grenzwerthe K_0' durch die Reihe F' asymptotisch dargestellt.

Setzen wir nun

(6''.) $$y = K_0'' + \frac{K_1''}{x} + \cdots + \frac{K_n''}{x^n} + \frac{z_n''}{x^n},$$

so besitzt die entstehende Differentialgleichung (7''.) wegen $\Re(b_0 + 2a_0 K_0'') < 0$

ein einziges Integral z''_n mit dem Grenzwerthe 0; da zufolge (6''.) die Gleichung $\lim z''_n = 0$ die andere $\lim y = K''_0$ zur Folge hat, so muss dem einzigen Integrale y mit dem Grenzwerthe K''_0 das Integral z''_n mit dem Grenzwerthe 0 entsprechen; d. h. die Reihe F'' stellt das Integral y mit dem Grenzwerthe K''_0 asymptotisch dar.

Die Veränderliche x möge jetzt mit dem Argument ω ins Unendliche gehen:

$$x = re^{i\omega}, \quad \lim r = \infty.$$

Die Gleichung (1.) wird

$$(\bar{1}.) \qquad r^{-k}\frac{dy}{dr} + e^{i(k+1)\omega}(Ay^2+By+C) = 0;$$

die Gleichung

$$(\bar{4}.) \qquad e^{i(k+1)\omega}(a_0K_0^2+b_0K_0+c_0) = 0$$

hat die Wurzeln K'_0, K''_0, aber die Rolle, welche früher K'_0 spielte, fällt jetzt derjenigen der beiden Wurzeln zu, für welche $\mathfrak{R}(e^{i(k+1)\omega}a_0K_0)$ den grösseren Werth hat. Es sei

$$a_0(K'_0-K''_0) = \alpha+i\beta,$$

dann ist

$$\mathfrak{R}(e^{i(k+1)\omega}a_0(K'_0-K''_0)) = \alpha\cos(k+1)\omega-\beta\sin(k+1)\omega;$$

$\mathfrak{R}$ wird gleich Null, und unsere Methode lässt uns im Stich für

$$tg(k+1)\omega = \frac{\alpha}{\beta},$$

also für $2k+2$ Argumente

$$\omega_n = \omega_0+\frac{n\pi}{k+1}. \qquad (n = 0, 1, \ldots, 2k+1)$$

Für

$$\omega_{2m} < \omega < \omega_{2m+1}$$

wird, wenn in diesem Gebiete $\mathfrak{R} > 0$ ist, das allgemeine Integral durch die Reihe F' und ein particuläres Integral durch die Reihe F'' asymptotisch dargestellt, während in dem Gebiete

$$\omega_{2m-1} < \omega < \omega_{2m},$$

in welchem $\mathfrak{R} < 0$ ist, die Reihe F'' das allgemeine und die Reihe F' ein particuläres Integral asymptotisch darstellt.

„Es lassen sich $2k+2$ *Winkel* $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots,$ *welche eine arith-*

metische Reihe mit der Differenz $\frac{\pi}{k+1}$ *bilden, so angeben, dass, wenn* x *mit einem Argument* ω *zwischen* ω_0 *und* ω_1, *zwischen* ω_2 *und* ω_3 *u. s. w. ins Unendliche geht, alle Integrale der Differentialgleichung* (1.) *mit Ausnahme eines einzigen durch die Reihe*

$$K'_0+\frac{K'_1}{x}+\frac{K'_2}{x^2}+\cdots,$$

dagegen für ein Argument ω *zwischen* ω_1 *und* ω_2, *zwischen* ω_3 *und* ω_4 *u. s. w. alle Integrale bis auf eines durch die Reihe*

$$K''_0+\frac{K''_1}{x}+\frac{K''_2}{x^2}+\cdots$$

asymptotisch dargestellt werden. In jedem Gebiete, in welchem die eine Reihe unendlich viele Integrale darstellt, stellt die andere Reihe ein particuläres Integral asymptotisch dar".

Um die Bedeutung der asymptotischen Reihen noch anschaulicher darzustellen, setzen wir in der Differentialgleichung (1.)

$$x = \frac{1}{t},$$

so dass wir die Differentialgleichung

$$(8.)\qquad t^{k+2}\frac{dy}{dt} = Ay^2+By+C$$

mit der Unbestimmtheitsstelle $t=0$ und den Coefficienten

$$A = a_0+a_1t+a_2t^2+\cdots \quad \text{u. s. w.}$$

erhalten, welche durch zwei Reihen

$$(9.)\qquad F = K_0+K_1t+K_2t^2+\cdots$$

formell befriedigt wird. Wenn die Veränderliche t mit einem von $\omega_0, \omega_1, \ldots$ verschiedenen Argument ω nach $t=0$ geht, stellt die eine Reihe F ein particuläres Integral, die andere Reihe jedes andere Integral asymptotisch dar; es ist für den betreffenden Weg und das betreffende Integral

$$y \backsim F,$$

wie wir eine asymptotische Gleichung kurz schreiben wollen. Asymptotische Gleichungen dürfen zwar nicht ohne Weiteres differentiirt werden, aber dass

hier trotzdem die asymptotische Gleichung

$$\frac{dy}{dt} \backsim \frac{dF}{dt}$$

besteht, wo $\frac{dF}{dt}$ die durch gliedweise Differentiation von F gebildete Reihe darstellt, ergiebt sich folgendermassen. Nach den Sätzen des Herrn *Poincaré* über das Rechnen mit asymptotischen Reihen*) ist

$$\frac{Ay^2+By+C}{t^{k+2}} \backsim \frac{AF^2+BF+C}{t^{k+2}};$$

da nun aber, weil F der Differentialgleichung (8.) formell genügt, $\frac{dF}{dt}$ mit

$$\frac{AF^2+BF+C}{t^{k+2}}$$

übereinstimmt, so ist

$$\frac{dy}{dt} \backsim \frac{dF}{dt}.$$

Aehnlich erhält man

$$\frac{d^2y}{dt^2} \backsim \frac{d^2F}{dt^2} \quad \text{u. s. w.}$$

Es ist demnach

$$(10.)\qquad \begin{cases} \lim y = K_0, \\ \lim \frac{dy}{dt} = 1!K_1, \\ \lim \frac{d^2y}{dt^2} = 2!K_2, \\ \cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

wenn t auf dem betreffenden Wege nach der singulären Stelle $t=0$ geht.

Die asymptotische Reihe (9.) *liefert die Grenzwerthe einer der Differentialgleichung genügenden Function und ihrer Ableitungen auf einem gewissen nach der Unbestimmtheitsstelle $t=0$ gehenden Wege den Gleichungen* (10.) *zufolge in derselben Weise, wie eine convergente Potenzreihe die Werthe der Function und der Ableitungen an der regulären Stelle $t=0$.*

Bisher waren die Wurzeln der Gleichung (4.) als verschieden vorausgesetzt; jetzt möge K_0 eine Doppelwurzel, also $2a_0K_0+b_0=0$ sein. Die

---

*) Act. math. Bd. 8, a. a. O. § 1; les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, Beginn des zweiten Bandes, für Reihen, welche nach Potenzen eines Parameters fortschreiten.

Differentialgleichung (1.) geht durch die Substitution

$$(11.)\qquad x = u^2, \quad y = K_0 + \frac{z}{u}$$

über in

$$(12.)\qquad \tfrac{1}{2}u^{-2k}\frac{dz}{du} + Az^2 + \left(Gu - \frac{1}{2u^{2k+1}}\right)z + Hu^2 = 0,$$

wo gesetzt ist:

$$G = 2AK_0 + B = \frac{g}{u^2} + \frac{g'}{u^4} + \cdots,$$

$$H = AK_0^2 + BK_0 + C = \frac{h}{u^2} + \frac{h'}{u^4} + \cdots.$$

$\lim z = K_1$ genügt der Gleichung

$$a_0 K_1^2 + h = 0,$$

welche, *wenn* $h = a_1 K_0^2 + b_1 K_0 + c_1$ *von Null verschieden ist,* zwei verschiedene Wurzeln K_1', K_1'' besitzt, und zwar möge $\Re(a_0(K_1' - K_1'')) > $ sein. Wir erhalten aus (12.) zwei Reihen

$$\Phi' = K_1' + \frac{K_2'}{u} + \cdots, \quad \Phi'' = K_1'' + \frac{K_2''}{u} + \cdots;$$

wenn u als positive Grösse ins Unendliche geht, wird das allgemeine Integral von (12.) durch Φ', ein particuläres durch Φ'' asymptotisch dargestellt. Für y ergeben sich die Reihen

$$(13.)\qquad \begin{cases} F' = K_0 + \dfrac{K_1'}{x^{\frac{1}{2}}} + \dfrac{K_2'}{(x^{\frac{1}{2}})^2} + \cdots, \\ F'' = K_0 + \dfrac{K_1''}{x^{\frac{1}{2}}} + \dfrac{K_2''}{(x^{\frac{1}{2}})^2} + \cdots, \end{cases}$$

und zwar stellt F'' ein particuläres Integral, F' alle Integrale mit Ausnahme dieses einen asymptotisch dar, wenn x als reelle positive Grösse ins Unendliche geht und $x^{\frac{1}{2}}$ positiv genommen wird.

Auf die Untersuchung aller Fälle wollen wir nicht eingehen.

§ 2.

In der Differentialgleichung

$$(14.)\qquad \frac{d^2w}{dx^2} + x^k P \frac{dw}{dx} + x^{2k} Q w = 0$$

sei k eine ganze positive Zahl einschliesslich Null ($k+1$ ist der Rang nach

Poincarés Bezeichnung) und

$$P = p_0 + \frac{p_1}{x} + \frac{p_2}{x^2} + \cdots,$$

$$Q = q_0 + \frac{q_1}{x} + \frac{q_2}{x^2} + \cdots$$

in der Umgebung von $x=\infty$ reguläre Functionen. Die Substitution

$$(15.) \qquad y = x^{-k}\frac{d\log w}{dx}$$

führt auf die *Riccati*sche Gleichung

$$(16.) \qquad x^{-k}\frac{dy}{dx} + y^2 + \left(P + \frac{k}{x^{k+1}}\right)y + Q = 0,$$

welche, wenn die Wurzeln K_0', K_0'' der Gleichung

$$(17.) \qquad K_0^2 + p_0 K_0 + q_0 = 0$$

verschieden sind, durch zwei Reihen

$$(18.) \qquad \begin{cases} F' = K_0' + \frac{K_1'}{x} + \frac{K_2'}{x^2} + \cdots, \\ F'' = K_0'' + \frac{K_1''}{x} + \frac{K_2''}{x^2} + \cdots \end{cases}$$

formell befriedigt wird, welche die Integrale von (16.) in bekannter Weise asymptotisch darstellen. Geht x als reelle positive Grösse ins Unendliche und ist $\Re(K_0') > \Re(K_0'')$, so stellt die Reihe F'' das einzige Integral von (16.) mit dem Grenzwerthe K_0'' asymptotisch dar. Ein Fundamentalsystem w', w'' von (17.) ist für grosse reelle x eindeutig definirt; dann ist

$$w = C'w' + C''w''$$

und, wenn

$$\frac{C''}{C'} = C$$

gesetzt wird,

$$y = x^{-k}\frac{\frac{dw'}{dx} + C\frac{dw''}{dx}}{w' + Cw''}.$$

Das Integral y mit dem Grenzwerthe K_0'' möge dem Werthe $C=\infty$ (also $C'=0$) entsprechen; es ist demnach

$$\lim x^{-k}\frac{d\log w'}{dx} = K_0',$$

$$\lim x^{-k}\frac{d\log w''}{dx} = K_0'';$$

die erstere Gleichung gilt auch, wenn w' durch ein beliebiges Integral w ersetzt wird, für welches C' von Null verschieden ist.

Wir verstehen unter y' ein Integral von (16.), welches durch die Reihe F', und unter y'' dasjenige Integral, welches durch die Reihe F'' asymptotisch dargestellt wird; wir setzen, unter x_0 eine hinreichend grosse positive Zahl und unter w_0', w_0'' Constante verstehend,

$$(19.)\qquad \begin{cases} w' = w_0' e^{\int_{x_0}^{x} x^k y' dx}, \\ w'' = w_0'' e^{\int_{x_0}^{x} x^k y'' dx}, \end{cases}$$

und leiten unter Weglassung der Indices aus der asymptotischen Reihe F für y eine asymptotische Reihe für

$$(19.)\qquad w = w_0 e^{\int_{x_0}^{x} x^k y dx}$$

her. Aus $y \backsim F$ folgt

$$x^k y - \left(K_0 x^k + K_1 x^{k-1} + \cdots + K_k + \frac{K_{k+1}}{x}\right) = \sum_{\mu=2}^{m+1} \frac{K_{k+\mu}}{x^\mu} + \frac{\varepsilon_m}{x^{m+1}}; \quad \lim_{x=\infty} \varepsilon_m = 0.$$

Wenn ε_m' eine gewisse Function von x bezeichnet, welche dem absoluten Betrage nach kleiner als ε_m ist, so ist

$$\int_\infty^x \frac{\varepsilon_m dx}{x^{m+1}} = \varepsilon_m' \int_\infty^x \frac{dx}{x^{m+1}} = -\frac{\varepsilon_m'}{m x^m} = \frac{\bar{\varepsilon}_m}{x^m}; \quad \lim_{x=\infty} \bar{\varepsilon}_m = 0,$$

also

$$\begin{aligned} \int_\infty^x \left\{x^k y - \left(K_0 x^k + \cdots + K_k + \frac{K_{k+1}}{x}\right)\right\} dx &= -\sum_{\mu=1}^{m} \frac{K_{k+\mu+1}}{\mu x^\mu} + \frac{\bar{\varepsilon}_m}{x^m} \\ &= \int_{x_0}^x x^k y\, dx - \int_{x_0}^x \left(K_0 x^k + \cdots + K_k + \frac{K_{k+1}}{x}\right) dx \\ &\quad + \int_\infty^{x_0} \left\{x^k y - \left(K_0 x^k + \cdots + K_k + \frac{K_{k+1}}{x}\right)\right\} dx, \end{aligned}$$

d. i. wenn $\log w_0$ eine von x_0 abhängige Constante bezeichnet,

$$\begin{aligned} &\int_{x_0}^x x^k y\, dx - \left(K_0 \frac{x^{k+1}}{k+1} + K_1 \frac{x^k}{k} + \cdots + K_k x\right) \\ &\qquad\qquad - K_{k+1} \log x + \log w_0 = -\sum_{\mu=1}^{m} \frac{K_{k+\mu+1}}{\mu x^\mu} + \frac{\bar{\varepsilon}_m}{x^m}. \end{aligned}$$

Wir haben demnach die asymptotische Gleichung

$$\int_{x_0}^x x^k y\, dx - \left(K_0 \frac{x^{k+1}}{k+1} + \cdots\right) - K_{k+1} \log x + \log w_0 \backsim -\sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{K_{k+\mu+1}}{\mu x^\mu},$$

aus welcher nach einem *Poincaré*schen Satze*) die asymptotische Gleichung folgt:

$$(20.)\qquad w_0 e^{\int_{x_0}^{x} x^k y\,dx}\, e^{-\left(K_0\frac{x^{k+1}}{k+1}+\cdots+K_k x\right)}\, x^{-K_{k+1}} \backsim e^{-\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{K_{k+\mu+1}}{\mu x^{\mu}}} = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{L_\nu}{x^\nu}\ {}^{**}).$$

Wenn wir dieselbe Grösse w_0, welche bei der Integration aufgetreten ist, bei der Bestimmung von w nach (19.) verwenden, so schreibt sich (20.) in der Form

$$(21.)\qquad w = e^{K_0\frac{x^{k+1}}{k+1}+\cdots+K_k x}\, x^{K_{k+1}}\left(L_0+\frac{L_1}{x}+\cdots+\frac{L_n}{x^n}+\frac{\varepsilon_n}{x^n}\right);\quad \lim_{x=\infty}\varepsilon_n = 0.$$

Wir haben demnach die asymptotische Darstellung des Integrals w der linearen Differentialgleichung (14.) durch die Normalreihe

$$(22.)\qquad \Psi = e^{K_0\frac{x^{k+1}}{k+1}+\cdots+K_k x}\, x^{K_{k+1}}\left(L_0+\frac{L_1}{x}+\frac{L_2}{x^2}+\cdots\right)$$

nachgewiesen. Die beiden Normalreihen, welche den Werthen $K_0 = K_0'$ und $K_0 = K_0''$ entsprechen, mögen Ψ' und Ψ'' heissen.

„*Es sei* $\Re(K_0'-K_0'') > 0$, *wenn* K_0', K_0'' *die Wurzeln der quadratischen Gleichung* (17.) *darstellen, und* x *gehe als reelle positive Grösse ins Unendliche. Es lässt sich ein Fundamentalsystem* w', w'' *der linearen Differentialgleichung* (14.) *so auswählen, dass die asymptotischen Gleichungen bestehen:*

$$w' \backsim e^{K_0'\frac{x^{k+1}}{k+1}+\cdots+K_k' x}\, x^{K_{k+1}'}\left(L_0'+\frac{L_1'}{x}+\frac{L_2'}{x^2}+\cdots\right),$$

$$w'' \backsim e^{K_0''\frac{x^{k+1}}{k+1}+\cdots+K_k'' x}\, x^{K_{k+1}''}\left(L_0''+\frac{L_1''}{x}+\frac{L_2''}{x^2}+\cdots\right)\text{“}.$$

Dies ist aber das von Herrn *Poincaré* (Act. math. Bd. 8) mit Hülfe der *Laplace*schen Transformirten für lineare Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten (zunächst für $k = 0$) gefundene Resultat, und wenn wir in Formel (21.) $n = 0$ setzen, haben wir das speciellere Resultat (Am. Journal Bd. 7):

$$\lim_{x=\infty} w' e^{-\left(K_0'\frac{x^{k+1}}{k+1}+\cdots\right)} x^{-K_{k+1}'} = L_0',$$

$$\lim_{x=\infty} w'' e^{-\left(K_0''\frac{x^{k+1}}{k+1}+\cdots\right)} x^{-K_{k+1}''} = L_0'',$$

*) Act. math. Bd. 8, S. 298—300.

**) $L_0 = 1$.

wo L_0', L_0'' endlich und von Null verschieden sind (für die oben ausgewählten Integrale gleich 1).

Man sieht auch, dass das Integral

$$w = C'w' + C''w'',$$

worin $C' \neq 0$ sei, durch die Normalreihe $C'\Psi'$ asymptotisch dargestellt wird, und es ergiebt sich weiter aus einem Satze über die *Riccati*sche Gleichung der folgende Satz:

„*Es sind* $2k+2$ *Winkel* ω_n $(n = 0, 1, \ldots, 2k+1)$ *mit der Differenz* $\omega_n - \omega_{n-1} = \frac{\pi}{k+1}$ *so vorhanden, dass jedes Integral* w *der Differentialgleichung* (14.) *mit Ausnahme eines einzigen durch die mit einem geeigneten constanten Factor versehene Normalreihe* Ψ' *oder* Ψ'' *asymptotisch dargestellt wird, je nachdem das Argument* ω, *mit welchem* x *in die Unbestimmtheitsstelle* $x = \infty$ *geht, zwischen* ω_{2n} *und* ω_{2n+1} *oder zwischen* ω_{2n-1} *und* ω_{2n} *liegt, während die andere Normalreihe immer ein particuläres Integral*) asymptotisch darstellt.*“

Die $2k+2$ ausgeschlossenen Argumente ω_n bedürfen noch einer besonderen Untersuchung**).

Im Falle $K_0' = K_0''$ werden die Integrale der Differentialgleichung (14.) im allgemeinen durch die aus (13.) vermöge (19.) hervorgehenden „anormalen Reihen“ asymptotisch dargestellt.

Charlottenburg, 28. Mai 1896.

---

*) Dabei sind Integrale, welche sich bloss durch einen constanten Factor unterscheiden, als identisch betrachtet.

**) Vgl. den zweiten Aufsatz des Herrn *Kneser* (dieses Journal Bd. 117) in Betreff einer specielleren Differentialgleichung unter Beschränkung auf reelle Grössen.

Ueber die Principien der Mechanik.

(Von Herrn *Leo Königsberger* in Heidelberg.)

Die Principien der analytischen Mechanik, welche von *Lagrange, Hamilton* und *Jacobi* in strenger und eleganter Form entwickelt worden sind, haben in neuerer Zeit nach zwei wesentlich verschiedenen Richtungen hin Erweiterungen erfahren, welche für die mathematische Physik von grösster Bedeutung wurden.

Während die ältere Mechanik das *kinetische Potential* in der Form zu Grunde legte

$$H = -T-U,$$

worin

$$T = \tfrac{1}{2}\Sigma m_i(x_i'^2+y_i'^2+z_i'^2)$$

die *lebendige Kraft* oder *actuelle Energie* des Systems, U die nur von der Zeit und den Coordinaten, nicht von deren Ableitungen, abhängige *Kräftefunction* oder negativ genommen die *potentielle Energie* bedeuteten, und mit Hülfe derselben unter Zuziehung äusserer Kräfte die *Lagrange*schen Bewegungsgleichungen in der Form entwickelte

$$\frac{dH}{dp_s}-\frac{d}{dt}\left(\frac{dH}{dp_s'}\right)+P_s = 0,$$

welche wiederum auf die entsprechenden Variationsprobleme und auf die allgemein gültigen Gesetze der Bewegung hinüberleiteten, welche als Principien der Mechanik bezeichnet werden, forderte die Entwicklung der mathematischen Physik, und zwar zunächst die Aufstellung des *Weber*schen Gesetzes von der Wirkung zwischen elektrischen Massenpunkten, die Einführung von Kräften, welche nicht wie die bisher behandelten nur von der Lage der Punkte sondern auch von den Geschwindigkeiten und Beschleunigungen derselben abhängen, und vor Allen hat *C. Neumann* die Frage nach der Zusammensetzung der Function U aus den Coordinaten und deren ersten Ableitungen aufgeworfen, wenn die Gültigkeit des

*Hamilton*schen Integralprincips erhalten bleiben soll. Wesentlich anderer Natur und von grosser principieller Bedeutung ist die von *Helmholtz* in die Mechanik eingeführte Betrachtungsweise des kinetischen Potentials als einer Function der Coordinaten und deren ersten Ableitungen, in welcher unmittelbar eine Trennung der actuellen und potentiellen Energie nicht ersichtlich ist, welche aber den Energievorrath des gesammten Systemes eindeutig bestimmt und wiederum die Grundfunction für die Integralprincipien der Mechanik bildet, woraus sich dann die von *Helmholtz* aufgestellte und von *Hertz* übernommene Theorie der verborgenen Bewegungen weiter entwickelt hat.

Ich beabsichtige nun im Folgenden*) den Untersuchungen von *Neumann* und *Helmholtz* eine allgemeinere Gestalt zu geben und eine Reihe von Ergebnissen rein mathematischer Natur vorzulegen, ohne mich in eine Besprechung der Frage einzulassen, in wie weit die Physik diese Verallgemeinerung, nämlich die Einführung von Kräften erfordert, die nicht nur Functionen der Zeit und der Coordinaten sind, sondern auch von den Geschwindigkeiten, den Beschleunigungen und noch höheren Differentialquotienten des Weges nach der Zeit genommen abhängen. Es werden dadurch sämmtliche Principien der Mechanik eine weit umfassendere Bedeutung gewinnen und vielleicht als mathematische Sätze einiges Interesse bieten.

I.

Hülfsatz betr. eine identische Beziehung zwischen den Differentialquotienten einer Function.

Um die nachfolgenden Untersuchungen nicht zu unterbrechen, soll zunächst ein Hülfsatz vorangeschickt werden, der gewöhnlich nur für die partiellen Differentialquotienten der nach der Zeit genommenen Ableitungen der Entfernung zweier Punkte von einander entwickelt wird, welcher jedoch für beliebige Functionalbeziehungen gültig ist und im Folgenden mannigfache Anwendung finden wird.

Wenn

$$R = f(t, x, y, z, \ldots)$$

gegeben ist, so wird das ϱte totale Differential von R, wie ich früher

*) Einen Theil der in der vorliegenden Arbeit enthaltenen Resultate habe ich bereits in den Sitzungsberichten der Berliner Akademie vom Juli und Oktober 1896 und Maerz 1897 veröffentlicht.

gezeigt habe*), durch den Ausdruck dargestellt

$$d^\varrho R = \sum_{\substack{n_1, n_2, \ldots, n_\varrho > 0 \\ (n_1+2n_2+3n_3+\cdots+\varrho n_\varrho = \varrho)}} \frac{\varrho!}{n_1!\, n_2! \ldots n_\varrho!} \frac{1}{(1!)^{n_1}(2!)^{n_2}\ldots(\varrho!)^{n_\varrho}}$$

$$\left(\frac{\partial R}{\partial t} dt + \frac{\partial R}{\partial x} dx + \frac{\partial R}{\partial y} dy + \cdots\right)^{n_1}$$

$$\left(\frac{\partial R}{\partial t} d^2t + \frac{\partial R}{\partial x} d^2x + \frac{\partial R}{\partial y} d^2y + \cdots\right)^{n_2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left(\frac{\partial R}{\partial t} d^\varrho t + \frac{\partial R}{\partial x} d^\varrho x + \frac{\partial R}{\partial y} d^\varrho y + \cdots\right)^{n_\varrho},$$

worin die Potenzen in bekannter Weise symbolisch zu verstehen sind. Fassen wir nun t als unabhängige Variable und $x, y, z, \ldots$ als Functionen von t auf, so wird sich hieraus durch Division mit dt^ϱ, wenn

$$\frac{d^\lambda R}{dt^\lambda} = R^{(\lambda)}, \quad \frac{d^\lambda x}{dt^\lambda} = x^{(\lambda)}, \quad \frac{d^\lambda y}{dt^\lambda} = y^{(\lambda)}, \quad \ldots$$

gesetzt wird, die Beziehung ergeben

$$(1.) \quad \begin{cases} R^{(\varrho)} = \displaystyle\sum_{\substack{n_1, n_2, \ldots, n_\varrho > 0 \\ (n_1+2n_2+\cdots+\varrho n_\varrho = \varrho)}} \frac{\varrho!}{n_1!\, n_2! \ldots n_\varrho!} \frac{1}{(1!)^{n_1}(2!)^{n_2}\ldots(\varrho!)^{n_\varrho}} \\ \qquad \left(\dfrac{\partial R}{\partial t} + \dfrac{\partial R}{\partial x} x' + \dfrac{\partial R}{\partial y} y' + \cdots\right)^{n_1} \\ \qquad \left(\dfrac{\partial R}{\partial x} x'' + \dfrac{\partial R}{\partial y} y'' + \cdots\right)^{n_2} \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad \left(\dfrac{\partial R}{\partial x} x^{(\varrho-1)} + \dfrac{\partial R}{\partial y} y^{(\varrho-1)} + \cdots\right)^{n_{\varrho-1}} \\ \qquad \left(\dfrac{\partial R}{\partial x} x^{(\varrho)} + \dfrac{\partial R}{\partial y} y^{(\varrho)} + \cdots\right)^{n_\varrho}. \end{cases}$$

Durch partielle Differentiation nach $x^{(\lambda)}$ folgt nun

$$\frac{\partial R^{(\varrho)}}{\partial x^{(\lambda)}} = \sum_{\substack{n_1, n_2, \ldots, n_\varrho > 0 \\ (n_1+2n_2+\cdots+\lambda n_\lambda+\cdots+\varrho n_\varrho = \varrho)}} \frac{\varrho!}{n_1!\, n_2! \ldots n_\lambda! \ldots n_\varrho!} \frac{1}{(1!)^{n_1}(2!)^{n_2}\ldots(\lambda!)^{n_\lambda}\ldots(\varrho!)^{n_\varrho}}$$

$$\left(\frac{\partial R}{\partial t} + \frac{\partial R}{\partial x} x' + \cdots\right)^{n_1} \left(\frac{\partial R}{\partial x} x'' + \cdots\right)^{n_2}$$

$$n_\lambda \frac{\partial R}{\partial x} \left(\frac{\partial R}{\partial x} x^{(\lambda)} + \cdots\right)^{n_\lambda - 1} \cdots \left(\frac{\partial R}{\partial x} x^{(\varrho)} + \cdots\right)^{n_\varrho}$$

---

*) „Ueber das Bildungsgesetz der höheren Differentiale einer Function von Functionen". Mathematische Annalen Bd. 27.

oder wenn $n_\lambda = \nu_\lambda + 1$ gesetzt wird, durch eine einfache Umformung

$$\frac{\partial R^{(\varrho)}}{\partial x^{(\lambda)}} = \sum_{\substack{n_1, n_2, \dots, \nu_\lambda, \dots, n_{\varrho-\lambda} > 0 \\ (n_1+2n_2+\dots+\lambda\nu_\lambda+\dots+(\varrho-\lambda)n_{\varrho-\lambda} = \varrho-\lambda)}} \frac{\varrho(\varrho-1)\dots(\varrho-\lambda+1)}{1.2\dots\lambda} \frac{(\varrho-\lambda)!}{n_1!n_2!\dots\nu_\lambda!\dots n_{\varrho-\lambda}!}$$
$$\frac{1}{(1!)^{n_1}(2!)^{n_2}\dots(\lambda!)^{\nu_\lambda}\dots((\varrho-\lambda)!)^{n_{\varrho-\lambda}}}$$
$$\frac{\partial R}{\partial x}\Big(\frac{\partial R}{\partial t}+\frac{\partial R}{\partial x}x'+\cdots\Big)^{n_1}\Big(\frac{\partial R}{\partial x}x''+\cdots\Big)^{n_2}$$
$$\Big(\frac{\partial R}{\partial x}x^{(\lambda)}+\cdots\Big)^{\nu_\lambda}\cdots\Big(\frac{\partial R}{\partial x}x^{(\varrho-\lambda)}+\cdots\Big)^{n_{\varrho-\lambda}}$$

und somit aus (1.), wenn ϱ durch $\varrho-\lambda$ ersetzt wird,

$$(2.)\qquad \frac{\partial R^{(\varrho)}}{\partial x^{(\lambda)}} = \frac{\varrho(\varrho-1)\dots(\varrho-\lambda+1)}{1.2\dots\lambda}\frac{\partial R^{(\varrho-\lambda)}}{\partial x},$$

und hieraus

$$(3.)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^\lambda}{dt^\lambda}\Big(\dfrac{\partial R^{(\varrho)}}{\partial x^{(\lambda)}}\Big) = \dfrac{\varrho(\varrho-1)\dots(\varrho-\lambda+1)}{1.2\dots\lambda}\dfrac{d^\lambda}{dt^\lambda}\Big(\dfrac{\partial R^{(\varrho-\lambda)}}{\partial x}\Big) \\ \qquad\qquad = \dfrac{\varrho(\varrho-1)\dots(\varrho-\lambda+1)}{1.2\dots\lambda}\dfrac{\partial R^{(\varrho)}}{\partial x}\,{}^{*}), \end{cases}$$

so dass sich die Identität ergiebt

$$(4.)\qquad \frac{\partial R^{(\varrho)}}{\partial x}-\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial R^{(\varrho)}}{\partial x'}\Big)+\frac{d^2}{dt^2}\Big(\frac{\partial R^{(\varrho)}}{\partial x''}\Big)-\cdots+(-1)^\varrho\frac{d^\varrho}{dt^\varrho}\Big(\frac{\partial R^{(\varrho)}}{\partial x^{(\varrho)}}\Big) = 0,$$

welche man auch unmittelbar aus den Principien der Variationsrechnung folgern kann, indem unter der Annahme, dass $x, x', x'', \dots, x^{(\varrho-1)}$ an den Integralgrenzen t_0 und t_1 keine Variationen erleiden sollen,

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} R^{(\varrho)}(t, x)\,dt = \int_{t_0}^{t_1}\Big[\frac{\partial R^{(\varrho)}}{\partial x}-\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial R^{(\varrho)}}{\partial x'}\Big)+\cdots+(-1)^\varrho\frac{d^\varrho}{dt^\varrho}\Big(\frac{\partial R^{(\varrho)}}{\partial x^{(\varrho)}}\Big)\Big]\delta x\,dt$$
$$= \delta\{R^{(\varrho-1)}(t_1, x_1)-R^{(\varrho-1)}(t_0, x_0)\} = 0$$

ist.

Sind nun $R_1, R_2, \dots$ Functionen von t und den μ Grössen $p_1, p_2, \dots, p_\mu$, welche selbst wieder als Functionen von t aufgefasst werden sollen, und sei

$$V = F(t, R_1, R_1', R_1'', \dots, R_1^{(\nu)}, R_2, R_2', \dots, R_2^{(\nu)}, \dots),$$

so wird, wenn s einen der Indices $1, 2, \dots, \mu$ bedeutet,

---

*) da für $S = \varphi(t, x, y, \dots)$ wegen $\dfrac{dS}{dt} = \dfrac{\partial S}{\partial t}+\dfrac{\partial S}{\partial x}x'+\dfrac{\partial S}{\partial y}y'+\cdots$

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{dS}{dt}\Big) = \frac{\partial^2 S}{\partial x\partial t}+\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}x'+\frac{\partial^2 S}{\partial x\partial y}y'+\cdots = \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial S}{\partial x}\Big)$$

ist.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial p_s} &= \frac{\partial V}{\partial R_1}\frac{\partial R_1}{\partial p_s}+\frac{\partial V}{\partial R_1'}\frac{\partial R_1'}{\partial p_s}+\frac{\partial V}{\partial R_1''}\frac{\partial R_1''}{\partial p_s}+\cdots+\frac{\partial V}{\partial R_2}\frac{\partial R_2}{\partial p_s}+\frac{\partial V}{\partial R_2'}\frac{\partial R_2'}{\partial p_s}+\frac{\partial V}{\partial R_2''}\frac{\partial R_2''}{\partial p_s}+\cdots,\\
\frac{\partial V}{\partial p_s'} &= \frac{\partial V}{\partial R_1'}\frac{\partial R_1'}{\partial p_s'}+\frac{\partial V}{\partial R_1''}\frac{\partial R_1''}{\partial p_s'}+\cdots\cdots+\frac{\partial V}{\partial R_2'}\frac{\partial R_2'}{\partial p_s'}+\frac{\partial V}{\partial R_2''}\frac{\partial R_2''}{\partial p_s'}+\cdots,\\
\frac{\partial V}{\partial p_s''} &= \frac{\partial V}{\partial R_1''}\frac{\partial R_1''}{\partial p_s''}+\cdots\cdots+\frac{\partial V}{\partial R_2''}\frac{\partial R_2''}{\partial p_s''}+\cdots,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots,
\end{aligned}$$

und somit, da nach (2.)

$$\frac{\partial R_m^{(\varrho)}}{\partial p_s^{(\varrho)}} = \frac{\partial R_m}{\partial p_s},$$

und nach (4.)

$$\frac{\partial R_m^{(\varrho)}}{\partial p_s}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R_m^{(\varrho)}}{\partial p_s'}\right)+\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial R_m^{(\varrho)}}{\partial p_s''}\right)-\cdots+(-1)^\varrho\frac{d^\varrho}{dt^\varrho}\left(\frac{\partial R_m^{(\varrho)}}{\partial p_s^{(\varrho)}}\right) = 0$$

ist, die auch aus der Variation des Integrals folgende Beziehung

$$(5.)\quad \begin{cases}
\dfrac{\partial V}{\partial p_s}-\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial V}{\partial p_s'}\right)+\dfrac{d^2}{dt^2}\left(\dfrac{\partial V}{\partial p_s''}\right)-\cdots+(-1)^\nu\dfrac{d^\nu}{dt^\nu}\left(\dfrac{\partial V}{\partial p_s^{(\nu)}}\right)\\
= \left[\dfrac{\partial V}{\partial R_1}-\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial V}{\partial R_1'}\right)+\dfrac{d^2}{dt^2}\left(\dfrac{\partial V}{\partial R_1''}\right)-\cdots+(-1)^\nu\dfrac{d^\nu}{dt^\nu}\left(\dfrac{\partial V}{\partial R_1^{(\nu)}}\right)\right]\dfrac{\partial R_1}{\partial p_s}\\
+\left[\dfrac{\partial V}{\partial R_2}-\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial V}{\partial R_2'}\right)+\dfrac{d^2}{dt^2}\left(\dfrac{\partial V}{\partial R_2''}\right)-\cdots+(-1)^\nu\dfrac{d^\nu}{dt^\nu}\left(\dfrac{\partial V}{\partial R_2^{(\nu)}}\right)\right]\dfrac{\partial R_2}{\partial p_s}\\
+\cdots\cdots\cdots,
\end{cases}$$

die wir dem Folgenden zu Grunde legen.

Als Anwendung der Beziehung (5.) mag der Fall hervorgehoben werden, in welchem ein System von Punkten durch anziehende oder abstossende innere Kräfte bewegt wird, die, wenn W eine Function der Zeit t, der Entfernung je zweier Punkte r von einander und deren nach t genommenen Ableitungen bis zur νten Ordnung hin ist, durch den Ausdruck gegeben sind

$$V = \frac{\partial W}{\partial r}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W}{\partial r'}\right)+\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial W}{\partial r''}\right)-\cdots+(-1)^\nu\frac{d^\nu}{dt^\nu}\left(\frac{\partial W}{\partial r^{(\nu)}}\right)\text{*)}$$

und somit die Ableitungen von r bis zur 2νten Ordnung hin enthalten. Werden die Coordinaten der beiden Punkte, deren Entfernung r ist, mit x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 bezeichnet, so dass

$$r^2 = (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2$$

*) Vgl. *Scheibner*, Zeitschr. f. Mathem. u. Phys. XIII, Recension der Principien der Elektrodynamik von *C. Neumann*.

ist, so folgt aus (5.), dass, wenn $R_1 = r$, $p_s = x_1$ gesetzt wird,

$$\frac{\partial W}{\partial x_1} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W}{\partial x_1'}\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial W}{\partial x_1''}\right) - \cdots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\left(\frac{\partial W}{\partial x_1^{(\nu)}}\right) = V\frac{\partial r}{\partial x_1} = V\frac{x_1 - x_2}{r} = X_1$$

ist, und ähnlich für alle Coordinaten, wenn $X_1, Y_1, Z_1, \ldots$ die Componenten der Kraft V bedeuten, und es sind somit die Kräfte V innere Potentialkräfte, wie dies neuerdings wieder*) von *C. Neumann* für solche Functionen W, welche nur die erste Ableitung von r enthalten, also auch für das *Weber*sche Gesetz nachgewiesen worden; doch konnte es bei den bisher dafür gegebenen Beweisen scheinen, als ob diese Sätze von den Eigenschaften der Differentialquotienten der Entfernung zweier Punkte abhängen, während die Relation (5.) in der That für alle Functionalbeziehungen gültig ist. Der Beweis von der Allgemeinheit des obigen Ausdruckes der inneren Potentialkräfte durch Bestimmung von W als Function der Zeit, der Coordinaten und der Ableitungen derselben nach der Zeit genommen bis zur νten Ordnung hin kann genau so hergeleitet werden, wie *A. Mayer* dies für den oben erwähnten speciellen Fall *C. Neumanns* gethan hat**).

II.

Die erste Form der erweiterten *Lagrange*schen Gleichungen.

Seien n Punkte eines Systems gegeben, deren Coordinaten wir mit

$$x_1,\ y_1,\ z_1,\quad x_2,\ y_2,\ z_2,\quad \ldots,\quad x_n,\ y_n,\ z_n$$

bezeichnen, und die von bestimmten Kräften in Bewegung gesetzt werden; die Bewegungsfreiheit der Punkte mag durch m in den virtuellen Verschiebungen lineare homogene Gleichungen von der Form beschränkt sein

$$(1.)\quad \begin{cases} f_{11}\,\delta x_1 + \varphi_{11}\,\delta y_1 + \psi_{11}\,\delta z_1 + f_{12}\,\delta x_2 + \varphi_{12}\,\delta y_2 + \psi_{12}\,\delta z_2 + \cdots \\ \qquad \cdots + f_{1n}\,\delta x_n + \varphi_{1n}\,\delta y_n + \psi_{1n}\,\delta z_n = 0, \\ f_{21}\,\delta x_1 + \varphi_{21}\,\delta y_1 + \psi_{21}\,\delta z_1 + f_{22}\,\delta x_2 + \varphi_{22}\,\delta y_2 + \psi_{22}\,\delta z_2 + \cdots \\ \qquad \cdots + f_{2n}\,\delta x_n + \varphi_{2n}\,\delta y_n + \psi_{2n}\,\delta z_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_{m1}\,\delta x_1 + \varphi_{m1}\,\delta y_1 + \psi_{m1}\,\delta z_1 + f_{m2}\,\delta x_2 + \varphi_{m2}\,\delta y_2 + \psi_{m2}\,\delta z_2 + \cdots \\ \qquad \cdots + f_{mn}\,\delta x_n + \varphi_{mn}\,\delta y_n + \psi_{mn}\,\delta z_n = 0, \end{cases}$$

*) „Allgemeine Untersuchungen über das *Newton*sche Princip der Fernwirkungen" 1896. S. 230.

**) Berichte über die Verhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig" 1877.

worin die f, φ, ψ stetige Functionen der $3n$ Coordinaten und der Zeit sind, und die Differentialgleichungen (1.) nicht integrirbar zu sein brauchen; sind die Bedingungsgleichungen in endlicher Form gegeben, so sind sonach als virtuelle Verrückungen solche zu definiren, welche diesen Bedingungen genügen, wenn man die Zeit t unverändert lässt, so dass, wenn letztere explicit in den Gleichungen enthalten ist, die wirklichen Veränderungen keine virtuellen sind. In allen Fällen wird der von *Lipschitz* für die Gültigkeit des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten geforderten*) Bedingung genügt, dass man die kleinen Verschiebungen als unendlich kleine derselben Ordnung zu betrachten hat.

Es werde nun angenommen, dass während des Verlaufes der unabhängigen Variablen t die Coordinaten und deren Ableitungen der Bedingung unterliegen

$$(2.)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_1^n{}_k \left\{\frac{\partial H}{\partial x_k}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial x_k'}\right)+\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial H}{\partial x_k''}\right)-\cdots+(-1)^\nu\frac{d^\nu}{dt^\nu}\left(\frac{\partial H}{\partial x_k^{(\nu)}}\right)-Q_k\right\}\delta x_k\\ &+\sum_1^n{}_k \left\{\frac{\partial H}{\partial y_k}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial y_k'}\right)+\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial H}{\partial y_k''}\right)-\cdots+(-1)^\nu\frac{d^\nu}{dt^\nu}\left(\frac{\partial H}{\partial y_k^{(\nu)}}\right)-R_k\right\}\delta y_k\\ &+\sum_1^n{}_k \left\{\frac{\partial H}{\partial z_k}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial z_k'}\right)+\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial H}{\partial z_k''}\right)-\cdots+(-1)^\nu\frac{d^\nu}{dt^\nu}\left(\frac{\partial H}{\partial z_k^{(\nu)}}\right)-S_k\right\}\delta z_k = 0, \end{aligned}\right.$$

worin H eine gegebene Function von t, den $3n$ Coordinaten und deren Ableitungen nach der Zeit bis zur νten Ordnung bedeutet und in Analogie mit der Mechanik das *kinetische Potential* genannt werden möge, Q_k, R_k, S_k gegebene Functionen der Zeit und der Coordinaten sind, und die Variationen δx_k, δy_k, δz_k jedes beliebige Werthesystem bedeuten sollen, welches mit den Bedingungsgleichungen (1.) verträglich ist. Da, wenn

$$(3.)\qquad H = -T-U$$

gesetzt wird, worin T die lebendige Kraft und U das Potential der inneren Kräfte im gewöhnlichen Sinne bedeutet, wenn ferner Q_k, R_k, S_k die Componenten der äusseren Kräfte darstellen, die Beziehung (2.) in

$$\sum_1^n{}_k \left\{\left(-\frac{\partial U}{\partial x_k}-Q_k+m_k\frac{d^2x_k}{dt^2}\right)\delta x_k+\left(-\frac{\partial U}{\partial y_k}-R_k+m_k\frac{d^2y_k}{dt^2}\right)\delta y_k \right.$$
$$\left. +\left(-\frac{\partial U}{\partial z_k}-S_k+m_k\frac{d^2z_k}{dt^2}\right)\delta z_k\right\} = 0$$

übergeht, so soll auch die allgemeinere Gleichung (2.) das *d'Alembert*sche Princip genannt werden.

*) „Bemerkungen zu dem Princip des kleinsten Zwanges", ds. Journ. Bd. 82, S. 327.

Aus (2.) und (1.) folgt nach dem Princip der Multiplicatoren für $k = 1, 2, \ldots, n$

$$(4.)\quad \begin{cases} \frac{\partial H}{\partial x_k} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial x'_k}\right) + \cdots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\left(\frac{\partial H}{\partial x_k^{(\nu)}}\right) - Q_k + \lambda_1 f_{1k} + \lambda_2 f_{2k} + \cdots + \lambda_m f_{mk} = 0, \\ \frac{\partial H}{\partial y_k} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial y'_k}\right) + \cdots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\left(\frac{\partial H}{\partial y_k^{(\nu)}}\right) - R_k + \lambda_1 \varphi_{1k} + \lambda_2 \varphi_{2k} + \cdots + \lambda_m \varphi_{mk} = 0, \\ \frac{\partial H}{\partial z_k} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial z'_k}\right) + \cdots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\left(\frac{\partial H}{\partial z_k^{(\nu)}}\right) - S_k + \lambda_1 \psi_{1k} + \lambda_2 \psi_{2k} + \cdots + \lambda_m \psi_{mk} = 0, \end{cases}$$

und *diese Gleichungen sollen analog den bekannten als erste Form der Lagrangeschen Gleichungen bezeichnet werden.*

III.

Die zweite Form der erweiterten *Lagrange*schen Gleichungen.

Seien nun, wenn $3n - m = \mu$ gesetzt wird, $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$ μ von einander unabhängige Variable, die wir auch Coordinaten nennen wollen, und durch welche in jedem Zeitmomente der Zustand des gegebenen Systemes vollständig definirt ist, so dass die sämmtlichen Coordinaten durch das Werthesystem von $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$ bestimmt sind, so müssen die Differentialgleichungen (II. 1.), welche nunmehr als integrabel angenommen werden, durch

$$\delta x_k = \frac{\partial x_k}{\partial p_1}\delta p_1 + \cdots + \frac{\partial x_k}{\partial p_\mu}\delta p_\mu, \quad \delta y_k = \frac{\partial y_k}{\partial p_1}\delta p_1 + \cdots + \frac{\partial y_k}{\partial p_\mu}\delta p_\mu,$$
$$\delta z_k = \frac{\partial z_k}{\partial p_1}\delta p_1 + \cdots + \frac{\partial z_k}{\partial p_\mu}\delta p_\mu$$

befriedigt werden und wegen der Unabhängigkeit der Variationen δp_1, $\delta p_2, \ldots, \delta p_\mu$ von einander die m Beziehungen liefern

$$\sum_1^n{}_k \left\{ f_{1k}\frac{\partial x_k}{\partial p_s} + \varphi_{1k}\frac{\partial y_k}{\partial p_s} + \psi_{1k}\frac{\partial z_k}{\partial p_s} \right\} = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\sum_1^n{}_k \left\{ f_{mk}\frac{\partial x_k}{\partial p_s} + \varphi_{mk}\frac{\partial y_k}{\partial p_s} + \psi_{mk}\frac{\partial z_k}{\partial p_s} \right\} = 0,$$

worin s die Werthe $1, 2, \ldots, \mu$ annimmt.

Multiplicirt man nun die Gleichungen (4.) mit $\frac{\partial x_k}{\partial p_s}, \frac{\partial y_k}{\partial p_s}, \frac{\partial z_k}{\partial p_s}$ und addirt dieselben, indem man k die Werthe $1, 2, \ldots, n$ annehmen lässt, so folgt aus dem oben bewiesenen Hülfsatze (I. 5.), wenn die R daselbst die Coordinaten vorstellen, und

$$-\sum_1^n{}_k \left\{ Q_k\frac{\partial x_k}{\partial p_s} + R_k\frac{\partial y_k}{\partial p_s} + S_k\frac{\partial z_k}{\partial p_s} \right\} = P_s$$

gesetzt wird, worin P_s eine Function von $t, p_1, p_2, \ldots, p_\mu$ bedeutet, für $s = 1, 2, \ldots, \mu$ die Beziehung

$$(1.)\quad \frac{\partial H}{\partial p_s} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial p'_s}\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial H}{\partial p''_s}\right) - \cdots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\right) + P_s = 0,$$

die wir als zweite Form der Lagrangeschen Gleichungen bezeichnen wollen, und welche für die Substitution (II. 3.) in

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial p'_s}\right) - \frac{\partial(T+U)}{\partial p_s} + P_s = 0$$

übergeht, worin P_s die Kraft bedeutet, mit welcher das bewegte Körpersystem auf eine Aenderung der Coordinate p_s hinwirkt, so dass $-P_s$ die aeussere Kraft ist, welche auf das System in der Richtung der Coordinate p_s einwirken muss, damit die vorausgesetzte Bewegung des Systemes in der angenommenen Weise vor sich gehen kann; es ist aus der oben gemachten Bemerkung, dass die Integrabilität der Differentialgleichungen (II. 1.) vorausgesetzt werden müsse, ersichtlich, dass die *Lagrange*schen Gleichungen in ihrer zweiten Form nur unter beschränkteren Voraussetzungen gelten als die erster Form*).

*) Freilich giebt es, wie *Hertz* in seinen „Principien der Mechanik" hervorhebt, ausser den Fällen, in welchen die Bedingungsgleichungen unbeschränkt integrabel sind, und in denen er das materielle System als *holonomes* bezeichnet, Fälle nicht integrabler Bedingungsgleichungen, also nicht holonome Systeme, wie z. B. in dem Falle, dass zwei Körper mit ihren Oberflächen, ohne zu gleiten, auf einander rollen, da dieselben nur einen Punkt der Oberfläche gemein haben, während doch die Bewegungsfreiheit noch um einen Grad weiter beschränkt ist, und sich somit mehr Gleichungen zwischen den Aenderungen der Coordinaten herleiten lassen als zwischen diesen selbst. Und dies ist der Grund, weshalb *Hertz,* der nicht wie *Kirchhoff* das *d'Alembert*sche Princip dem Aufbau der Mechanik zu Grunde legen wollte, weil die Herleitung desselben allgemeinere Voraussetzungen macht, als die Probleme der Natur sie erfordern, indem dieselben z. B. eine Verletzung des Princips der Energie nicht zulassen, auch nicht das *Hamilton*sche Princip, wie es *Helmholtz* gethan und worauf ich noch später zurückkomme, als das einzige und wahre Grundprincip der Mechanik anerkennen will, weil dieses auf holonome Systeme zu beschränken sei. Die Frage, ob das von *Hertz* aufgestellte Grundgesetz, welches für holonome und nicht holonome Systeme gleichmässig gilt, den Vorzug vor allen anderen verdient, lasse ich für den Augenblick unerörtert.

In Betreff des Falles der rollenden Bewegung zweier Körper auf einander verweise ich auf die inzwischen erschienene Arbeit von *Hölder* „Ueber die Principien von *Hamilton* und *Maupertuis*" (k. Gesellsch. d. Wissensch. zu Göttingen 1896 H. 2), welche die *Hertz*schen Untersuchungen in wesentlichen Punkten ergänzt, und deren Betrachtungsweise sich auch auf die folgenden Entwicklungen des erweiterten *Hamilton*schen Princips ausdehnen lässt.

IV.

Das erweiterte *Hamilton*sche Princip.

Legen wir nun die Variation des nachfolgenden Integrals zu Grunde

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(H+\sum_1^{\mu}{}_{\lambda}P_{\lambda}p_{\lambda}\right)dt,$$

wie es *Helmholtz* in seiner fundamentalen Arbeit „die physikalische Bedeutung des Princips der kleinsten Wirkung" gethan hat, und nehmen an, dass die Grössen P_{λ} als Functionen der Zeit, aber unabhängig von den Coordinaten während der beliebig, aber bestimmt festgesetzten Periode von t_0 bis t_1 gegeben seien, dass ferner H für alle in Betracht kommenden Werthe der Coordinaten und deren Ableitungen während dieser Zeitperiode selbst sowohl wie seine sämmtlichen nach eben diesen Grössen genommenen partiellen Differentialquotienten bis zur $(\nu+1)$-ten Ordnung hin endlich sind, so wird

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\left(H+\sum_1^{\mu}{}_{\lambda}P_{\lambda}p_{\lambda}\right)dt=\int_{t_0}^{t_1}\sum_1^{\mu}{}_{s}\left\{\left(\frac{\partial H}{\partial p_s}+P_s\right)\delta p_s+\frac{\partial H}{\partial p_s'}\delta p_s'+\cdots+\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\delta p_s^{(\nu)}\right\}dt,$$

oder da unter der gemachten Annahme

$$\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial H}{\partial p_s'}\frac{d\delta p_s}{dt}dt=\left[\frac{\partial H}{\partial p_s'}\delta p_s\right]_{t_0}^{t_1}-\int_{t_0}^{t_1}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s'}\right)\delta p_s dt$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial H}{\partial p_s''}\frac{d^2\delta p_s}{dt^2}dt=\left[\frac{\partial H}{\partial p_s''}\delta p_s'\right]_{t_0}^{t_1}-\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s''}\right)\delta p_s\right]_{t_0}^{t_1}+\int_{t_0}^{t_1}\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s''}\right)\delta p_s dt$$

. . . .

$$\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\frac{d^{\nu}\delta p_s}{dt^{\nu}}dt=\left[\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\delta p_s^{(\nu-1)}\right]_{t_0}^{t_1}-\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\right)\delta p_s^{(\nu-2)}\right]_{t_0}^{t_1}+\cdots$$
$$+(-1)^{\nu-1}\left[\frac{d^{\nu-1}}{dt^{\nu-1}}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\right)\delta p_s\right]_{t_0}^{t_1}+(-1)^{\nu}\int_{t_0}^{t_1}\frac{d^{\nu}}{dt^{\nu}}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\right)\delta p_s dt$$

ist, wenn die Variation der Bedingung unterworfen wird, dass

$$\delta p_s,\quad \delta p_s',\quad \delta p_s'',\quad \ldots,\quad \delta p_s^{(\nu-1)}$$

für $t=t_0$ und $t=t_1$ verschwinden sollen,

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\left(H+\sum_1^{\mu}{}_{\lambda}P_{\lambda}p_{\lambda}\right)dt=\int_{t_0}^{t_1}\sum_1^{\mu}{}_{s}\left\{\frac{\partial H}{\partial p_s}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s'}\right)+\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s''}\right)-\cdots\right.$$
$$\left.+(-1)^{\nu}\frac{d^{\nu}}{dt^{\nu}}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\right)+P_s\right\}\delta p_s dt.$$

Da nun die Variationen δp_s von einander unabhängig sind, so folgt, dass

die Beziehung

$$(1.)\qquad \delta\int_{t_0}^{t_1}\Big(H+\sum_1^{\mu}{}_\lambda P_\lambda p_\lambda\Big)dt = 0$$

die Gleichung (III. 1.) nach sich zieht und umgekehrt, und ***dass somit das durch die Gleichung* (1.) *dargestellte Hamiltonsche Princip in dieser erweiterten Gestalt der zweiten Form der erweiterten Lagrangeschen Gleichungen völlig äquivalent ist.***

Der Fall des *Weber*schen Gesetzes, in dem H nur von den ersten Differentialquotienten der Coordinaten abhängt, ist also ein ganz specieller Fall dieses allgemeinen Satzes; für

$$W = \frac{mm_1}{r}\Big[1+\frac{r'^2}{c^2}\Big]$$

stellt *C. Neumann* die Bewegungsgleichungen durch das *Hamilton*sche Princip

$$\delta\int_a^\beta (T-W)dt = 0$$

dar.

Folgt man der von *Helmholtz* für Functionen H, die nur von den Coordinaten und deren ersten Ableitungen abhängen, gegebenen Andeutung*), so kann man auch das verallgemeinerte *Hamilton*sche Princip in eine andere, im speciellen Falle für physikalische Untersuchungen wichtige Form bringen. Ersetzt man in der Function H die Grössen $p_s^{(k)}$ durch p_{sk} und fasst somit H als eine Function von

$$t,\ p_1,\ p_2,\ \dots,\ p_\mu,\quad p_{11},\ p_{21},\ \dots,\ p_{\mu 1},\quad \dots,\quad p_{1\nu},\ p_{2\nu},\ \dots,\ p_{\mu\nu}$$

auf, so wird die Variation

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\Big\{H+\sum_1^{\mu}{}_\lambda\Big[P_\lambda p_\lambda-(p_{\lambda 1}-p'_\lambda)\frac{\partial H}{\partial p_{\lambda 1}}-(p_{\lambda 2}-p''_\lambda)\frac{\partial H}{\partial p_{\lambda 2}}-\cdots-(p_{\lambda\nu}-p_\lambda^{(\nu)})\frac{\partial H}{\partial p_{\lambda\nu}}\Big]\Big\}dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1}\sum_1^{\mu}{}_s\Big\{\Big[\frac{\partial H}{\partial p_s}+P_s-\sum_1^{\mu}{}_\lambda(p_{\lambda 1}-p'_\lambda)\frac{\partial^2 H}{\partial p_{\lambda 1}\partial p_s}-\sum_1^{\mu}{}_\lambda(p_{\lambda 2}-p''_\lambda)\frac{\partial^2 H}{\partial p_{\lambda 2}\partial p_s}-\cdots$$

$$-\sum_1^{\mu}{}_\lambda(p_{\lambda\nu}-p_\lambda^{(\nu)})\frac{\partial^2 H}{\partial p_{\lambda\nu}\partial p_s}\Big]\delta p_s$$

$$+\frac{\partial H}{\partial p_{s1}}\delta p'_s+\frac{\partial H}{\partial p_{s2}}\delta p''_s+\cdots+\frac{\partial H}{\partial p_{s\nu}}\delta p_s^{(\nu)}$$

$$-\Big[\sum_1^{\mu}{}_\lambda\Big\{(p_{\lambda 1}-p'_\lambda)\frac{\partial^2 H}{\partial p_{\lambda 1}\partial p_{s1}}+(p_{\lambda 2}-p''_\lambda)\frac{\partial^2 H}{\partial p_{\lambda 2}\partial p_{s1}}+\cdots+(p_{\lambda\nu}-p_\lambda^{(\nu)})\frac{\partial^2 H}{\partial p_{\lambda\nu}\partial p_{s1}}\Big\}\Big]\delta p_{s1}$$

$$-\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$-\Big[\sum_1^{\mu}{}_\lambda\Big\{(p_{\lambda 1}-p'_\lambda)\frac{\partial^2 H}{\partial p_{\lambda 1}\partial p_{s\nu}}+(p_{\lambda 2}-p''_\lambda)\frac{\partial^2 H}{\partial p_{\lambda 2}\partial p_{s\nu}}+\cdots+(p_{\lambda\nu}-p_\lambda^{(\nu)})\frac{\partial^2 H}{\partial p_{\lambda\nu}\partial p_{s\nu}}\Big\}\Big]\delta p_{s\nu}\Big\}dt,$$

*) „Ueber die physikalische Bedeutung etc.“ S. 219.

und unter der Festsetzung, dass nur die Variationen

$$\delta p_s, \quad \delta p'_s, \quad \ldots, \quad \delta p_s^{(\nu-1)}$$

für $t = t_0$ und $t = t_1$ verschwinden sollen, die Aequivalenz der Gleichung

$$(2.)\qquad \delta \int_{t_0}^{t_1} \Big\{ H + \sum_1^{\mu}{}_{\lambda} \Big[P_\lambda p_\lambda - (p_{\lambda 1} - p'_\lambda) \frac{\partial H}{\partial p_{\lambda 1}} - (p_{\lambda 2} - p''_\lambda) \frac{\partial H}{\partial p_{\lambda 2}} - \cdots - (p_{\lambda\nu} - p_\lambda^{(\nu)}) \frac{\partial H}{\partial p_{\lambda\nu}} \Big] dt = 0$$

mit den Beziehungen

$$(3.)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial p_s} - \dfrac{d}{dt}\Big(\dfrac{\partial H}{\partial p_{s1}}\Big) + \cdots + (-1)^\nu \dfrac{d^\nu}{dt^\nu}\Big(\dfrac{\partial H}{\partial p_{s\nu}}\Big) + P_s \\ \qquad - \sum_1^{\mu}{}_{\lambda} (p_{\lambda 1} - p'_\lambda) \dfrac{\partial^2 H}{\partial p_{\lambda 1} \partial p_s} - \cdots - \sum_1^{\mu}{}_{\lambda} (p_{\lambda\nu} - p_\lambda^{(\nu)}) \dfrac{\partial^2 H}{\partial p_{\lambda\nu} \partial p_s} = 0, \end{cases}$$

$$(4.)\qquad \begin{cases} \sum_1^{\mu}{}_{\lambda} \Big\{ (p_{\lambda 1} - p'_\lambda) \dfrac{\partial^2 H}{\partial p_{\lambda 1} \partial p_{s1}} + (p_{\lambda 2} - p''_\lambda) \dfrac{\partial^2 H}{\partial p_{\lambda 2} \partial p_{s1}} + \cdots + (p_{\lambda\nu} - p_\lambda^{(\nu)}) \dfrac{\partial^2 H}{\partial p_{\lambda\nu} \partial p_{s1}} \Big\} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum_1^{\mu}{}_{\lambda} \Big\{ (p_{\lambda 1} - p'_\lambda) \dfrac{\partial^2 H}{\partial p_{\lambda 1} \partial p_{s\nu}} + (p_{\lambda 2} - p''_\lambda) \dfrac{\partial^2 H}{\partial p_{\lambda 2} \partial p_{s\nu}} + \cdots + (p_{\lambda\nu} - p_\lambda^{(\nu)}) \dfrac{\partial^2 H}{\partial p_{\lambda\nu} \partial p_{s\nu}} \Big\} = 0 \end{cases}$$

für $s = 1, 2, \ldots, \mu$. Ist nun die Determinante der zweiten Differentialquotienten

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p_{\alpha\beta} \partial p_{\gamma\delta}},$$

worin α und γ die Werthe $1, 2, \ldots, \mu$, β und δ die Werthe $1, 2, \ldots, \nu$ annehmen, nicht identisch Null*), so wird sich aus den Gleichungen (4.)

$$p_{\lambda r} = p_\lambda^{(r)}$$

ergeben für alle Werthe von λ und r aus der Reihe der Zahlen $1, 2, \ldots, \mu$ bez. $1, 2, \ldots, \nu$, und somit die Gleichung (3.) wieder in die *Lagrange*sche Gleichung (III. 1.) übergehen, also *unter den angegebenen Bedingungen auch das verallgemeinerte Hamiltonsche Princip* (2.) *in der erweiterten Form den Lagrangeschen Gleichungen äquivalent sein.*

---

*) in welchem Falle also eine in $p_1, \ldots, p_\mu$ und den ersten Differentialquotienten von H nach den Ableitungen der Coordinaten bis zur νten Ordnung hin identische Relation, in der $p'_1, \ldots, p'_\mu, \ldots, p_1^{(\nu)}, \ldots, p_\mu^{(\nu)}$ nicht explicite vorkommen, ausgeschlossen ist, weil die Differentiation einer solchen Relation

$$F\Big(p_1, p_2, \ldots, p_\mu, \frac{\partial H}{\partial p'_1}, \frac{\partial H}{\partial p'_2}, \ldots, \frac{\partial H}{\partial p'_\mu}, \ldots, \frac{\partial H}{\partial p_1^{(\nu)}}, \frac{\partial H}{\partial p_2^{(\nu)}}, \ldots, \frac{\partial H}{\partial p_\mu^{(\nu)}}\Big) = 0$$

nach $p'_1, p'_2, \ldots, p'_\mu, \ldots, p_1^{(\nu)}, p_2^{(\nu)}, \ldots, p_\mu^{(\nu)}$ das Verschwinden der zweiten Differentialquotienten von H, nach eben diesen Grössen genommen, nach sich ziehen würde.

Die Bedingung, dass die Determinante der zweiten Differentialquotienten nicht identisch Null sei, wäre z. B. erfüllt, wenn

$$H = W + H_1,$$

worin W von den Coordinaten $p_1', \dots, p_\mu', \dots, p_1'', \dots, p_\mu'', \dots, p_1^{(\nu)}, \dots, p_\mu^{(\nu)}$ linear abhinge, und H_1 eine positive oder negative Form zweiten Grades eben dieser Ableitungen ist; denn wäre die Determinante der zweiten Ableitungen von H, also auch von H_1 nach den Grössen $p_{\varrho\sigma}$ identisch Null, so würden sich endliche Werthe dieser Grössen bestimmen lassen, welche die ersten Ableitungen von H_1 nach eben diesen Grössen, also auch H_1 selbst zu Null machten, ohne selbst zu verschwinden, was der Annahme widerspricht. Dies würde, wie bekannt, der Fall sein, wenn $H = -T - U$ ist, indem T als lebendige Kraft für den Fall, dass in die Bedingungsgleichungen des Problems die Zeit t nicht explicite eintritt, eine positive Form zweiten Grades der $p_1', \dots, p_\mu'$ ist.

V.

Das erweiterte Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft.

Gehen wir wiederum von der Gleichung

$$\frac{\partial H}{\partial p_s} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s'}\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s''}\right) - \dots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\right) + P_s = 0$$

aus, nehmen aber an, dass H die Zeit t nicht explicite enthält, was z. B. in dem speciellen Falle (II. 3.) verlangen würde, dass die Bedingungsgleichungen und die Kräftefunction von der Zeit t unabhängig sind, und in dem Falle des *Weber*schen Gesetzes von selbst erfüllt ist, da die lebendige Kraft und die Potentialfunction von t frei sind, so wird, wenn (III. 1.) mit p_s' multiplicirt und über s von 1 bis μ summirt wird, sich die Beziehung ergeben

$$(1.)\quad \begin{cases} \sum_1^\mu {}_s p_s' \frac{\partial H}{\partial p_s} - \sum_1^\mu {}_s p_s' \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s'}\right) + \sum_1^\mu {}_s p_s' \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s''}\right) \\ \qquad - \dots + (-1)^\nu \sum_1^\mu {}_s p_s' \frac{d^\nu}{dt^\nu}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\right) + \sum_1^\mu {}_s P_s p_s' = 0. \end{cases}$$

Da aber in Folge der Annahme, dass t in H nicht explicite vorkommt,

$$(2.)\qquad \frac{dH}{dt} = \sum_1^\mu {}_s p_s' \frac{\partial H}{\partial p_s} + \sum_1^\mu {}_s p_s'' \frac{\partial H}{\partial p_s'} + \dots + \sum_1^\mu {}_s p_s^{(\nu+1)} \frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}$$

ist, so folgt durch Substitution des Ausdruckes für $\sum_1^\mu {}_s p'_s \frac{\partial H}{\partial p_s}$ aus (1.) in (2.)

$$\frac{dH}{dt} - \sum_1^\mu {}_s \left\{ p'_s \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial p'_s}\right) + p''_s \frac{\partial H}{\partial p'_s} \right\} + \sum_1^\mu {}_s \left\{ p'_s \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial H}{\partial p''_s}\right) - p'''_s \frac{\partial H}{\partial p''_s} \right\} - \sum_1^\mu {}_s \left\{ p'_s \frac{d^3}{dt^3}\left(\frac{\partial H}{\partial p'''_s}\right) \right.$$
$$\left. + p''''_s \frac{\partial H}{\partial p'''_s} \right\} + \cdots + (-1)^\nu \sum_1^\mu {}_s \left\{ p'_s \frac{d^\nu}{dt^\nu}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\right) - (-1)^\nu p_s^{(\nu+1)} \frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}} \right\} + \sum_1^\mu {}_s P_s p'_s = 0$$

oder

$$\frac{dH}{dt} - \frac{d}{dt} \sum_1^\mu {}_s p'_s \frac{\partial H}{\partial p'_s} + \frac{d}{dt} \sum_1^\mu {}_s \left\{ p'_s \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial p''_s}\right) - p''_s \frac{\partial H}{\partial p''_s} \right\}$$
$$- \frac{d}{dt} \sum_1^\mu {}_s \left\{ p'_s \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial H}{\partial p'''_s}\right) - p''_s \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial p'''_s}\right) + p'''_s \frac{\partial H}{\partial p'''_s} \right\}$$
$$+ \cdots + (-1)^\nu \frac{d}{dt} \sum_1^\mu {}_s \left\{ p'_s \frac{d^{\nu-1}}{dt^{\nu-1}}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\right) - p''_s \frac{d^{\nu-2}}{dt^{\nu-2}}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\right) + \cdots - (-1)^\nu p_s^{(\nu)} \frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}} \right\}$$
$$+ \sum_1^\mu {}_s P_s p'_s = 0,$$

und endlich durch Integration nach t

$$H - \sum_1^\mu {}_s p'_s \frac{\partial H}{\partial p'_s} + \sum_1^\mu {}_s \left\{ p'_s \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial p''_s}\right) - p''_s \frac{\partial H}{\partial p''_s} \right\}$$
$$- \sum_1^\mu {}_s \left\{ p'_s \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial H}{\partial p'''_s}\right) - p''_s \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial p'''_s}\right) + p'''_s \frac{\partial H}{\partial p'''_s} \right\}$$
$$+ \cdots + (-1)^\nu \sum_1^\mu {}_s \left\{ p'_s \frac{d^{\nu-1}}{dt^{\nu-1}}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\right) - p''_s \frac{d^{\nu-2}}{dt^{\nu-2}}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\right) + \cdots - (-1)^\nu p_s^{(\nu)} \frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}} \right\}$$
$$+ \sum_1^\mu {}_s \int P_s p'_s \, dt = h,$$

worin h eine Constante bedeutet, oder

$$(3.) \quad \left\{ \begin{aligned} & H - \sum_1^\mu {}_s p'_s \left\{ \frac{\partial H}{\partial p'_s} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial p''_s}\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial H}{\partial p'''_s}\right) - \cdots + (-1)^{\nu-1} \frac{d^{\nu-1}}{dt^{\nu-1}}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\right) \right\} \\ & - \sum_1^\mu {}_s p''_s \left\{ \frac{\partial H}{\partial p''_s} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial p'''_s}\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial H}{\partial p''''_s}\right) - \cdots + (-1)^{\nu-2} \frac{d^{\nu-2}}{dt^{\nu-2}}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\right) \right\} \\ & - \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & - \sum_1^\mu {}_s p_s^{(\nu)} \frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}} + \sum_1^\mu {}_s \int P_s p'_s \, dt = h, \end{aligned} \right.$$

worin das erweiterte Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft ausgesprochen ist.

Setzt man

$$(4.)\quad \begin{cases} H-\sum_1^\mu{}_s p'_s\left\{\frac{\partial H}{\partial p'_s}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial p''_s}\right)+\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial H}{\partial p'''_s}\right)-\cdots+(-1)^{\nu-1}\frac{d^{\nu-1}}{dt^{\nu-1}}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\right)\right\} \\ -\sum_1^\mu{}_s p''_s\left\{\frac{\partial H}{\partial p''_s}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial p'''_s}\right)+\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial H}{\partial p''''_s}\right)-\cdots+(-1)^{\nu-2}\frac{d^{\nu-2}}{dt^{\nu-2}}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\right)\right\} \\ -\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ -\sum_1^\mu{}_s p_s^{(\nu)}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}} = E, \end{cases}$$

worin E der Energievorrath des Systemes ausgedrückt durch seine Coordinaten, seine Geschwindigkeiten und die nach der Zeit genommenen Ableitungen bis zur $(2\nu-1)$-ten Ordnung hin genannt werden soll, so folgt aus (3.):

$$(5.)\qquad \frac{dE}{dt}dt+\sum_1^\mu{}_s P_s p'_s dt = 0^{*}),$$

dass somit, wie es *Helmholtz* für den Fall des kinetischen Potentials in der gewöhnlichen Form ausgesprochen, ***auch in diesem allgemeinsten Falle der Energievorrath des Systemes fortwährend in dem Maasse abnimmt oder wächst, als die Kräfte P_s positive oder negative Arbeit leisten,*** indem $\sum_1^\mu{}_s P_s dp_s$ die von diesen Kräften nach aussen hin abgegebene Arbeit bedeutet.

Hängt H nur von den Coordinaten und deren ersten Ableitungen ab, so geht die Gleichung (3.) in

$$H-\sum_1^\mu{}_s p'_s\frac{\partial H}{\partial p'_s}+\sum_1^\mu{}_s\int P_s p'_s dt = h$$

über, und ist H eine ganze Function $m$ten Grades der p'_s und lautet nach homogenen Functionen derselben, deren Grad durch den Index angegeben wird, geordnet

$$H = H_0+H_1+H_2+\cdots+H_m,$$

so erhält man

$$H_0-H_2-2H_3-3H_4-\cdots-(m-1)H_m+\sum_1^\mu{}_s\int P_s p'_s dt = h,$$

---

*) Fasst man das kinetische Potential H als eine Function der Coordinaten und deren Ableitungen auf, welche auch die Zeit t explicite enthalten darf, so dass man die äusseren Kräfte nicht abzusondern braucht, so ist, wie man leicht aus den obigen Gleichungen sieht, die Beziehung (5.) durch

$$\frac{dE}{dt}-\frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

zu ersetzen.

und es wird das Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft für den Fall, dass alle äusseren Kräfte P_s Null sind, die Form annehmen:

$$H_0 - H_2 - 2H_3 - 3H_4 - \cdots - (m-1)H_m = h.$$

Für den Fall, dass H nur eine Function zweiten Grades der ersten Differentialquotienten ist und gleich $-T+W$ gesetzt wird, geht diese Gleichung in

$$T + W_0 - W_2 = h$$

über, worin W_0 als der statische, W_2 als der dynamische Theil des effectiven Potentials W von *C. Neumann* bezeichnet wird*); es ist dies das Princip der lebendigen Kraft für das *Weber*sche Gesetz.

Unter der Annahme, dass H die Zeit nicht explicite enthält, war also aus den allgemeinen *Lagrange*schen Bewegungsgleichungen das Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft in der verallgemeinerten Form hergeleitet worden, letzteres ist also die nothwendige Folge der *Lagrange*schen Gleichungen.

Es mag mir gestattet sein, an dieser Stelle den wesentlichen Unterschied hervorzuheben, der zwischen der von *C. Neumann* vertretenen Ansicht und den von *Helmholtz* zu Grunde gelegten und durchgeführten Anschauungen über das *Hamilton*sche Princip besteht. *Neumann* bezeichnet das *Hamilton*sche Princip in der Form

$$\delta \int (T - W)\, dt = 0,$$

worin T die lebendige Kraft bedeutet, als die *suprema lex*, sucht den darin enthaltenen Ausdruck W so einzurichten, „wie er den jedes Mal zu erklärenden Erscheinungen entspricht", und entwickelt für den Fall, dass W auch die ersten Ableitungen der Coordinaten enthält, wie im *Weber*schen Gesetz, das Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft; es wurde oben gezeigt, dass diese Sätze rein mathematischen Inhaltes und ganz allgemeiner Natur ohne jede Beschränkung für die Function W gelten, bis zu welcher Ordnung hin dieselbe auch die Ableitungen der Coordinaten enthalten mag. *Helmholtz* dagegen geht von einem völlig anderen Gedanken aus, den auch *Hertz* in seinem ganzen Umfange aufgenommen hat; er legt das *Hamilton*sche Princip in der Form zu Grunde

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} dt \left\{ H + \sum_1^{\mu} {}_\lambda P_\lambda p_\lambda \right\} = 0,$$

*) „Allgemeine Untersuchungen über das *Newton*sche Princip etc." S. 235.

worin für ein System wägbarer Massen und fester Verbindungen $H = -T - U$ ist, wenn T die lebendige Kraft, U die Kräftefunction der inneren Kräfte im gewöhnlichen Sinne als Function der Coordinaten und P_λ die äusseren als Functionen der Zeit gegebenen Kräfte bedeuten, und zeigt zunächst dessen Identität mit den *Lagrange*schen Bewegungsgleichungen; sodann wirft er die Frage auf, wie kann sich die Function H unter dem Integral des *Hamilton*schen Princips umgestalten, wenn z. B. gewisse Bedingungen, die für die äusseren Kräfte des Problems stattfinden, einige Coordinaten so zu eliminiren gestatten, dass die Form des Princips sowie seine Gültigkeit, die *Lagrange*schen Bewegungsgleichungen darzustellen, nicht verloren geht, die Function H dadurch aber eine andere Gestalt gewinnt und zwar eine solche, wie sie sich in gewissen physikalischen Problemen darbietet, so dass für diese geschlossen werden kann — und das ist der Kernpunkt aller seiner und der *Hertz*schen Untersuchungen — dass sie Probleme gewöhnlicher mechanischer Natur sind, also z. B. Probleme wägbarer Massen mit festen Verbindungen, nur dass man nicht alle Massen sieht und alle Bewegungen erkennt, dass also verborgene Massen und verborgene Bewegungen mitspielen. Dadurch wird es ihm, wie wir nachher freilich in weit allgemeinerer Weise zeigen werden, möglich, Wechselbeziehungen zwischen jeder Art von Kräften abzuleiten, welche die gewöhnliche Mechanik nicht liefert, die uns aber die Physik in Wirklichkeit bietet.

Und gerade diese Grundanschauungen von *Helmholtz* eignet sich *Hertz* ganz und gar an, wenn er sagt „wir nehmen an, dass es möglich sei, den sichtbaren Massen des Weltalls andere denselben Gesetzen gehorchende Massen hinzuzudichten von solcher Art, dass dadurch das Ganze Gesetzmässigkeit und Verständlichkeit gewinnt, und zwar nehmen wir an, dass dies ganz allgemein und in allen Fällen möglich sei, und dass es daher andere Ursachen der Erscheinungen gar nicht gebe, als die hierdurch zugelassenen".

Helmholtz hat nun das *Hamilton*sche Princip mit dem Princip der kleinsten Wirkung identificirt, aber die Berechtigung hierzu bedarf einer genaueren Untersuchung, die jedoch erst später angestellt werden soll, nachdem wir noch ein anderes Princip der Mechanik für den Fall, dass die Function H die Ableitungen der Coordinaten bis zur νten Ordnung hin enthalte, erörtert und von jeder mechanischen Bedeutung abgesehen als ein rein mathematisches Theorem behandelt haben werden. Zunächst sei aber

noch eine Bemerkung hinzugefügt, welche die Beziehung zwischen dem Energievorrathe eines Systemes und dem kinetischen Potential in der oben gegebenen erweiterten Form betrifft.

Während, wie aus der Gleichung (4.) ersichtlich ist, der Energievorrath des Systemes eindeutig bestimmt ist, wenn das in der erweiterten Bedeutung genommene kinetische Potential H als Function von $p_1, \ldots, p_\mu$, $p_1', \ldots, p_\mu', \ldots, p_1^{(\nu)}, \ldots, p_\mu^{(\nu)}$ gegeben ist, wird umgekehrt, wenn E als Function der Coordinaten und der $2\nu-1$ ersten Ableitungen derselben nach der Zeit genommen gegeben ist, das kinetische Potential die Lösung einer partiellen Differentialgleichung sein, die wir näher untersuchen wollen. Zunächst ist aus der Form der Gleichung (4.) ersichtlich, dass der Energievorrath des Systemes — in der erweiterten Bedeutung genommen — nicht als eine beliebige Function der bezeichneten Grössen gegeben werden kann, sondern wenn $\nu \geqq 2$ ist, eine lineare Function der Grössen

$$p_1^{(2\nu-1)}, \quad p_2^{(2\nu-1)}, \quad \ldots, \quad p_\mu^{(2\nu-1)}$$

sein muss*), also die Form haben wird

$$E = E_1 + e_1 p_1^{(2\nu-1)} + e_2 p_2^{(2\nu-1)} + \cdots + e_\mu p_\mu^{(2\nu-1)},$$

worin $e_1, e_2, \ldots, e_\mu$ gegebene Functionen der Grössen

$$p_1, \quad \ldots, \quad p_\mu, \quad p_1', \quad \ldots, \quad p_\mu', \quad \ldots, \quad p_1^{(\nu)}, \quad \ldots, \quad p_\mu^{(\nu)},$$

und E_1 eine gegebene Function der $p_1, \ldots, p_\mu$ und deren Ableitungen bis zur $(2\nu-2)$-ten Ordnung hin ist; dann ergeben sich aber aus (4.) zunächst für H die $\mu+1$ partiellen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}
p_1' \frac{\partial^2 H}{\partial p_1^{(\nu)} \partial p_1^{(\nu)}} + p_2' \frac{\partial^2 H}{\partial p_2^{(\nu)} \partial p_1^{(\nu)}} + \cdots + p_\mu' \frac{\partial^2 H}{\partial p_\mu^{(\nu)} \partial p_1^{(\nu)}} &= (-1)^\nu e_1 \\
p_1' \frac{\partial^2 H}{\partial p_1^{(\nu)} \partial p_2^{(\nu)}} + p_2' \frac{\partial^2 H}{\partial p_2^{(\nu)} \partial p_2^{(\nu)}} + \cdots + p_\mu' \frac{\partial^2 H}{\partial p_\mu^{(\nu)} \partial p_2^{(\nu)}} &= (-1)^\nu e_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
p_1' \frac{\partial^2 H}{\partial p_1^{(\nu)} \partial p_\mu^{(\nu)}} + p_2' \frac{\partial^2 H}{\partial p_2^{(\nu)} \partial p_\mu^{(\nu)}} + \cdots + p_\mu' \frac{\partial^2 H}{\partial p_\mu^{(\nu)} \partial p_\mu^{(\nu)}} &= (-1)^\nu e_\mu,
\end{aligned}$$

---

*) Es lässt sich leicht die Form, welche E haben muss, auch in Beziehung auf die $(2\nu-2)$-ten, $(2\nu-3)$-ten, ..., bis $(\nu+1)$-ten Ableitungen der Coordinaten feststellen, wonach die folgenden Gleichungen wieder in einfachere partielle Differentialgleichungen zerfallen würden, doch soll an dieser Stelle nicht weiter darauf eingegangen werden, und ebensowenig soll hier die Frage nach den zur Existenz eines kinetischen Potentials nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Form des Energievorrathes erörtert werden, wenn derselbe als Function der Coordinaten und deren Ableitungen gegeben wird — eine ähnliche Frage wird später für die äusseren Kräfte des Systemes behandelt.

in denen vermöge der Integrabilitätsbedingungen die Grössen $e_1, e_2, \dots, e_\mu$ den Bedingungen unterworfen sind

$$\frac{\partial e_\varkappa}{\partial p_\lambda^{(\nu)}} = \frac{\partial e_\lambda}{\partial p_\varkappa^{(\nu)}}, \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \dots, \mu)$$

und

$$H - \sum_1^\mu {}_s p_s' \left\{ \frac{\partial H}{\partial p_s'} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s''}\right) + \cdots + (-1)^{\nu-1} \frac{d^{\nu-1}}{dt^{\nu-1}}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\right) \right.$$
$$\left. + (-1)^\nu \sum_1^\mu {}_\sigma \frac{\partial^2 H}{\partial p_s^{(\nu)} \partial p_\sigma^{(\nu)}} p_\sigma^{(2\nu-1)} \right\}$$
$$- \sum_1^\mu {}_s p_s'' \left\{ \frac{\partial H}{\partial p_s''} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s'''}\right) + \cdots + (-1)^{\nu-2} \frac{d^{\nu-2}}{dt^{\nu-2}}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\right) \right\}$$
$$- \dots\dots\dots\dots$$
$$- \sum_1^\mu {}_s p_s^{(\nu)} \frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}} = E_1,$$

in welch letzterer Gleichung die Grössen $p_1^{(2\nu-1)}, p_2^{(2\nu-1)}, \dots, p_\mu^{(2\nu-1)}$ nicht mehr vorkommen. Man sieht leicht, dass das erste Gleichungssystem mit Benutzung der Beziehungen zwischen den Coefficienten des gegebenen Energievorrathes unmittelbar integrirbar ist, wenn man

$$\frac{\partial H}{\partial p_1^{(\nu)}}, \quad \frac{\partial H}{\partial p_2^{(\nu)}}, \quad \dots, \quad \frac{\partial H}{\partial p_\mu^{(\nu)}}$$

in je einer als abhängige Variable auffasst, indem sie lineare partielle Differentialgleichungen vorstellen mit von den unabhängigen Variabeln freien Coefficienten, und es müssten sodann noch die bei der Integration eintretenden willkürlichen Functionen durch die Integrabilitätsbedingungen und die letzte Gleichung oben weiter bestimmt werden.

Ist H nur von den Coordinaten und deren ersten Ableitungen abhängig — wie dies bei dem gewöhnlichen und dem erweiterten für das *Weber*sche Gesetz gültigen Potential der Fall ist —, so geht die Differentialgleichung (4.) in

$$(6.) \qquad p_1' \frac{\partial H}{\partial p_1'} + p_2' \frac{\partial H}{\partial p_2'} + \cdots + p_\mu' \frac{\partial H}{\partial p_\mu'} = H - E$$

über, worin E eine willkürlich vorgelegte Function von $p_1, \dots, p_\mu, p_1', \dots, p_\mu'$ sein darf, die nur im Verlaufe der Bewegung stets endlich ist, und für die, wie aus der nach p_σ' differentiirten Gleichung (6.)

$$\frac{\partial E}{\partial p_\sigma'} = -p_1' \frac{\partial^2 H}{\partial p_1' \partial p_\sigma'} - p_2' \frac{\partial^2 H}{\partial p_2' \partial p_\sigma'} - \cdots - p_\mu' \frac{\partial^2 H}{\partial p_\mu' \partial p_\sigma'}$$

welche das Bewegungsproblem definiren, in welchem die Beschleunigung der Coordinate p den constanten Werth g hat, in der Form enthalten sein

$$H = \int dp' \int \varphi\left(\frac{p'^2}{2} - gp\right) dp' + p'\omega(p) + \Omega(p),$$

worin φ und ω beliebige Functionen, Ω eine durch die *Lagrange*sche Gleichung bestimmte, von φ abhängige Function von p bedeutet, also z. B.

$$H = \frac{p'^2}{2} + gp + p'\omega(p) + c,$$

und ebenso werden die kinetischen Potentiale, welche ein Bewegungsproblem liefern, in welchem die Beschleunigung der Coordinate p dem umgekehrten Quadrate dieser Coordinate proportional ist, durch den Ausdruck gegeben sein

$$H = \int dp' \int \varphi\left(\frac{1}{p} + \frac{p'^2}{2a}\right) dp' + p'\omega(p) + \Omega(p),$$

also z. B. durch

$$H = \frac{p'^2}{2p} + \frac{p'^4}{24a} - \frac{1}{2}\frac{a}{p^3} + p'\omega(p) + c.$$

Um nun die Werthe des Energievorrathes als Function der Coordinaten und deren Ableitungen zu finden, welche den zu demselben Bewegungsproblem gehörigen kinetischen Potentialen entsprechen, mag zunächst wieder H nur von p und p' abhängig betrachtet werden, so dass der Energievorrath E durch die Gleichung definirt wird

$$H - p'\frac{\partial H}{\partial p'} = E,$$

dann folgt unmittelbar, weil alle kinetischen Potentiale, welche auf dieselbe Differentialgleichung

$$p'' = f(p, p')$$

führen, durch die partielle Differentialgleichung bestimmt sind

$$\frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial p'} p' - \frac{\partial^2 H}{\partial p'^2} f = 0,$$

dass

$$p'\frac{\partial E}{\partial p} + f\frac{\partial E}{\partial p'} = 0$$

ist, und ebenso einfach ergiebt sich für den allgemeinen Fall, dass die Ausdrücke für den Energievorrath für alle von $p, p', p'', \ldots, p^{(\nu)}$ abhän-

gigen Werthe des kinetischen Potentials H, welche auf dasselbe Bewegungsproblem

$$p^{(2\nu)} = f(p, p', p'', \ldots, p^{(2\nu-1)})$$

führen, Integrale der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung sind

$$(9.)\quad \cdots p'\frac{\partial E}{\partial p} + p''\frac{\partial E}{\partial p'} + p'''\frac{\partial E}{\partial p''} + \cdots + p^{(2\nu-1)}\frac{\partial E}{\partial p^{(2\nu-2)}} + f\frac{\partial E}{\partial p^{(2\nu-1)}} = 0.$$

Es ist unnöthig, die analogen Differentialgleichungen für die zu demselben Problem gehörigen Werthe des kinetischen Potentials und Energievorrathes für den Fall mehrerer unabhängiger Variabeln aufzustellen.

VI.

Das erweiterte *Gauss*sche Princip vom kleinsten Zwange.

Gehen wir wiederum von den Gleichungen

$$\frac{\partial H}{\partial p_s} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial p'_s}\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial H}{\partial p''_s}\right) - \cdots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\right) + P_s = 0$$

aus, worin

$$P_s = -\sum_1^n{}_k \left\{Q_k \frac{\partial x_k}{\partial p_s} + R_k \frac{\partial y_k}{\partial p_s} + S_k \frac{\partial z_k}{\partial p_s}\right\}$$

war, so ist unmittelbar zu sehen, dass dieselben als Bedingungsgleichungen für die Minimumslösungen des Ausdruckes

$$G = \sum_1^\mu{}_s \left\{\frac{\partial H}{\partial p_s} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial p'_s}\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial H}{\partial p''_s}\right) - \cdots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\right) + P_s\right\}^2$$

angesehen werden können, wenn man in demselben die Werthe $p_1, \ldots, p_\mu$, $p'_1, \ldots, p'_\mu, \ldots, p_1^{(2\nu-1)}, \ldots, p_\mu^{(2\nu-1)}$ als gegeben betrachtet und Q_k, R_k, S_k von der Zeit und den Coordinaten abhängen. Denn beachtet man, dass G als Function der Grössen $p_1^{(2\nu)}, p_2^{(2\nu)}, \ldots, p_\mu^{(2\nu)}$ die Form hat

$$G = \sum_1^\mu{}_s \left\{f_s(p_1, \ldots, p_\mu, \ldots, p_1^{(2\nu-1)}, \ldots, p_\mu^{(2\nu-1)}) + (-1)^\nu \frac{\partial^2 H}{\partial p_s^{(\nu)}\partial p_1^{(\nu)}} p_1^{(2\nu)} + (-1)^\nu \frac{\partial^2 H}{\partial p_s^{(\nu)}\partial p_2^{(\nu)}} p_2^{(2\nu)} + \cdots + (-1)^\nu \frac{\partial^2 H}{\partial p_s^{(\nu)}\partial p_\mu^{(\nu)}} p_\mu^{(2\nu)} + P_s\right\}^2,$$

so werden die Gleichungen

$$\frac{\partial G}{\partial p_1^{(2\nu)}} = 0,\quad \frac{\partial G}{\partial p_2^{(2\nu)}} = 0,\quad \ldots,\quad \frac{\partial G}{\partial p_\mu^{(2\nu)}} = 0$$

die Form annehmen

$$\sum_1^\mu {}_s \left\{\frac{\partial H}{\partial p_s} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial p'_s}\right) + \cdots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\right) + P_s\right\} \frac{\partial^2 H}{\partial p_s^{(\nu)} \partial p_1^{(\nu)}} = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_1^\mu {}_s \left\{\frac{\partial H}{\partial p_s} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial p'_s}\right) + \cdots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\right) + P_s\right\} \frac{\partial^2 H}{\partial p_s^{(\nu)} \partial p_\mu^{(\nu)}} = 0,$$

und sich somit unter der Annahme, dass die Determinante der zweiten Differentialquotienten von H nach den höchsten Ableitungen der Coordinaten genommen, die in H vorkommen, nicht identisch verschwindet, wie dies z. B., wenn $H = -T - U$ ist, der Fall war, als nothwendige Bedingungen für das Minimum des Ausdruckes G die *Lagrange*schen Bewegungsgleichungen ergeben; dass es die hinreichenden sind, geht daraus hervor, dass G sonst stets positiv ist. Bildet man nun unter der Annahme, dass die Bedingungsgleichungen auch die Zeit t enthalten dürfen, den Ausdruck

$$(1.)\quad \begin{cases} M = \sum_1^n {}_k \dfrac{1}{-\dfrac{\partial^2 H}{\partial x_k^{(\nu)2}}} \left\{\dfrac{\partial H}{\partial x_k} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial H}{\partial x'_k}\right) + \cdots + (-1)^\nu \dfrac{d^\nu}{dt^\nu}\left(\dfrac{\partial H}{\partial x_k^{(\nu)}}\right) - Q_k\right\}^2 \\ \quad + \sum_1^n {}_k \dfrac{1}{-\dfrac{\partial^2 H}{\partial y_k^{(\nu)2}}} \left\{\dfrac{\partial H}{\partial y_k} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial H}{\partial y'_k}\right) + \cdots + (-1)^\nu \dfrac{d^\nu}{dt^\nu}\left(\dfrac{\partial H}{\partial y_k^{(\nu)}}\right) - R_k\right\}^2 \\ \quad + \sum_1^n {}_k \dfrac{1}{-\dfrac{\partial^2 H}{\partial z_k^{(\nu)2}}} \left\{\dfrac{\partial H}{\partial z_k} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial H}{\partial z'_k}\right) + \cdots + (-1)^\nu \dfrac{d^\nu}{dt^\nu}\left(\dfrac{\partial H}{\partial z_k^{(\nu)}}\right) - S_k\right\}^2 \end{cases}$$

und betrachtet denselben als eine Function der Grössen $p_1^{(2\nu)}, p_2^{(2\nu)}, \ldots, p_\mu^{(2\nu)}$, für welche $p_1, \ldots, p_\mu, p'_1, \ldots, p'_\mu, \ldots, p_1^{(2\nu-1)}, \ldots, p_\mu^{(2\nu-1)}$ ihre Werthe beibehalten, wonach also auch alle

$$x_k,\quad y_k,\quad z_k,\quad x'_k,\quad y'_k,\quad z'_k,\quad \ldots,\quad x_k^{(2\nu-1)},\quad y_k^{(2\nu-1)},\quad z_k^{(2\nu-1)}$$

unverändert bleiben, während M nur als Function von $x_k^{(2\nu)}, y_k^{(2\nu)}, z_k^{(2\nu)}$ anzusehen ist, so wird unter der Annahme, dass H eine ganze Function der Grössen $x_k^{(\nu)}, y_k^{(\nu)}, z_k^{(\nu)}$ ist, in welcher nur Potenzen der einzelnen Grössen, nicht Producte verschiedener vorkommen, dass also

$$(2.)\quad \frac{\partial^2 H}{\partial x_\varrho^{(\nu)} \partial x_\sigma^{(\nu)}} = \frac{\partial^2 H}{\partial y_\varrho^{(\nu)} \partial y_\sigma^{(\nu)}} = \frac{\partial^2 H}{\partial z_\varrho^{(\nu)} \partial z_\sigma^{(\nu)}} = 0, \text{ wenn } \varrho \text{ von } \sigma \text{ verschieden,}$$

und

$$(3.)\quad \frac{\partial^2 H}{\partial x_\varrho^{(\nu)} \partial y_\sigma^{(\nu)}} = \frac{\partial^2 H}{\partial x_\varrho^{(\nu)} \partial z_\sigma^{(\nu)}} = \frac{\partial^2 H}{\partial y_\varrho^{(\nu)} \partial z_\sigma^{(\nu)}} = 0 \text{ für beliebige } \varrho \text{ und } \sigma,$$

wie leicht zu sehen,

$$(-1)^{\nu-1}\tfrac{1}{2}\frac{\partial M}{\partial p_s^{(2\nu)}} = \sum_1^n {}_k\left\{\frac{\partial H}{\partial x_k} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial x_k'}\right)+\cdots+(-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\left(\frac{\partial H}{\partial x_k^{(\nu)}}\right)-Q_k\right\}\frac{\partial x_k^{(2\nu)}}{\partial p_s^{(2\nu)}}$$
$$+\sum_1^n {}_k\left\{\frac{\partial H}{\partial y_k} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial y_k'}\right)+\cdots+(-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\left(\frac{\partial H}{\partial y_k^{(\nu)}}\right)-R_k\right\}\frac{\partial y_k^{(2\nu)}}{\partial p_s^{(2\nu)}}$$
$$+\sum_1^n {}_k\left\{\frac{\partial H}{\partial z_k} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial z_k'}\right)+\cdots+(-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\left(\frac{\partial H}{\partial z_k^{(\nu)}}\right)-S_k\right\}\frac{\partial z_k^{(2\nu)}}{\partial p_s^{(2\nu)}}$$

sein, oder da nach Gleichung (I. 2.)

$$\frac{\partial x_k^{(2\nu)}}{\partial p_s^{(2\nu)}} = \frac{\partial x_k}{\partial p_s},\quad \frac{\partial y_k^{(2\nu)}}{\partial p_s^{(2\nu)}} = \frac{\partial y_k}{\partial p_s},\quad \frac{\partial z_k^{(2\nu)}}{\partial p_s^{(2\nu)}} = \frac{\partial z_k}{\partial p_s}$$

ist, vermöge (I. 5.)

$$(4.)\quad (-1)^{\nu-1}\tfrac{1}{2}\frac{\partial M}{\partial p_s^{(2\nu)}} = \frac{\partial H}{\partial p_s} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s'}\right)+\cdots+(-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\right)+P_s = 0,$$

und es nimmt somit für die durch die *Lagrange*schen Bewegungsgleichungen bestimmten Werthe von $p_1^{(2\nu)}, \ldots, p_\mu^{(2\nu)}$ also für die zugehörigen $x_k^{(2\nu)}$, $y_k^{(2\nu)}$, $z_k^{(2\nu)}$ der Ausdruck M ein Maximum oder Minimum an, und zwar dann, wenn, da nach (4.)

$$\frac{\partial^2 M}{\partial p_s^{(2\nu)}\partial p_\sigma^{(2\nu)}} = -2\frac{\partial^2 H}{\partial p_s^{(\nu)}\partial p_\sigma^{(\nu)}}$$

ist, die Determinanten

$$\varepsilon\left|\frac{\partial^2 H}{\partial p_1^{(\nu)}\partial p_1^{(\nu)}}\right|,\ \varepsilon^2\left|\frac{\partial^2 H}{\partial p_1^{(\nu)}\partial p_1^{(\nu)}},\ \frac{\partial^2 H}{\partial p_2^{(\nu)}\partial p_2^{(\nu)}}\right|,\ \ldots,\ \varepsilon^\mu\left|\frac{\partial^2 H}{\partial p_1^{(\nu)}\partial p_1^{(\nu)}},\ \frac{\partial^2 H}{\partial p_2^{(\nu)}\partial p_2^{(\nu)}},\ \ldots,\ \frac{\partial^2 H}{\partial p_\mu^{(\nu)}\partial p_\mu^{(\nu)}}\right|$$

im Falle des Maximums für $\varepsilon = +1$, im Falle des Minimums für $\varepsilon = -1$ sämmtlich positiv sind. Setzt man nun die nach den $p^{(\nu)}$ genommenen zweiten partiellen Differentialquotienten mit Benutzung der Voraussetzungen (2.) und (3.) in die zweiten nach den Coordinaten $x_k^{(\nu)}$, $y_k^{(\nu)}$, $z_k^{(\nu)}$ genommenen partiellen Differentialquotienten um, so folgt als das *verallgemeinerte Gausssche Princip vom kleinsten Zwange der Satz, dass die Summe M unter allen Werthen von*

$$x_k^{(2\nu)},\quad y_k^{(2\nu)},\quad z_k^{(2\nu)}$$

mit Beibehaltung der Werthe

$$x_k,\quad y_k,\quad z_k,\quad x_k',\quad y_k',\quad z_k',\quad \ldots,\quad x_k^{(2\nu-1)},\quad y_k^{(2\nu-1)},\quad z_k^{(2\nu-1)}$$

für diejenigen einen Minimumswerth annimmt, welche den Lagrangeschen Bewegungsgleichungen genügen, wenn die Differentialquotienten

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x_k^{(\nu)2}},\quad \frac{\partial^2 H}{\partial y_k^{(\nu)2}},\quad \frac{\partial^2 H}{\partial z_k^{(\nu)2}}$$

sämmtlich negativ sind, und die für die Coordinaten gegebenen Bedingungen für die verglichenen Werthsysteme aufrecht erhalten werden.

Ist $H = -T - U$, so geht dieser Satz in das bekannte *Gauss*sche Princip vom kleinsten Zwange über, nach welchem

$$\sum_1^n{}_k m_k \left\{ \left(x_k'' - \frac{\frac{\partial U}{\partial x_k} + Q_k}{m_k} \right)^2 + \left(y_k'' - \frac{\frac{\partial U}{\partial y_k} + R_k}{m_k} \right)^2 + \left(z_k'' - \frac{\frac{\partial U}{\partial z_k} + S_k}{m_k} \right)^2 \right\}$$

unter allen Werthsystemen von x_k'', y_k'', z_k'', für dieselben Werthe von x_k, y_k, z_k und x_k', y_k', z_k' *), und unter Beibehaltung der für die Coordinaten gegebenen Bedingungen für diejenigen einen Minimalwerth erreicht, welche der wirklichen Bewegung entsprechen.

Aus der oben gegebenen Herleitung ist zugleich die Aequivalenz des verallgemeinerten Gaussschen Satzes vom kleinsten Zwange mit den verallgemeinerten Lagrangeschen Gleichungen ersichtlich.

Es bedarf kaum der Erwähnung, dass man den mathematischen Inhalt des *Hertz*schen Grundgesetzes der Mechanik, wonach jede natürliche Bewegung eines selbständigen materiellen Systemes darin besteht, dass das System mit gleichbleibender Geschwindigkeit eine seiner geradesten Bahnen verfolge, und welches im Grunde unter der Voraussetzung des Satzes von der Erhaltung der lebendigen Kraft nur eine Beschreibung der durch das *Gauss*sche Princip unabänderlich vorgeschriebenen Bewegung liefert, ebenso wie letzteres auf allgemeinere Potentialkräfte ausdehnen kann, doch liegt hierin bei *Hertz*, ebenso wenig wie bei *Helmholtz*, der Kern der formal und inhaltlich bewundernswerthen Untersuchungen, sondern es ist wieder die von *Hertz* angenommene *Helmholtz*sche Hypothese, dass alle Erscheinungen in einheitlicher Weise zu Stande kommen durch Wirkung verborgener Massen, durch verborgene Bewegung und starre Verbindungen, welche den wesentlichen Fortschritt in der neueren Mechanik bezeichnet**).

---

*) Dass, wenn die Werthe x_k', y_k', z_k' nicht beibehalten werden, das *Gauss*sche Princip seine Gültigkeit verliert, hat *Lipschitz* in seinen „Bemerkungen zu dem Princip des kleinsten Zwanges" nachgewiesen.

**) Diesen grundlegenden Gedanken von *Helmholtz* kleidet *Hertz* in die correcte Form der Annahme, „dass die Mannigfaltigkeit der wirklichen Welt grösser ist als die Mannigfaltigkeit der Welt, welche sich unseren Sinnen offenbart; wir geben zu, dass ein verborgenes Etwas mitwirke, aber wir leugnen, dass dies Wesen besonderer Art, wie die Begriffe der Kraft und Energie, sind; das Verborgene soll wiederum Bewegung und Masse sein, welche sich von der sichtbaren nicht an sich sondern nur in

Bevor wir nun auch diese Untersuchungen auf die oben zu Grunde gelegten ganz allgemeinen Potentialkräfte ausdehnen, müssen wir zunächst noch ein fundamentales Princip der Mechanik, das der kleinsten Wirkung, näher erörtern, dessen Gültigkeit und Identität mit dem *Hamilton*schen Princip zuerst *Helmholtz* auch für den Fall äusserer von der Zeit abhängiger Kräfte bewiesen, dessen Correctheit jedoch noch in einzelnen Punkten näher festzustellen ist; wir wollen es wiederum, wie die anderen oben behandelten Principien, in allgemeinster Form entwickeln.

VII.

Das erweiterte Princip der kleinsten Wirkung.

Aus den allgemeinen *Lagrange*schen Gleichungen

$$\frac{\partial H}{\partial p_s} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s'}\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s''}\right) - \cdots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\right) + P_s = 0$$

folgte, wenn H die Variable t nicht explicite enthält, das oben erweiterte Princip von der Erhaltung der lebendigen Kraft in der Form

$$\begin{aligned} H - \sum_1^\mu{}_s p_s' \left\{\frac{\partial H}{\partial p_s'} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s''}\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s'''}\right) - \cdots + (-1)^{\nu-1} \frac{d^{\nu-1}}{dt^{\nu-1}}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\right)\right\} \\ - \sum_1^\mu{}_s p_s'' \left\{\frac{\partial H}{\partial p_s''} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s'''}\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s''''}\right) - \cdots + (-1)^{\nu-2} \frac{d^{\nu-2}}{dt^{\nu-2}}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\right)\right\} \\ - \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ - \sum_1^\mu{}_s p_s^{(\nu)} \frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}} + \int \sum_1^\mu{}_s P_s p_s' dt = h \end{aligned}$$

oder

$$E + \int \sum_1^\mu{}_s P_s p_s' dt = h,$$

Beziehung auf uns und unsere gewöhnlichen Mittel der Wahrnehmung unterscheiden — Kraft und Energie ist dann nur eine Wirkung von Masse und Bewegung, aber nicht immer grobsinnlich wahrnehmbar ...". Es gehören also diese Gedanken, wie dies ja auch *Hertz* ausdrücklich erklärt, wesentlich *Helmholtz* an, nur dass dieser bei der Durchführung derselben den umgekehrten Weg einschlägt; er legt der physikalischen Forschung nicht diesen Zwang der Erklärung auf, sondern er geht von grobsinnlicher Masse und Bewegung aus, lässt die auf diese wirkenden äusseren Kräfte verschwinden oder bestimmte Beziehungen zu einander annehmen und fragt, was aus den *Lagrange*schen Bewegungsgleichungen oder aus dem aequivalenten *Hamilton*schen Princip in diesen Fällen wird; die Aehnlichkeit der so umgeformten mathematischen Beziehungen mit den durch Beobachtung gefundenen physikalischen Gesetzen liefert ihm die physikalische Erklärung der Erscheinungen.

worin h eine Constante bedeutet für den ganzen Verlauf der Variablen t von t_0 bis t und die zugehörigen Werthe der Coordinaten und deren Ableitungen. Betrachten wir nun zu denjenigen Werthen von p_s, welche den *Lagrange*schen Gleichungen genügen, unendlich benachbarte $p_s+\delta p_s$ mit ihren zugehörigen Ableitungen, für welche das Princip von der Erhaltung der lebendigen Kraft aufrecht erhalten werden soll, was durch Hinzufügung anderer von der Zeit unabhängiger Bedingungsgleichungen zu den gegebenen erreicht werden kann, so wird die Grösse h der lebendigen Kraft auch für die variirte Bewegung eine Constante sein, im allgemeinen sich aber gegen den früheren Werth im gegebenen Problem geändert haben. So lange wir nun die Variation δh keiner Bedingung unterwerfen, werden die Variationen δp_s von einander unabhängig sein, treffen wir jedoch für δh irgend welche Bestimmung, so werden die in der Variation der Gleichung der lebendigen Kraft vorkommenden Variationen der Coordinaten p_s einer Bedingung unterliegen, und wir werden daher, wenn wir die Willkürlichkeit der Coordinaten p_s festhalten wollen, noch die Grösse t selbst der Variation unterwerfen müssen.

Um nun die Bedeutung der nach den Coordinaten und der Zeit genommenen Variationen klar hervortreten zu lassen*), wollen wir eine Variable u einführen, von der wir die p_s sowie t abhängig betrachten und zunächst annehmen, dass H eine von t freie, von $p_s\, p'_s,\, p''_s$ abhängige, in ihren ersten und zweiten Differentialquotienten endliche und stetige Function bedeutet; setzen wir

$$p_s = q_s, \quad \frac{d^k q_s}{du^k} = q_s^{(k)}, \quad \frac{d^k t}{du^k} = t^{(k)},$$

so wird, wenn H_1 eine denselben Bedingungen unterworfene Function von $t',\, t''\, q_s,\, q'_s,\, q''_s$ bedeutet,

$$\delta H_1 = \sum_1^\mu {}_s \left\{ \frac{\partial H_1}{\partial q_s} \delta q_s + \frac{\partial H_1}{\partial q'_s} \delta q'_s + \frac{\partial H_1}{\partial q''_s} \delta q''_s \right\} + \frac{\partial H_1}{\partial t'} \delta t' + \frac{\partial H_1}{\partial t''} \delta t''$$

---

*) Vergl. für Functionen H, die nur die erste Ableitung der Coordinaten enthalten, *Adolph Mayer* „Die beiden allgemeinen Sätze der Variationsrechnung, welche den beiden Formen des Princips der kleinsten Action in der Dynamik entsprechen“. Verhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig 1886, und *Helmholtz* „Zur Geschichte des Princips der kleinsten Action“ III 249.

sein oder

$$(1.)\quad \left\{\begin{aligned} \delta H_1 = \sum_1^\mu{}_s &\left\{\frac{\partial H_1}{\partial q_s} - \frac{d}{du}\left(\frac{\partial H_1}{\partial q'_s}\right) + \frac{d^2}{du^2}\left(\frac{\partial H_1}{\partial q''_s}\right)\right\}\delta q_s \\ &- \left\{\frac{d}{du}\left(\frac{\partial H_1}{\partial t'}\right) - \frac{d^2}{du^2}\left(\frac{\partial H_1}{\partial t''}\right)\right\}\delta t \\ &+ \frac{d}{du}\left[\sum_1^\mu{}_s \left\{\left(\frac{\partial H_1}{\partial q'_s} - \frac{d}{du}\left(\frac{\partial H_1}{\partial q''_s}\right)\right)\delta q_s + \frac{\partial H_1}{\partial q''_s}\delta q'_s\right\}\right. \\ &\qquad \left. + \left(\frac{\partial H_1}{\partial t'} - \frac{d}{du}\left(\frac{\partial H_1}{\partial t''}\right)\right)\delta t + \frac{\partial H_1}{\partial t''}\delta t'\right]. \end{aligned}\right.$$

Setzt man nun $H_1 = H.t'$ und bemerkt, dass, weil

$$p'_s = \frac{q'_s}{t'},\quad p''_s = \frac{t'q''_s - q'_s t''}{t'^3},$$

$$\frac{\partial(Ht')}{\partial q_s} = t'\frac{\partial H}{\partial p_s},$$

$$\frac{d}{du}\left(\frac{\partial(Ht')}{\partial q'_s}\right) = t'\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial p'_s}\right) - \frac{t''}{t'}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial p''_s}\right) - \frac{\partial H}{\partial p''_s}\frac{t't''' - 2t''^2}{t'^3},$$

$$\frac{d^2}{du^2}\left(\frac{\partial(Ht')}{\partial q''_s}\right) = t'\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial H}{\partial p''_s}\right) - \frac{t''}{t'}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial p''_s}\right) - \frac{\partial H}{\partial p''_s}\frac{t't''' - 2t''^2}{t'^3},$$

dass ferner

$$t'\frac{\partial H}{\partial t'} = -\sum_1^\mu{}_s \frac{\partial H}{\partial p'_s}\frac{q'_s}{t'} + \sum_1^\mu{}_s \frac{\partial H}{\partial p''_s}\left(\frac{-2q''_s}{t'^2} + \frac{3q'_s t''}{t'^3}\right),$$

$$\frac{d}{du}\left(t'\frac{\partial H}{\partial t''}\right) = -\sum_1^\mu{}_s \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial p''_s}\right)\frac{q'_s}{t'} - \sum_1^\mu{}_s \frac{\partial H}{\partial p''_s}\left(\frac{q''_s}{t'^2} - \frac{2q'_s t''}{t'^3}\right)$$

ist, so geht die Gleichung (1.) in

$$(2.)\quad \left\{\begin{aligned} t'\sum_1^\mu{}_s &\left\{\frac{\partial H}{\partial p_s} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial p'_s}\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial H}{\partial p''_s}\right)\right\}\delta p_s \\ &= \delta(Ht') - \left(H - \sum_1^\mu{}_s \left\{p'_s\left(\frac{\partial H}{\partial p'_s} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial p''_s}\right)\right) + p''_s\frac{\partial H}{\partial p''_s}\right\}\right)\delta t' \\ &\qquad - \frac{d}{du}\left[\sum_1^\mu{}_s \left\{\left(\frac{\partial H}{\partial p'_s} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial p''_s}\right)\right)\delta p_s + \frac{\partial H}{\partial p''_s}\delta p'_s\right\}\right] \end{aligned}\right.$$

über. Da aber die Gleichung für das Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft

$$(3.)\quad H - \sum_1^\mu{}_s \left\{p'_s\left(\frac{\partial H}{\partial p'_s} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial p''_s}\right)\right) + p''_s\frac{\partial H}{\partial p''_s}\right\} = h - \int \sum_1^\mu{}_s P_s dp_s$$

durch Variation nach den Coordinaten und der Zeit die Beziehung

$$\delta(Ht') = \left\{\delta h - \delta\int\sum_{s=1}^{\mu} P_s dp_s\right\} t' + \left(h - \int\sum_{s=1}^{\mu} P_s dp_s\right)\delta t'$$
$$+\delta\left\{\sum_{s=1}^{\mu}\left[p_s'\left(\frac{\partial H}{\partial p_s'} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s''}\right)\right) + p_s''\frac{\partial H}{\partial p_s''}\right] t'\right\}$$

liefert, so geht die Gleichung (2.) mit Berücksichtigung von (3.) durch Einsetzen des Werthes von $\delta(Ht')$ über in

$$t'\sum_{s=1}^{\mu}\left\{\frac{\partial H}{\partial p_s} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s'}\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s''}\right) + P_s\right\}\delta p_s$$
$$= \delta\left\{\sum_{s=1}^{\mu}\left[p'\left(\frac{\partial H}{\partial p_s'} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s''}\right)\right) + p_s''\frac{\partial H}{\partial p_s''}\right]\frac{dt}{du}\right\} + \left\{\delta h - \delta\int\sum_{s=1}^{\mu} P_s dp_s\right\}\frac{dt}{du}$$
$$+\sum_{s=1}^{\mu} P_s\delta p_s\frac{dt}{du} - \frac{d}{du}\left[\sum_{s=1}^{\mu}\left\{\left(\frac{\partial H}{\partial p_s'} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s''}\right)\right)\delta p_s + \frac{\partial H}{\partial p_s''}\delta p_s'\right\}\right],$$

und durch Integration zwischen der festen Grenze t_0 und der variablen Grenze t in

$$\int_{t_0}^{t}\sum_{s=1}^{\mu}\left\{\frac{\partial H}{\partial p_s} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s'}\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s''}\right) + P_s\right\}\delta p_s dt$$
$$= \delta\int_{t_0}^{t}\sum_{s=1}^{\mu}\left\{p_s'\left(\frac{\partial H}{\partial p_s'} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s''}\right)\right) + p_s''\frac{\partial H}{\partial p_s''}\right\} dt$$
$$+\int_{t_0}^{t}\delta\left\{h - \int\sum_{s=1}^{\mu} P_s dp_s\right\} dt + \int_{t_0}^{t}\sum_{s=1}^{\mu} P_s\delta p_s dt$$
$$-\left[\sum_{s=1}^{\mu}\left\{\left(\frac{\partial H}{\partial p_s'} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s''}\right)\right)\delta p_s + \frac{\partial H}{\partial p_s''}\delta p_s'\right\}\right]_{t_0}^{t} \text{*)}.$$

Da vermöge der Variation von t auch für willkürliche fernere Bestimmungen der Variation der Constanten h der lebendigen Kraft die Variationen δp_s völlig willkürlich blieben, *so folgt aus der letzten Gleichung die Aequivalenz der erweiterten Lagrangeschen Differentialgleichungen mit der Gleichung*

$$\delta\int_{t_0}^{t}\sum_{s=1}^{\mu}\left\{p_s'\left(\frac{\partial H}{\partial p_s'} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s''}\right)\right) + p_s''\frac{\partial H}{\partial p_s''}\right\} dt =$$
$$-\int_{t_0}^{t}\delta\left\{h - \int\sum_{s=1}^{\mu} P_s dp_s\right\} dt - \int_{t_0}^{t}\sum_{s=1}^{\mu} P_s\delta p_s dt$$
$$+\left[\sum_{s=1}^{\mu}\left\{\left(\frac{\partial H}{\partial p_s'} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s''}\right)\right)\delta p_s + \frac{\partial H}{\partial p_s''}\delta p_s'\right\}\right]_{t_0}^{t}$$

---

*) Ich bemerke, dass in meiner Arbeit „Ueber die Principien der Mechanik" in den Sitzungsberichten der Berliner Akademie vom Juli 1896 für die von u_0 bis u in der obigen Gleichung genommene Integration unter δt der Ausdruck $t'\delta u$ zu verstehen ist.

oder, da nach (V. 4.)

$$E = h - \int \sum_1^\mu {}_s P_s dp_s$$

ist,

$$\delta \int_{t_0}^{t} \sum_1^\mu {}_s \left\{ p'_s \left(\frac{\partial H}{\partial p'_s} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial p''_s}\right)\right) + p''_s \frac{\partial H}{\partial p''_s} \right\} dt = -\int_{t_0}^{t} \delta E dt - \int_{t_0}^{t} \sum_1^\mu {}_s P_s \delta p_s dt$$
$$+ \left[\sum_1^\mu {}_s \left\{ \left(\frac{\partial H}{\partial p'_s} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial p''_s}\right)\right) \delta p_s + \frac{\partial H}{\partial p''_s} \delta p'_s \right\} \right]_{t_0}^{t},$$

und diese Gleichung stellt das Princip der kleinsten Wirkung in der erweiterten Form dar für den Fall, dass H keine höheren Differentialquotienten der p_s als von der zweiten Ordnung enthält.

Allgemein lautet die Gleichung, welche das Princip der kleinsten Wirkung darstellt, folgendermaassen:

$$(4.) \quad \begin{cases} \delta \int_{t_0}^{t} \sum_1^\mu {}_s \left\{ p'_s \left[\frac{\partial H}{\partial p'_s} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial p''_s}\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial H}{\partial p'''_s}\right) - \cdots + (-1)^{\nu-1} \frac{d^{\nu-1}}{dt^{\nu-1}}\left(\frac{\partial H}{\partial p^{(\nu)}_s}\right)\right] \right. \\ \quad + p''_s \left[\frac{\partial H}{\partial p''_s} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial p'''_s}\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial H}{\partial p''''_s}\right) - \cdots + (-1)^{\nu-2} \frac{d^{\nu-2}}{dt^{\nu-2}}\left(\frac{\partial H}{\partial p^{(\nu)}_s}\right)\right] \\ \quad + \cdot \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ \quad \left. + p^{(\nu)}_s \frac{\partial H}{\partial p^{(\nu)}_s} \right\} dt \\ = -\int_{t_0}^{t} \delta E dt - \int_{t_0}^{t} \sum_1^\mu {}_s P_s \delta p_s dt + \left[\sum_1^\mu {}_s \left\{ \left(\frac{\partial H}{\partial p'_s} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial p''_s}\right) \right. \right. \right. \\ \qquad \left. + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial H}{\partial p'''_s}\right) - \cdots + (-1)^{\nu-1} \frac{d^{\nu-1}}{dt^{\nu-1}}\left(\frac{\partial H}{\partial p^{(\nu)}_s}\right)\right) \delta p_s \\ + \left(\frac{\partial H}{\partial p''_s} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial p'''_s}\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial H}{\partial p''''_s}\right) - \cdots + (-1)^{\nu-2} \frac{d^{\nu-2}}{dt^{\nu-2}}\left(\frac{\partial H}{\partial p^{(\nu)}_s}\right)\right) \delta p'_s \\ + \cdot \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ \left. \left. + \frac{\partial H}{\partial p^{(\nu)}_s} \delta p^{(\nu-1)}_s \right\} \right]_{t_0}^{t}. \end{cases}$$

Für den Fall, dass H selbst die Zeit t explicite enthält, und somit die äusseren Kräfte P nicht abgesondert zu werden brauchen, wird sich, wie aus den eben aufgestellten Hülfsgleichungen unmittelbar ersichtlich ist, vermöge der in der Anmerkung zu Seite 289 erwähnten Beziehung, welche an Stelle des Princips der Erhaltung der lebendigen Kraft tritt, das erweiterte *Hamilton*sche Princip in der Form ergeben

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} H dt = [E \delta t]_{t_0}^{t_1} + \left[\sum_1^\mu {}_s \left\{ \left(\frac{\partial H}{\partial p'_s} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial p''_s}\right) + \cdots \right) \delta p_s + \cdots + \frac{\partial H}{\partial p^{(\nu)}_s} \delta p^{(\nu-1)}_s \right\} \right]_{t_0}^{t_1},$$

worin die Variation auf die Coordinaten und die Zeit zu erstrecken ist, und aus dieser Form lassen sich ähnlich, wie es *Réthy* für Functionen H, die nur von den ersten Differentialquotienten der Coordinaten und der Zeit abhängen, gethan hat*), die entsprechenden allgemeinen Sätze für das erweiterte Princip der kleinsten Wirkung herleiten.

Enthält H nur die ersten Ableitungen der Coordinaten, so geht die Gleichung (4.) *in*

$$(5.)\quad \delta\int_{t_0}^{t}\sum_1^{\mu}{}_s p'_s\frac{\partial H}{\partial p'_s}dt = -\int_{t_0}^{t}\delta E\,dt - \int_{t_0}^{t}\sum_1^{\mu}{}_s P_s\delta p_s dt + \Big[\sum_1^{\mu}{}_s\frac{\partial H}{\partial p'_s}\delta p_s\Big]_{t_0}^{t}$$

über, es wird

$$E = H - \sum_1^{\mu}{}_s p'_s\frac{\partial H}{\partial p'_s} = h - \int\sum_1^{\mu}{}_s P_s dp_s,$$

und stellt H wieder die Hamiltonsche Principalfunction

$$H = -T-U$$

dar, worin

$$T = \tfrac{1}{2}\sum_1^{n}{}_k m_k v_k^2$$

die lebendige Kraft und U die nur von den Coordinaten p_s abhängige Kräftefunction bedeutet, so dass das Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft die Form hat

$$E = T-U = h - \int\sum_1^{\mu}{}_s P_s dp_s,$$

so lautet das Princip der kleinsten Wirkung nach Gleichung (5.), *da*

$$\sum_1^{\mu}{}_s p'_s\frac{\partial H}{\partial p'_s}dt = -\sum_1^{\mu}{}_s p'_s\frac{\partial T}{\partial p'_s}dt = -2T\,dt = -\sum_1^{n}{}_k m_k v_k d\sigma_k$$

ist, worin $d\sigma_k$ das Wegelement bedeutet,

$$(6.)\quad \delta\int_{t_0}^{t}\sum_1^{n}{}_k m_k v_k d\sigma_k = \int_{t_0}^{t}\delta E\,dt + \int_{t_0}^{t}\sum_1^{\mu}{}_s P_s\delta p_s dt + \Big[\sum_1^{\mu}{}_s\frac{\partial T}{\partial p'_s}\delta p_s\Big]_{t_0}^{t}.$$

Sind sämmtliche äusseren Kräfte $P_s = 0$, so geht die Gleichung (6.) *über in*

$$(7.)\qquad \delta\int_{t_0}^{t}\sum_1^{n}{}_k m_k v_k d\sigma_k = (t-t_0)\delta h + \Big[\sum_1^{\mu}{}_s\frac{\partial T}{\partial p'_s}\delta p_s\Big]_{t_0}^{t}\;**),$$

---

*) „Ueber das Princip der kleinsten Action", Mathem. und Naturwiss. Berichte aus Ungarn, Band XIII. Vgl. auch „Ueber das Princip der kleinsten Action und das *Hamilton*sche Princip" Mathem. Annalen Band 48.

**) woraus mit Einführung rechtwinkliger Coordinaten, da

$$\sum_1^{\mu}{}_s\frac{\partial T}{\partial p'_s}\delta p_s = \sum_1^{n}{}_k m_k\frac{dx_k\delta x_k + dy_k\delta y_k + dz_k\delta z_k}{dt} = \sum_1^{n}{}_k m_k\frac{ds_k}{dt}\delta q_k\cos(ds_k,\ \delta q_k)$$

und setzen wir fest, dass die Coordinaten des Systemes am Anfange t_0 *der Bewegung und zu der beliebig gewählten Endzeit t keine Variationen erleiden, dass ferner die Variation von h verschwindet, was,* da h eine Constante, vermöge der Beziehung $T - U = h$ *damit identisch ist, dass die verglichenen unendlich benachbarten Bewegungen in entsprechenden Zeiten dieselbe lebendige Kraft haben oder,* was offenbar genügend ist, *dass sie beim Beginne der Bewegung dieselbe lebendige Kraft besitzen, so werden die Lagrangeschen Gleichungen äquivalent sein der Gleichung*

$$(8.) \qquad \delta \int_{t_0}^{t} \sum_{1}^{n}{}_k \, m_k v_k d\sigma_k = 0,$$

wobei hervorzuheben, dass, wenn die Anfangs- und Endlage durch gegebene Werthe der Coordinaten bestimmt sind, sich für einen gegebenen Energievorrath mittelst der Integrale der Differentialgleichungen aus dem Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft der Werth t der oberen Integralgrenze ergeben wird.

Lassen wir nun die Annahme fallen, dass die äusseren Kräfte sämmtlich verschwinden, so wird sich nach Gleichung (6.) *wiederum unter der Voraussetzung, dass die Coordinaten des Systems am Anfange* t_0 *der Bewegung und zu der beliebig gewählten Endzeit t keine Variationen erleiden, dass ferner der Energievorrath des Systemes, wenn die Punkte gezwungen werden, sich auf unendlich nahen Curven zu bewegen und die neu eingeführten Bedingungsgleichungen von der Zeit unabhängig sind, in dem Maasse abnimmt oder wächst, als die Kräfte* P_s *für die Verschiebung* δp_s *positive oder negative Arbeit leisten* — woraus folgt, dass, weil δp_s am Anfange und Ende gleich Null ist, der Energievorrath am Anfange und Ende für die verglichenen Bewegungen

ist, wenn δq_k unendlich kleine Verschiebungen bedeuten, der wichtige, von *Boltzmann* („Ueber die mechanische Bedeutung des zweiten Hauptsatzes der Wärmetheorie", Sitzungsber. d. Kais. Akad. d. Wissensch. zu Wien 1866) herrührende Satz folgt, der dem zweiten Hauptsatz der Wärmelehre ebenso analog ist, wie das Princip der lebendigen Kräfte dem ersten, wonach die Variation des Integrales $\int_{t_0}^{t} \sum_{1}^{n}{}_k \, m_k v_k d\sigma_k$, wenn allen Punkten des Systems, welche sich unter dem Einfluss von Kräften bewegen, für die das Princip der lebendigen Kraft gilt, eine unendlich kleine lebendige Kraft zugeführt wird, und die Punkte gezwungen werden, sich auf unendlich nahen Curven zu bewegen, gleich der zugeführten lebendigen Kraft ist multiplicirt mit der Zeit, während der die Bewegung geschieht, wenn die Summen der Producte aus den Verschiebungen der Punkte, ihren Geschwindigkeiten und den Cosinus der Winkel beider für beide Grenzen gleich sind. Vgl. auch *Helmholtz* „Studien zur Statik monocyclischer Systeme Bd. III S. 176.

derselbe ist —, *die Gültigkeit der Gleichung* (8.) *und ihre Aequivalenz mit den Lagrangeschen Gleichungen ergeben*. Dass bei den Variationen dieser Integrale die Zeit t selbst zu variiren ist, geht aus den früheren Auseinandersetzungen als nothwendig hervor.

Wie bekannt, hat *Helmholtz**) zuerst das von *Lagrange* bewiesene Princip der kleinsten Wirkung von der *Jacobi*schen Darstellung desselben streng dadurch geschieden, dass er in dem einen Falle nur die Bedingung gelten liess, dass in den verglichenen Bewegungen überhaupt das Princip der lebendigen Kraft Gültigkeit habe, während in dem anderen Falle die Constante der lebendigen Kraft für all die verglichenen Bewegungen dieselbe bleibe. *Hertz***) wägt die Vortheile und Nachtheile der beiden Darstellungen des Princips der kleinsten Wirkung gegen einander ab und sieht in der oben erwähnten Integraldarstellung den Vorzug der Einfachheit und einer gewissen physikalischen Bedeutung, glaubt jedoch, dass sie unnöthiger Weise die Zeit enthält, da doch die eigentliche Aussage nur die Bahn des Systems und nicht die Bewegung in dieser bestimmt, eine Ansicht, die *A. Mayer* schon früher in den genannten Arbeiten vertreten hat. Die oben gegebene Darstellung für den Fall ganz allgemeiner Potentialkräfte wird die Zweckmässigkeit der Variation der Zeit dargethan haben.

Um übrigens die Erweiterung auch in der Jacobischen Form zu erhalten, für welche die Annahme nothwendig ist, dass die äusseren Kräfte sämmtlich verschwinden, ist wiederum die Variation des Integrals

$$\delta \int_{t_0}^{t} \sum_{1}^{\mu}{}_{s} \Big\{ p_s' \Big[\frac{\partial H}{\partial p_s'} - \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial H}{\partial p_s''}\Big) + \cdots + (-1)^{\nu-1} \frac{d^{\nu-1}}{dt^{\nu-1}}\Big(\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\Big) \Big]$$
$$+ p_s'' \Big[\frac{\partial H}{\partial p_s''} - \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial H}{\partial p_s'''}\Big) + \cdots + (-1)^{\nu-2} \frac{d^{\nu-2}}{dt^{\nu-2}}\Big(\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\Big) \Big]$$
$$+ \cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot$$
$$+ p_s^{(\nu)} \frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}} \Big\} dt$$

zu untersuchen, nachdem aus der Function unter dem Integral die Grösse t mit Hülfe des Princips der Erhaltung der lebendigen Kraft

$$(9.) \quad \begin{cases} H - \sum_{1}^{\mu}{}_{s} p_s' \Big\{ \frac{\partial H}{\partial p_s'} - \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial H}{\partial p_s''}\Big) + \cdots \Big\} - \sum_{1}^{\mu}{}_{s} p_s'' \Big\{ \frac{\partial H}{\partial p_s''} - \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial H}{\partial p_s'''}\Big) + \cdots \Big\} \\ \qquad\qquad - \cdots - \sum_{1}^{\mu}{}_{s} p_s^{(\nu)} \frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}} = h, \end{cases}$$

*) „Zur Geschichte des Princips der kleinsten Action" Bd. III S. 249.

**) „Die Principien der Mechanik" S. 271.

worin h eine Constante, und zwar eine für die verglichenen Bewegungen nicht variirbare bedeutet, eliminirt worden ist*), oder anders ausgedrückt, es ist die Function unter dem Integral, wenn wiederum die p und t als Functionen einer Variabeln u betrachtet werden, als eine Function von $q_s, q'_s, \ldots, q_s^{(2\nu-1)}$, $t', t'', \ldots, t^{(2\nu-1)}$ aufzufassen, wenn diese letzteren Grössen durch die Gleichung (9.) mit einander verbunden sind. Betrachtet man nun diese Gleichung als eine Differentialgleichung $(2\nu-2)$-ter Ordnung in der abhängigen Variabeln t' und der unabhängigen Variabeln u, in welche die Grössen $q_s, q'_s, \ldots, q_s^{(2\nu-1)}$ als Functionen von u eintreten, denkt sich den durch Integration hervorgehenden Werth von t in die Function unter dem Integral eingesetzt, und nimmt sodann die Variation des Integrales dieser nur q_s und dessen Ableitungen enthaltenden Function, so wird die Aequivalenz dieser Variation und der linken Seiten der *Lagrange*schen Gleichungen zu untersuchen sein. Diese ist aber sofort ersichtlich, wenn die Variation zunächst wie oben vor der Elimination ausgeführt wird, indem man t' und dessen Ableitungen mit $q_s, q'_s, \ldots$ durch die Gleichung (9.) verbunden betrachtet; man findet dann nach der Gleichung (4.) die *Lagrange*schen Bewegungsgleichungen äquivalent der im angegebenen Sinne genommenen und gleich Null gesetzten Variation, wenn die Variationen von $p_s, p'_s, \ldots, p_s^{(\nu-1)}$ an den Grenzen verschwinden.

Enthält H nur die ersten Ableitungen der Coordinaten p_s, so wird sich t' ohne Integration durch Elimination zwischen der Gleichung (9.) und der Function unter dem zu variirenden Integral herausschaffen lassen, wie dies bei dem *Weber*schen Gesetze der Fall ist, wofür übrigens noch mannigfache andere, der *Jacobi*schen analoge Integralformen gesetzt werden können.

Bevor ich nun weiter zu der Untersuchung der Eigenschaften der in den verallgemeinerten *Lagrange*schen Gleichungen enthaltenen äusseren Kräfte als Functionen der Coordinaten und deren Ableitungen und zur Aufstellung der verschiedenen Transformationen der Bewegungsgleichungen

---

*) Da nämlich die Aufrechterhaltung des Princips der lebendigen Kraft die Variation der Gleichung (9.) für $\delta h = 0$ verlangt, so würden wiederum die δp_s nicht von einander unabhängig sein, was zur Herleitung der Aequivalenz der gleich Null gesetzten Variation des Integrales mit den *Lagrange*schen Gleichungen nothwendig ist, wenn nicht t wieder selbst variirt würde; es müsste also, wenn man von der Variation nach t absehen will, erst t mit Hülfe der Bedingungsgleichung, welche das Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft darstellt, aus dem Integrale eliminirt werden.

selbst in die erweiterten *Hamilton*schen Formen fortschreite, soll zunächst noch die Ausdehnung zweier gewöhnlich als mechanische Principien bezeichneten Sätze behandelt werden.

VIII.

Das erweiterte Princip der Erhaltung der Flächen.

Um zu untersuchen, in welchen Fällen sich für die erweiterten *Lagrange*schen Bewegungsgleichungen erster Form

$$(1.)\quad \begin{cases} \frac{\partial H}{\partial x_k} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial x_k'}\right) + \cdots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\left(\frac{\partial H}{\partial x_k^{(\nu)}}\right) - Q_k + \lambda_1 f_{1k} + \cdots + \lambda_m f_{mk} = 0, \\ \frac{\partial H}{\partial y_k} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial y_k'}\right) + \cdots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\left(\frac{\partial H}{\partial y_k^{(\nu)}}\right) - R_k + \lambda_1 \varphi_{1k} + \cdots + \lambda_m \varphi_{mk} = 0, \\ \frac{\partial H}{\partial z_k} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial z_k'}\right) + \cdots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\left(\frac{\partial H}{\partial z_k^{(\nu)}}\right) - S_k + \lambda_1 \psi_{1k} + \cdots + \lambda_m \psi_{mk} = 0, \\ \qquad (\text{für } k = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

ein Integral ergiebt, welches analog ist dem Princip der Erhaltung der Flächen für kinetische Potentiale, welche die Gestalt haben

$$H = -T - U,$$

worin T die lebendige Kraft und U das Potential im gewöhnlichen Sinne ist, werde zunächst bemerkt, dass, wenn H_1 eine Function der Coordinaten und deren Ableitungen bis zur νten Ordnung hin bedeutet,

$$(2.)\quad \begin{cases} y_k \frac{d^r}{dt^r}\left(\frac{\partial H_1}{\partial x_k^{(r)}}\right) - x_k \frac{d^r}{dt^r}\left(\frac{\partial H_1}{\partial y_k^{(r)}}\right) = \frac{d}{dt}\left[y_k \frac{d^{r-1}}{dt^{r-1}}\left(\frac{\partial H_1}{\partial x_k^{(r)}}\right) - x_k \frac{d^{r-1}}{dt^{r-1}}\left(\frac{\partial H_1}{\partial y_k^{(r)}}\right)\right] \\ \qquad - \frac{d}{dt}\left[y_k' \frac{d^{r-2}}{dt^{r-2}}\left(\frac{\partial H_1}{\partial x_k^{(r)}}\right) - x_k' \frac{d^{r-2}}{dt^{r-2}}\left(\frac{\partial H_1}{\partial y_k^{(r)}}\right)\right] \\ \qquad + \cdots \\ \qquad + (-1)^{r-1} \frac{d}{dt}\left[y_k^{(r-1)} \frac{\partial H_1}{\partial x_k^{(r)}} - x_k^{(r-1)} \frac{\partial H_1}{\partial y_k^{(r)}}\right] \\ \qquad + (-1)^r \left[y_k^{(r)} \frac{\partial H_1}{\partial x_k^{(r)}} - x_k^{(r)} \frac{\partial H_1}{\partial y_k^{(r)}}\right] \end{cases}$$

ist, dass somit, wenn

$$(3.)\quad y_k^{(r)} \frac{\partial H_1}{\partial x_k^{(r)}} - x_k^{(r)} \frac{\partial H_1}{\partial y_k^{(r)}} = 0$$

ist,

$$(4.)\quad \begin{cases} y_k \frac{d^r}{dt^r}\left(\frac{\partial H_1}{\partial x_k^{(r)}}\right) - x_k \frac{d^r}{dt^r}\left(\frac{\partial H_1}{\partial y_k^{(r)}}\right) \\ \qquad = \frac{d}{dt} \sum_0^{r-1} \lambda (-1)^\lambda \left\{ y_k^{(\lambda)} \frac{d^{r-\lambda-1}}{dt^{r-\lambda-1}}\left(\frac{\partial H_1}{\partial x_k^{(r)}}\right) - x_k^{(\lambda)} \frac{d^{r-\lambda-1}}{dt^{r-\lambda-1}}\left(\frac{\partial H_1}{\partial y_k^{(r)}}\right) \right\} \end{cases}$$

also einen vollständigen nach t genommenen Differentialquotienten darstellt. Soll aber die Gleichung (3.) identisch erfüllt sein, so muss H_1 die Form haben

$$H_1 = \varphi(x_k^{(r)2}+y_k^{(r)2}),$$

und somit, wenn dies für jedes $r=0, 1, \dots, \nu$ und jedes $k=1, 2, \dots, n$ der Fall sein soll,

$$(5.)\qquad H_1 = \omega\left\{\begin{matrix} x_1^2+y_1^2, & x_1'^2+y_1'^2, & \dots, & x_1^{(\nu)2}+y_1^{(\nu)2} \\ x_2^2+y_2^2, & x_2'^2+y_2'^2, & \dots, & x_2^{(\nu)2}+y_2^{(\nu)2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_n^2+y_n^2, & x_n'^2+y_n'^2, & \dots, & x_n^{(\nu)2}+y_n^{(\nu)2} \end{matrix}\right\},$$

worin ω eine willkürliche Function der eingeschlossenen Grössen bedeutet, in welche die Grössen $z_1, z_2, \dots, z_n$ beliebig eintreten können.

Ist nun das kinetische Potential

$$H = H_1+H_2,$$

worin H_2 eine Function von $t, R_1, R_2, R_3, \dots,$ und deren nach t genommenen Ableitungen bis zur νten Ordnung hin sein möge, und die Grössen R selbst Functionen der Zeit und der Coordinaten sind, so folgt aus den Gleichungen (1.), wenn die erste mit y_k, die zweite mit x_k multiplicirt, die beiden von einander abgezogen, und sodann nach k von 1 bis n summirt wird

$$(6.)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_1^n{}_k\left[y_k\frac{\partial H}{\partial x_k}-x_k\frac{\partial H}{\partial y_k}\right]-\sum_1^n{}_k\left[y_k\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial x_k'}\right)-x_k\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial y_k'}\right)\right] \\ &\qquad +\dots+(-1)^r\sum_1^n{}_k\left[y_k\frac{d^r}{dt^r}\left(\frac{\partial H}{\partial x_k^{(r)}}\right)-x_k\frac{d^r}{dt^r}\left(\frac{\partial H}{\partial y_k^{(r)}}\right)\right] \\ &+\dots+(-1)^\nu\sum_1^n{}_k\left[y_k\frac{d^\nu}{dt^\nu}\left(\frac{\partial H}{\partial x_k^{(\nu)}}\right)-x_k\frac{d^\nu}{dt^\nu}\left(\frac{\partial H}{\partial y_k^{(\nu)}}\right)\right]-\sum_1^n{}_k[y_kQ_k-x_kR_k] \\ &\qquad +\lambda_1\sum_1^n{}_k[y_kf_{1k}-x_k\varphi_{1k}]+\dots+\lambda_m\sum_1^n{}_k[y_kf_{mk}-x_k\varphi_{mk}] = 0. \end{aligned}\right.$$

Da nun nach Gleichung (I. 5.), wenn p_s durch x_k bez. y_k ersetzt wird, wie unmittelbar zu sehen, sich

$$\begin{aligned} &y_k\left[\frac{\partial H_2}{\partial x_k}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H_2}{\partial x_k'}\right)+\dots+(-1)^\nu\frac{d^\nu}{dt^\nu}\left(\frac{\partial H_2}{\partial x_k^{(\nu)}}\right)\right] \\ &\qquad -x_k\left[\frac{\partial H_2}{\partial y_k}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H_2}{\partial y_k'}\right)+\dots+(-1)^\nu\frac{d^\nu}{dt^\nu}\left(\frac{\partial H_2}{\partial y_k^{(\nu)}}\right)\right] \\ &= \left[\frac{\partial H_2}{\partial R_1}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H_2}{\partial R_1'}\right)+\dots+(-1)^\nu\frac{d^\nu}{dt^\nu}\left(\frac{\partial H_2}{\partial R_1^{(\nu)}}\right)\right]\left(y_k\frac{\partial R_1}{\partial x_k}-x_k\frac{\partial R_1}{\partial y_k}\right) \\ &+\left[\frac{\partial H_2}{\partial R_2}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H_2}{\partial R_2'}\right)+\dots+(-1)^\nu\frac{d^\nu}{dt^\nu}\left(\frac{\partial H_2}{\partial R_2^{(\nu)}}\right)\right]\left(y_k\frac{\partial R_2}{\partial x_k}-x_k\frac{\partial R_2}{\partial y_k}\right) \\ &+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

ergiebt, so geht die Gleichung (6.), wenn H durch H_1+H_2 ersetzt wird, und H_1 die Form (5.) hat, in

$$(7.)\quad \left\{\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\sum_1^n{}_k\sum_1^\nu{}_r(-1)^r\sum_0^{r-1}{}_\lambda(-1)^\lambda\Big[y_k^{(\lambda)}\frac{d^{r-\lambda-1}}{dt^{r-\lambda-1}}\Big(\frac{\partial H_1}{\partial x_k^{(r)}}\Big)-x_k^{(\lambda)}\frac{d^{r-\lambda-1}}{dt^{r-\lambda-1}}\Big(\frac{\partial H_1}{\partial y_k^{(r)}}\Big)\Big]\\ &\qquad+\sum_{\mu=1,2,\dots}\Big[\frac{\partial H_2}{\partial R_\mu}-\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial H_2}{\partial R'_\mu}\Big)+\cdots\\ &\qquad\qquad\cdots+(-1)^\nu\frac{d^\nu}{dt^\nu}\Big(\frac{\partial H_2}{\partial R_\mu^{(\nu)}}\Big)\Big]\sum_1^n{}_k\Big(y_k\frac{\partial R_\mu}{\partial x_k}-x_k\frac{\partial R_\mu}{\partial y_k}\Big)\\ &\qquad-\sum_1^n{}_k(y_kQ_k-x_kR_k)+\lambda_1\sum_1^n{}_k(y_kf_{1k}-x_k\varphi_{1k})+\cdots\\ &\qquad\qquad\cdots+\lambda_m\sum_1^n{}_k(y_kf_{mk}-x_k\varphi_{mk}) = 0\end{aligned}\right.$$

über, und wir finden somit als erweitertes Princip der Erhaltung der Flächen das nachfolgende Theorem:

Wenn das kinetische Potential von der Form ist

$$H = \omega(x_k^2+y_k^2,\ x_k'^2+y_k'^2,\ \dots,\ x_k^{(\nu)2}+y_k^{(\nu)2}) \\ +\Omega(t,\ R_1,\ R_1',\ \dots,\ R_1^{(\nu)},\ R_2,\ R_2',\ \dots,\ R_2^{(\nu)},\ \dots),$$

worin ω *und* Ω *beliebige Functionen der eingeschlossenen Grössen und von* $z_1,\ z_2,\ \dots,\ z_n$ *sind, und* $R_1,\ R_2,\ \dots$ *Functionen von*

$$t,\quad x_1,\ \dots,\ x_n,\quad y_1,\ \dots,\ y_n$$

bedeuten, für welche

$$\sum_1^n{}_k\Big(y_k\frac{\partial R_\mu}{\partial x_k}-x_k\frac{\partial R_\mu}{\partial y_k}\Big) = 0$$

ist, wenn ferner die äusseren Kräfte, sowie die Functionen $f_{\mu k},\ \varphi_{\mu k},\ \psi_{\mu k}$, *welche die Beschränkungen des Systemes definiren, den Bedingungen genügen*

$$\sum_1^n{}_k(y_kQ_k-x_kR_k)=0 \quad\text{und}\quad \sum_1^n{}_k(y_kf_{\mu k}-x_k\varphi_{\mu k})=0,$$

so erhält man als Integral der Bewegungsgleichungen (1.) *die Differentialgleichung* $(2\nu-1)$-*ter Ordnung*

$$\sum_1^n{}_k\sum_1^\nu{}_r(-1)^r\sum_0^{r-1}{}_\lambda(-1)^\lambda\Big\{y_k^{(\lambda)}\frac{d^{r-\lambda-1}}{dt^{r-\lambda-1}}\Big(\frac{\partial\omega}{\partial x_k^{(r)}}\Big)-x_k^{(\lambda)}\frac{d^{r-\lambda-1}}{dt^{r-\lambda-1}}\Big(\frac{\partial\omega}{\partial y_k^{(r)}}\Big)\Big\} = c,$$

worin c *eine Integrationsconstante bedeutet, oder, wenn*

$$x_k^{(r)2}+y_k^{(r)2} = u_{kr}$$

gesetzt wird,

$$\sum_1^n{}_k \sum_1^\nu{}_r (-1)^r \sum_0^{r-1}{}_\lambda (-1)^\lambda \Big\{ \frac{d^{r-\lambda-1}}{dt^{r-\lambda-1}} \Big(\frac{\partial \omega}{\partial u_{kr}}\Big) [y_k^{(\lambda)} x_k^{(r)} - x_k^{(\lambda)} y_k^{(r)}]$$

$$+ (r-\lambda-1) \frac{d^{r-\lambda-2}}{dt^{r-\lambda-2}} \Big(\frac{\partial \omega}{\partial u_{kr}}\Big) [y_k^{(\lambda)} x_k^{(r+1)} - x_k^{(\lambda)} y_k^{(r+1)}]$$

$$+ \cdots + \frac{\partial \omega}{\partial u_{kr}} [y_k^{(\lambda)} x_k^{(2r-\lambda-1)} - x_k^{(\lambda)} y_k^{(2r-\lambda-1)}] = C.$$

Ist

$$H_1 = \omega(x_k^2+y_k^2+z_k^2,\ x_k'^2+y_k'^2+z_k'^2,\ \ldots,\ x_k^{(\nu)2}+y_k^{(\nu)2}+z_k^{(\nu)2})$$

und sind die weiter oben angegebenen Bedingungen auch für eine Vertauschung der Coordinaten erfüllt, so ergeben sich noch die beiden anderen, dem eben aufgestellten analogen Integrale.

Es braucht kaum hervorgehoben zu werden, dass den geforderten Bedingungen Genüge geschieht, wenn es sich um die Bewegung eines freien Systems handelt, auf welches äussere Kräfte gar nicht einwirken, und für welches die Functionen R_1, R_2, ... die Entfernungen der einzelnen Punkte von einander bedeuten, da, wenn

$$R_\mu = (x_\varrho - x_\sigma)^2 + (y_\varrho - y_\sigma)^2 + (z_\varrho - z_\sigma)^2$$

ist, offenbar

$$\sum_1^n{}_k \Big(y_k \frac{\partial R_\mu}{\partial x_k} - x_k \frac{\partial R_\mu}{\partial y_k}\Big) = 0$$

wird.

Die drei bekannten Flächensätze ergeben sich wieder hieraus für die Annahme der gewöhnlichen Form des kinetischen Potentials.

IX.

Das erweiterte Princip von der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes.

Auch das Princip von der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes ist in einem weit allgemeineren Satze enthalten.

Unter der Voraussetzung, dass, wenn die Bedingungsgleichungen des Problems in endlicher Form gegeben sind, diese nur von den Differenzen gleichartiger Coordinaten abhängen sollen, also die virtuellen Verrückungen

$$\delta x_1 = \delta x_2 = \cdots = \delta x_n = p,$$
$$\delta y_1 = \delta y_2 = \cdots = \delta y_n = q,$$
$$\delta z_1 = \delta z_2 = \cdots = \delta z_n = r$$

gesetzt werden dürfen, worin p, q, r willkürliche Grössen bedeuten, oder

was dasselbe aussagt, dass in den integrabel vorausgesetzten Differentialgleichungen (II. 1.) die Functionen f, φ, ψ den Bedingungen unterliegen

$$\sum_1^n{}_\varrho f_{k\varrho} = 0, \quad \sum_1^n{}_\varrho \varphi_{k\varrho} = 0, \quad \sum_1^n{}_\varrho \psi_{k\varrho} = 0,$$

gehen aus den erweiterten *Lagrange*schen Gleichungen der ersten Form die Beziehungen hervor

$$(1.) \quad \begin{cases} \sum_1^n{}_k \frac{\partial H}{\partial x_k} - \frac{d}{dt}\sum_1^n{}_k \frac{\partial H}{\partial x'_k} + \cdots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\sum_1^n{}_k \frac{\partial H}{\partial x_k^{(\nu)}} - \sum_1^n{}_k Q_k = 0, \\ \sum_1^n{}_k \frac{\partial H}{\partial y_k} - \frac{d}{dt}\sum_1^n{}_k \frac{\partial H}{\partial y'_k} + \cdots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\sum_1^n{}_k \frac{\partial H}{\partial y_k^{(\nu)}} - \sum_1^n{}_k R_k = 0, \\ \sum_1^n{}_k \frac{\partial H}{\partial z_k} - \frac{d}{dt}\sum_1^n{}_k \frac{\partial H}{\partial z'_k} + \cdots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\sum_1^n{}_k \frac{\partial H}{\partial z_k^{(\nu)}} - \sum_1^n{}_k S_k = 0. \end{cases}$$

Wird weiter angenommen, dass das kinetische Potential wiederum die Form habe

$$H = \omega(x_k^2+y_k^2+z_k^2,\ x_k'^2+y_k'^2+z_k'^2,\ \ldots,\ x_k^{(\nu)2}+y_k^{(\nu)2}+z_k^{(\nu)2}) \\ +\Omega(t,\ R_1,\ R'_1,\ \ldots,\ R_1^{(\nu)},\ R_2,\ R'_2,\ \ldots,\ R_2^{(\nu)},\ \ldots),$$

dass ferner die Grössen R_1, R_2, ... nur von den Differenzen gleichartiger Coordinaten, also ihre Ableitungen nur von den Differenzen der Coordinaten und deren Ableitungen abhängen, dass somit

$$(2.) \quad \begin{cases} H = \omega(x_k^2+y_k^2+z_k^2,\ x_k'^2+y_k'^2+z_k'^2,\ \ldots,\ x_k^{(\nu)2}+y_k^{(\nu)2}+z_k^{(\nu)2}) \\ \quad +\omega_1(t,\ x_\varrho-x_\sigma,\ x'_\varrho-x'_\sigma,\ \ldots,\ x_\varrho^{(\nu)}-x_\sigma^{(\nu)},\ y_\varrho-y_\sigma,\ \ldots, \\ \qquad\qquad y_\varrho^{(\nu)}-y_\sigma^{(\nu)},\ z_\varrho-z_\sigma,\ \ldots,\ z_\varrho^{(\nu)}-z_\sigma^{(\nu)}), \end{cases}$$

so ist leicht zu sehen, dass, wenn

$$x_k^{(r)2}+y_k^{(r)2}+z_k^{(r)2} = u_{kr}$$

gesetzt wird,

$$\frac{\partial \omega}{\partial x_k^{(r)}} = 2\frac{\partial \omega}{\partial u_{kr}} x_k^{(r)}, \quad \frac{\partial \omega}{\partial y_k^{(r)}} = 2\frac{\partial \omega}{\partial u_{kr}} y_k^{(r)}, \quad \frac{\partial \omega}{\partial z_k^{(r)}} = 2\frac{\partial \omega}{\partial u_{kr}} z_k^{(r)},$$

und

$$\sum_1^n{}_k \frac{\partial \omega_1}{\partial x_k^{(r)}} = 0, \quad \sum_1^n{}_k \frac{\partial \omega_1}{\partial y_k^{(r)}} = 0, \quad \sum_1^n{}_k \frac{\partial \omega_1}{\partial z_k^{(r)}} = 0$$

ist, weil ω_1 als Function der $r$ten Ableitungen der Coordinaten in der Form geschrieben

$$\bar{\omega}(x_1^{(r)}-x_n^{(r)},\ x_2^{(r)}-x_n^{(r)},\ \ldots,\ x_{n-1}^{(r)}-x_n^{(r)},\ y_1^{(r)}-y_n^{(r)},\ \ldots,\ z_1^{(r)}-z_n^{(r)})$$

die Beziehungen liefert

$$\frac{\partial\bar{\omega}}{\partial x_1^{(r)}} = \frac{\partial\bar{\omega}}{\partial(x_1^{(r)}-x_n^{(r)})},\quad \frac{\partial\bar{\omega}}{\partial x_2^{(r)}} = \frac{\partial\bar{\omega}}{\partial(x_2^{(r)}-x_n^{(r)})},\quad \ldots,\quad \frac{\partial\bar{\omega}}{\partial x_{n-1}^{(r)}} = \frac{\partial\bar{\omega}}{\partial(x_{n-1}^{(r)}-x_n^{(r)})}$$

$$\frac{\partial\bar{\omega}}{\partial x_n^{(r)}} = -\frac{\partial\bar{\omega}}{\partial(x_1^{(r)}-x_n^{(r)})} - \frac{\partial\bar{\omega}}{\partial(x_2^{(r)}-x_n^{(r)})} - \cdots - \frac{\partial\bar{\omega}}{\partial(x_{n-1}^{(r)}-x_n^{(r)})}.$$

Unter den gemachten Annahmen gehen somit die Gleichungen (1.) in

$$\begin{aligned}
2\sum_1^n{}_k \frac{\partial\omega}{\partial u_{k0}} x_k - 2\frac{d}{dt}\sum_1^n{}_k \frac{\partial\omega}{\partial u_{k1}} x'_k + \cdots + (-1)^\nu 2\frac{d^\nu}{dt^\nu}\sum_1^n{}_k \frac{\partial\omega}{\partial u_{k\nu}} x_k^{(\nu)} - \sum_1^n{}_k Q_k &= 0,\\
2\sum_1^n{}_k \frac{\partial\omega}{\partial u_{k0}} y_k - 2\frac{d}{dt}\sum_1^n{}_k \frac{\partial\omega}{\partial u_{k1}} y'_k + \cdots + (-1)^\nu 2\frac{d^\nu}{dt^\nu}\sum_1^n{}_k \frac{\partial\omega}{\partial u_{k\nu}} y_k^{(\nu)} - \sum_1^n{}_k R_k &= 0,\\
2\sum_1^n{}_k \frac{\partial\omega}{\partial u_{k0}} z_k - 2\frac{d}{dt}\sum_1^n{}_k \frac{\partial\omega}{\partial u_{k1}} z'_k + \cdots + (-1)^\nu 2\frac{d^\nu}{dt^\nu}\sum_1^n{}_k \frac{\partial\omega}{\partial u_{k\nu}} z_k^{(\nu)} - \sum_1^n{}_k S_k &= 0
\end{aligned}$$

über und *nehmen daher, wenn ω nur linear von den Argumenten u_{kr} abhängt, also die Form hat*

$$(3.)\qquad \omega = \sum_1^n{}_k \sum_0^\nu{}_r a_{kr}(x_k^{(r)2} + y_k^{(r)2} + z_k^{(r)2}),$$

worin die a_{kr} Constanten bedeuten, die Gestalt an

$$(4.)\quad \begin{cases}
2\sum_1^n{}_k a_{k0}x_k - 2\sum_1^n{}_k a_{k1}x''_k + 2\sum_1^n{}_k a_{k2}x''''_k - \cdots + (-1)^\nu 2\sum_1^n{}_k a_{k\nu}x_k^{(2\nu)} - \sum_1^n{}_k Q_k = 0,\\
2\sum_1^n{}_k a_{k0}y_k - 2\sum_1^n{}_k a_{k1}y''_k + 2\sum_1^n{}_k a_{k2}y''''_k - \cdots + (-1)^\nu 2\sum_1^n{}_k a_{k\nu}y_k^{(2\nu)} - \sum_1^n{}_k R_k = 0,\\
2\sum_1^n{}_k a_{k0}z_k - 2\sum_1^n{}_k a_{k1}z''_k + 2\sum_1^n{}_k a_{k2}z''''_k - \cdots + (-1)^\nu 2\sum_1^n{}_k a_{k\nu}z_k^{(2\nu)} - \sum_1^n{}_k S_k = 0.
\end{cases}$$

Setzt man nun

$$(5.)\quad \begin{cases}
2(a_{1r}x_1 + a_{2r}x_2 + \cdots + a_{nr}x_n) = A_r,\quad 2(a_{1r}y_1 + \cdots + a_{nr}y_n) = B_r,\\
\qquad\qquad 2(a_{1r}z_1 + \cdots + a_{nr}z_n) = C_r,
\end{cases}$$

so gehen die Gleichungen (4.) *in*

$$(6.)\quad \begin{cases}
A_0 - A''_1 + A''''_2 - \cdots + (-1)^\nu A_\nu^{(2\nu)} - \sum_1^n{}_k Q_k = 0,\\
B_0 - B''_1 + B''''_2 - \cdots + (-1)^\nu B_\nu^{(2\nu)} - \sum_1^n{}_k R_k = 0,\\
C_0 - C''_1 + C''''_2 - \cdots + (-1)^\nu C_\nu^{(2\nu)} - \sum_1^n{}_k S_k = 0
\end{cases}$$

über, und diese drei Gleichungen kann man als das erweiterte Princip von der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes ansehen; setzt man

$$a_{1r} = -\frac{m_1}{2},\quad a_{2r} = -\frac{m_2}{2},\quad \ldots,\quad a_{nr} = -\frac{m_n}{2},$$

worin $m_1, m_2, \ldots, m_n$ die einzelnen Massen bedeuten, ferner

$$A_r = -MA, \quad B_r = -MB, \quad C_r = -MC,$$

wenn M die Gesammtmasse des Systemes ist, so gehen die Gleichungen (5.) in

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_n x_n = MA, \quad m_1 y_1 + \cdots + m_n y_n = MB, \quad m_1 z_1 + \cdots + m_n z_n = MC$$

über, es bedeuten somit A, B, C die Coordinaten des Schwerpunktes, und wir erhalten daher aus (2.), (3.), (6.) das nachfolgende Theorem:

Sind die Bedingungsgleichungen nur von den Differenzen gleichartiger Coordinaten abhängig und hat das kinetische Potential die Form

$$H = -\sum_1^n{}_k \frac{m_k}{2}\{x_k^2+y_k^2+z_k^2+x_k'^2+y_k'^2+z_k'^2+\cdots+x_k^{(\nu)^2}+y_k^{(\nu)^2}+z_k^{(\nu)^2}\}$$
$$+\omega_1(t,\ x_\varrho-x_\sigma,\ x'_\varrho-x'_\sigma,\ \ldots,\ x_\varrho^{(\nu)}-x_\sigma^{(\nu)},\ y_\varrho-y_\sigma,\ \ldots,\ y_\varrho^{(\nu)}-y_\sigma^{(\nu)},$$
$$z_\varrho-z_\sigma,\ \ldots,\ z_\varrho^{(\nu)}-z_\sigma^{(\nu)}),$$

so lauten die Differentialgleichungen der Bewegung des Schwerpunktes, dessen Coordinaten A, B, C sind,

$$(7.)\quad \begin{cases} M\{-A+A''-A''''+\cdots-(-1)^\nu A^{(2\nu)}\}-\sum_1^n{}_k Q_k = 0, \\ M\{-B+B''-B''''+\cdots-(-1)^\nu B^{(2\nu)}\}-\sum_1^n{}_k R_k = 0, \\ M\{-C+C''-C''''+\cdots-(-1)^\nu C^{(2\nu)}\}-\sum_1^n{}_k S_k = 0, \end{cases}$$

und es ist daher

$$(8.)\quad \bar{H} = -\frac{M}{2}\{A^2+B^2+C^2+A'^2+B'^2+C'^2+\cdots+A^{(\nu)^2}+B^{(\nu)^2}+C^{(\nu)^2}\}$$

das kinetische Potential der Bewegung des Schwerpunktes, wenn die Gesammtmasse in demselben vereinigt ist, und die äusseren Kraftcomponenten

$$\sum_1^n{}_k Q_k, \quad \sum_1^n{}_k R_k, \quad \sum_1^n{}_k S_k$$

an demselben wirken.

Hat das kinetische Potential die Gestalt

$$H = -\sum_1^n{}_k \frac{m_k}{2}(x_k^{(\delta)^2}+y_k^{(\delta)^2}+z_k^{(\delta)^2})$$
$$+\omega_1(t,\ x_\varrho-x_\sigma,\ \ldots,\ x_\varrho^{(\nu)}-x_\sigma^{(\nu)},\ y_\varrho-y_\sigma,\ \ldots,\ y_\varrho^{(\nu)}-y_\sigma^{(\nu)},\ z_\varrho-z_\sigma,\ \ldots,\ z_\varrho^{(\nu)}-z_\sigma^{(\nu)}),$$

ist also

$$a_{k0} = a_{k1} = \cdots = a_{k\delta-1} = a_{k\delta+1} = \cdots = a_{kn} = 0, \quad a_{k\delta} = -\frac{m_k}{2},$$

so werden nach (5.)

$$A_0 = A_1 = \cdots = A_{\delta-1} = A_{\delta+1} = \cdots = A_n = 0, \quad B_0 = \cdots = B_{\delta-1} = B_{\delta+1} = \cdots$$
$$= B_n = 0, \quad C_0 = \cdots = C_{\delta-1} = C_{\delta+1} = \cdots = C_n = 0,$$

und für $A_\delta = -MA$, $B_\delta = -MB$, $C_\delta = -MC$ die Grössen A, B, C wiederum die Coordinaten des Schwerpunktes, welche dann nach (6.) den Differentialgleichungen genügen

$$(9.) \quad \begin{cases} (-1)^{\delta+1} MA^{(2\delta)} - \sum_1^n k\, Q_k = 0, \quad (-1)^{\delta+1} MB^{(2\delta)} - \sum_1^n k\, R_k = 0, \\ (-1)^{\delta+1} MC^{(2\delta)} - \sum_1^n k\, S_k = 0, \end{cases}$$

so dass das kinetische Potential der Schwerpunktsbewegung durch

$$\bar{H} = -\frac{M}{2}(A^{(\delta)^2} + B^{(\delta)^2} + C^{(\delta)^2})$$

ausgedrückt ist; ist $\delta = 1$, so geht dieser specielle Fall in den bekannten Satz von der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes für die kinetischen Potentiale in der gewöhnlichen Form über.

X.

Untersuchung der Functionaleigenschaften der äusseren Kräfte P_s in den *Lagrange*schen Gleichungen der zweiten Form.

Ich gehe nun dazu über, die Eigenschaften der erweiterten *Lagrange*schen Ausdrücke der bewegenden Kräfte P_s als Functionen der Coordinaten und deren Ableitungen zu ermitteln und zu untersuchen, in wie weit die von *Helmholtz* in der oben genannten Arbeit aufgestellten Sätze über die Beziehungen zwischen diesen Kräften einerseits, den Beschleunigungen, Geschwindigkeiten und Coordinaten andererseits an die von ihm angenommene Form des kinetischen Potentials gebunden sind.

Aus der *Lagrange*schen Gleichung

$$(1.) \quad P_s = -\frac{\partial H}{\partial p_s} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial p'_s}\right) - \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial H}{\partial p''_s}\right) + \cdots - (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\right)$$

folgt zunächst *für den Zustand der Ruhe*

$$\frac{\partial P_s}{\partial p_\sigma} = \frac{\partial P_\sigma}{\partial p_s},$$

und *für den Fall der Bewegung allgemein,* wobei wir jedoch schon hier des Folgenden wegen die Voraussetzung machen wollen, dass H die Zeit t nicht explicite enthält, also das Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft gültig ist, P_s *als lineare Function der* 2ν*ten Ableitungen der Coordinaten von der Form*

$$(-1)^{\nu-1}P_s = \Pi_s + p_1^{(2\nu)}\frac{\partial^2 H}{\partial p_s^{(\nu)}\partial p_1^{(\nu)}} + p_2^{(2\nu)}\frac{\partial^2 H}{\partial p_s^{(\nu)}\partial p_2^{(\nu)}} + \cdots + p_\mu^{(2\nu)}\frac{\partial^2 H}{\partial p_s^{(\nu)}\partial p_\mu^{(\nu)}},$$

worin Π_s eine Function der Coordinaten und ihrer Ableitungen bis zur $(2\nu-1)$-ten Ordnung hin bedeutet, und *daraus ergiebt sich die Beziehung*

$$(2.)\qquad \frac{\partial P_s}{\partial p_\sigma^{(2\nu)}} = (-1)^{\nu-1}\frac{\partial^2 H}{\partial p_s^{(\nu)}\partial p_\sigma^{(\nu)}} = \frac{\partial P_\sigma}{\partial p_s^{(2\nu)}},$$

nach welcher, wenn $p_\sigma^{(2\nu)}$ die Kraft P_s um einen gewissen Betrag grösser macht, auch das gleich grosse $p_s^{(2\nu)}$ die Kraft P_σ um den gleichen Betrag grösser gestalten wird, ausser wenn $\frac{\partial^2 H}{\partial p_s^{(\nu)}\partial p_\sigma^{(\nu)}} = 0$ wird, in welchem Falle ein Einfluss von P_s auf p_σ und von P_σ auf p_s nicht statthat, und so wird, wenn

$$H = \varphi_1(p_1^{(\nu)}) + \varphi_2(p_2^{(\nu)}) + \cdots + \varphi_\mu(p_\mu^{(\nu)}),$$

worin die φ sämmtliche Coordinaten bis zur $(\nu-1)$-ten Ableitung hin enthalten dürfen, jede Kraft nur in der Richtung derjenigen Coordinate, auf die sie sich bezieht, beschleunigend wirken.

In der Gestalt (2.) gilt der Satz also auch für ein kinetisches Potential wie das des *Weber*schen Gesetzes, wobei $\nu = 1$, also die $p^{(2\nu)}$ die Beschleunigungen in gewöhnlichem Sinne sind.

Aber es gilt auch die von *Helmholtz* aufgestellte Beziehung zwischen den Kräften und Geschwindigkeiten ganz unabhängig von der Form des kinetischen Potentials, ebenso wie die Beziehung zwischen den Kräften und den Coordinaten selbst, und es soll im Folgenden gezeigt werden, dass alle diese Beziehungen nur der Ausfluss eines viel allgemeineren Satzes sind, welcher die Incremente der äusseren Kräfte mit den Incrementen beliebiger Ableitungen der Coordinaten in Verbindung setzt.

Bezeichnet man mit R eine Function von

$$p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_\mu,\ p_1',\ p_2',\ \ldots,\ p_\mu',\ \ldots,\ p_1^{(\nu)},\ p_2^{(\nu)},\ \ldots,\ p_\mu^{(\nu)},$$

so ist nach Gleichung (I. 1.) der ϱte nach t genommene Differentialquotient

$$(3.)\begin{cases} R^{(\varrho)} = \sum\limits_{\substack{n_1, n_2, \ldots, n_\varrho > 0 \\ (n_1+2n_2+\cdots+\varrho n_\varrho = \varrho)}} \dfrac{\varrho!}{n_1!n_2!\ldots n_\varrho!} \dfrac{1}{(1!)^{n_1}(2!)^{n_2}\ldots(\varrho!)^{n_\varrho}} \\ \Big(\dfrac{\partial R}{\partial p_1}p_1' + \dfrac{\partial R}{\partial p_2}p_2' + \cdots + \dfrac{\partial R}{\partial p_1'}p_1'' + \dfrac{\partial R}{\partial p_2'}p_2'' + \cdots \\ \qquad + \dfrac{\partial R}{\partial p_1^{(\nu)}}p_1^{(\nu+1)} + \dfrac{\partial R}{\partial p_2^{(\nu)}}p_2^{(\nu+1)} + \cdots\Big)^{n_1} \\ \Big(\dfrac{\partial R}{\partial p_1}p_1'' + \dfrac{\partial R}{\partial p_2}p_2'' + \cdots + \dfrac{\partial R}{\partial p_1'}p_1''' + \dfrac{\partial R}{\partial p_2'}p_2''' + \cdots \\ \qquad + \dfrac{\partial R}{\partial p_1^{(\nu)}}p_1^{(\nu+2)} + \dfrac{\partial R}{\partial p_2^{(\nu)}}p_2^{(\nu+2)} + \cdots\Big)^{n_2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Big(\dfrac{\partial R}{\partial p_1}p_1^{(\varrho)} + \dfrac{\partial R}{\partial p_2}p_2^{(\varrho)} + \cdots + \dfrac{\partial R}{\partial p_1'}p_1^{(\varrho+1)} + \dfrac{\partial R}{\partial p_2'}p_2^{(\varrho+1)} + \cdots \\ \qquad + \dfrac{\partial R}{\partial p_1^{(\nu)}}p_1^{(\nu+\varrho)} + \dfrac{\partial R}{\partial p_2^{(\nu)}}p_2^{(\nu+\varrho)} + \cdots\Big)^{n_\varrho}, \end{cases}$$

und hieraus folgt unmittelbar, dass in symbolischer Form genommen

$$\frac{\partial R^{(\nu)}}{\partial p_\sigma^{(2\nu-1)}} = \frac{\partial R}{\partial p_\sigma^{(\nu-1)}} + \nu \frac{\partial R}{\partial p_\sigma^{(\nu)}}\Big(\frac{\partial R}{\partial p_1}p_1' + \frac{\partial R}{\partial p_2}p_2' + \cdots + \frac{\partial R}{\partial p_1'}p_1'' + \cdots + \frac{\partial R}{\partial p_1^{(\nu)}}p_1^{(\nu+1)} + \cdots\Big)$$

ist oder dass

$$(4.)\qquad \frac{\partial R^{(\nu)}}{\partial p_\sigma^{(2\nu-1)}} = \frac{\partial R}{\partial p_\sigma^{(\nu-1)}} + \nu \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial R}{\partial p_\sigma^{(\nu)}}\Big),$$

ferner

$$(5.)\qquad \frac{\partial R^{(\nu-1)}}{\partial p_\sigma^{(2\nu-1)}} = \frac{\partial R}{\partial p_\sigma^{(\nu)}}.$$

Ist nun H das bisherige kinetische Potential, welches eine Function der Coordinaten und deren ν ersten Ableitungen ist, so enthalten in dem Ausdrucke (1.) der äusseren Kraft nur $\frac{d^\nu}{dt^\nu}\Big(\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\Big)$ und $\frac{d^{\nu-1}}{dt^{\nu-1}}\Big(\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu-1)}}\Big)$ die Ableitung $p_\sigma^{(2\nu-1)}$, und es ergeben somit die Gleichungen (4.) und (5.), wenn R durch $\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}$ und $\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu-1)}}$ ersetzt werden, die Beziehung

$$\frac{\partial P_s}{\partial p_\sigma^{(2\nu-1)}} = (-1)^{\nu+1}\frac{\partial^2 H}{\partial p_s^{(\nu)}\partial p_\sigma^{(\nu-1)}} + (-1)^{\nu+1}\nu\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial^2 H}{\partial p_s^{(\nu)}\partial p_\sigma^{(\nu)}}\Big) + (-1)^\nu\frac{\partial^2 H}{\partial p_s^{(\nu-1)}\partial p_\sigma^{(\nu)}},$$

und ebenso

$$\frac{\partial P_\sigma}{\partial p_s^{(2\nu-1)}} = (-1)^{\nu+1}\frac{\partial^2 H}{\partial p_\sigma^{(\nu)}\partial p_s^{(\nu-1)}} + (-1)^{\nu+1}\nu\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial^2 H}{\partial p_\sigma^{(\nu)}\partial p_s^{(\nu)}}\Big) + (-1)^\nu\frac{\partial^2 H}{\partial p_\sigma^{(\nu-1)}\partial p_s^{(\nu)}},$$

woraus sich die von Helmholtz aufgestellte Beziehung zwischen den Kräften und Geschwindigkeiten ganz unabhängig von der Form des kinetischen Potentials in der Gestalt ergiebt

$$(6.)\quad \frac{\partial P_s}{\partial p_\sigma^{(2\nu-1)}} - \frac{\partial P_\sigma}{\partial p_s^{(2\nu-1)}} = (-1)^{\nu+1} 2 \left\{ \frac{\partial^2 H}{\partial p_s^{(\nu)} \partial p_\sigma^{(\nu-1)}} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_\sigma^{(\nu)} \partial p_s^{(\nu-1)}} \right\}$$

und

$$(7.)\quad \frac{\partial P_s}{\partial p_\sigma^{(2\nu-1)}} + \frac{\partial P_\sigma}{\partial p_s^{(2\nu-1)}} = (-1)^{\nu+1} 2\nu \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_s^{(\nu)} \partial p_\sigma^{(\nu)}} \right),$$

oder nach (2.):

$$(8.)\quad \frac{\partial P_s}{\partial p_\sigma^{(2\nu-1)}} + \frac{\partial P_\sigma}{\partial p_s^{(2\nu-1)}} = 2\nu \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial P_s}{\partial p_\sigma^{(2\nu)}} \right) = 2\nu \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial P_\sigma}{\partial p_s^{(2\nu)}} \right),$$

welcher Gleichung also auch allgemein die für die specielle Form von H durch *Helmholtz* bekannte Deutung gegeben werden kann.

Ebenso folgt aus (3.) unmittelbar

$$\frac{\partial R^{(\nu)}}{\partial p_\sigma^{(2\nu-2)}} = \frac{\partial R}{\partial p_\sigma^{(\nu-2)}} + \nu \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial p_\sigma^{(\nu-1)}} \right) + \frac{\nu(\nu-1)}{1.2} \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial R}{\partial p_\sigma^{(\nu)}} \right),$$

$$\frac{\partial R^{(\nu-1)}}{\partial p_\sigma^{(2\nu-2)}} = \frac{\partial R}{\partial p_\sigma^{(\nu-1)}} + (\nu-1) \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial p_\sigma^{(\nu)}} \right),$$

$$\frac{\partial R^{(\nu-2)}}{\partial p_\sigma^{(2\nu-2)}} = \frac{\partial R}{\partial p_\sigma^{(\nu)}},$$

und somit, da $p_\sigma^{(2\nu-2)}$ nur in $R^{(\nu)}$, $R^{(\nu-1)}$, $R^{(\nu-2)}$ vorkommt, wenn R durch $\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}$, $\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu-1)}}$, $\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu-2)}}$ ersetzt wird,

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_s}{\partial p_\sigma^{(2\nu-2)}} = {} & (-1)^{\nu+1} \left\{ \frac{\partial^2 H}{\partial p_s^{(\nu)} \partial p_\sigma^{(\nu-2)}} + \nu \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_s^{(\nu)} \partial p_\sigma^{(\nu-1)}} \right) \right. \\ & \left. + \frac{\nu(\nu-1)}{1.2} \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_s^{(\nu)} \partial p_\sigma^{(\nu)}} \right) \right\} \\ & + (-1)^{\nu} \left\{ \frac{\partial^2 H}{\partial p_s^{(\nu-1)} \partial p_\sigma^{(\nu-1)}} + (\nu-1) \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_s^{(\nu-1)} \partial p_\sigma^{(\nu)}} \right) \right\} + (-1)^{\nu-1} \frac{\partial^2 H}{\partial p_s^{(\nu-2)} \partial p_\sigma^{(\nu)}}, \end{aligned}$$

und *daraus wieder die Verallgemeinerung der von Helmholtz zwischen den Kräften und Coordinaten aufgestellten Beziehung*

$$(9.)\quad \frac{\partial P_s}{\partial p_\sigma^{(2\nu-2)}} - \frac{\partial P_\sigma}{\partial p_s^{(2\nu-2)}} = (-1)^{\nu+1} (2\nu-1) \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial^2 H}{\partial p_s^{(\nu)} \partial p_\sigma^{(\nu-1)}} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_\sigma^{(\nu)} \partial p_s^{(\nu-1)}} \right\}$$

oder vermöge (6.)

$$(10.)\quad \frac{\partial P_s}{\partial p_\sigma^{(2\nu-2)}} - \frac{\partial P_\sigma}{\partial p_s^{(2\nu-2)}} = \frac{2\nu-1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial P_s}{\partial p_\sigma^{(2\nu-1)}} - \frac{\partial P_\sigma}{\partial p_s^{(2\nu-1)}} \right\},$$

und ähnlich all die weiteren Beziehungen zwischen den Incrementen der Kräfte und denen der niedrigeren Ableitungen der Coordinaten. *Von Interesse ist noch die Beziehung zwischen den Kräften und den Coordinaten für den allgemeinen Fall, dass das kinetische Potential von eben diesen und deren Ableitungen bis zur νten Ordnung hin abhängt;* aus Gleichung (3.) folgt nämlich, dass

$$\frac{\partial P_s}{\partial p_\sigma} = -\frac{\partial\left(\frac{\partial H}{\partial p_\sigma}\right)}{\partial p_s} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\left(\frac{\partial H}{\partial p_\sigma}\right)}{\partial p'_s}\right) - \cdots - (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\left(\frac{\partial\left(\frac{\partial H}{\partial p_\sigma}\right)}{\partial p_s^{(\nu)}}\right)$$

ist, und somit

$$(11.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial P_s}{\partial p_\sigma} - \dfrac{\partial P_\sigma}{\partial p_s} = \dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{\partial\left(\frac{\partial H}{\partial p_\sigma}\right)}{\partial p'_s} - \dfrac{\partial\left(\frac{\partial H}{\partial p_s}\right)}{\partial p'_\sigma}\right] \\ \qquad - \dfrac{d^2}{dt^2}\left[\dfrac{\partial\left(\frac{\partial H}{\partial p_\sigma}\right)}{\partial p''_s} - \dfrac{\partial\left(\frac{\partial H}{\partial p_s}\right)}{\partial p''_\sigma}\right] + \cdots - (-1)^\nu \dfrac{d^\nu}{dt^\nu}\left[\dfrac{\partial\left(\frac{\partial H}{\partial p_\sigma}\right)}{\partial p_s^{(\nu)}} - \dfrac{\partial\left(\frac{\partial H}{\partial p_s}\right)}{\partial p_\sigma^{(\nu)}}\right]. \end{cases}$$

Nachdem wir nunmehr festgestellt haben, dass die von *Helmholtz* aufgestellten Sätze, denen er eine wichtige mechanische und physikalische Deutung gegeben, nichts mit der Natur des kinetischen Potentials, nur von den ersten Ableitungen der Coordinaten abzuhängen, zu thun haben, gehen wir an die Prüfung des von ihm für kinetische Potentiale, welche nur die ersten Ableitungen der Coordinaten enthalten, ohne Beweis ausgesprochenen Satzes, *dass, wenn die Lagrangeschen Ausdrücke der bewegenden Kräfte P_s, solche in den zweiten Ableitungen der Coordinaten lineare Functionen der p, p', p'' sind, welche den drei Bedingungsgleichungen genügen*

$$(12.)\quad \frac{\partial P_s}{\partial p''_\sigma} = \frac{\partial P_\sigma}{\partial p''_s},$$

$$(13.)\quad \frac{\partial P_s}{\partial p'_\sigma} + \frac{\partial P_\sigma}{\partial p'_s} = 2\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial P_\sigma}{\partial p''_s}\right),$$

$$(14.)\quad \frac{\partial P_s}{\partial p_\sigma} - \frac{\partial P_\sigma}{\partial p_s} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial P_s}{\partial p'_\sigma} - \frac{\partial P_\sigma}{\partial p'_s}\right\},$$

dann stets ein kinetisches Potential existirt, dass ferner die Kräfte P_s in der von Lagrange angegebenen Weise durch die Differentialquotienten desselben ausgedrückt und die Bewegungsgleichungen auf das Princip der kleinsten Wirkung reducirt werden können. *Helmholtz* erklärt den Beweis dieses Satzes zunächst nur für den Fall von drei Coordinaten p_s, und zwar auf die Theorie

der Potentialfunctionen im Raume von drei Dimensionen gestützt, liefern zu können. Ich will im Folgenden einen rein analytischen Beweis andeuten, den ich hier für kinetische Potentiale, welche nur die ersten Ableitungen der Coordinaten enthalten sollen und nur für den Fall von zwei Coordinaten durchführe, dessen Gültigkeit jedoch für beliebig viele Coordinaten und, wie aus den früher aufgestellten Relationen für die äusseren Kräfte ersichtlich, mit Zugrundelegung dieser auch für kinetische Potentiale in der oben erweiterten ganz allgemeinen Form einleuchtet; und zwar ***soll nicht bloss der Existenzbeweis geführt, sondern die analytische Form des kinetischen Potentials aufgestellt werden.***

Da der Annahme nach für $s = 1$ und 2

$$(15.)\quad P_s = f_{0s}(p_1, p_2, p_1', p_2') + f_{1s}(p_1, p_2, p_1', p_2')p_1'' + f_{2s}(p_1, p_2, p_1', p_2')p_2''$$

ist, so liefern die Gleichungen (12.), (13.), (14.) für die Coefficienten von P_s die Bedingungsgleichungen

$$(16.)\quad \begin{cases} f_{21} = f_{12}, \\ \dfrac{\partial f_{11}}{\partial p_2'} = \dfrac{\partial f_{12}}{\partial p_1'}, \quad \dfrac{\partial f_{12}}{\partial p_2'} = \dfrac{\partial f_{22}}{\partial p_1'}, \end{cases}$$

$$(17.)\quad \frac{\partial f_{01}}{\partial p_1'} = \frac{\partial f_{11}}{\partial p_1} p_1' + \frac{\partial f_{11}}{\partial p_2} p_2', \quad \frac{\partial f_{02}}{\partial p_2'} = \frac{\partial f_{22}}{\partial p_1} p_1' + \frac{\partial f_{22}}{\partial p_2} p_2' \text{*)},$$

$$(18.)\quad \frac{\partial f_{01}}{\partial p_2'} + \frac{\partial f_{02}}{\partial p_1'} = 2\left(p_1' \frac{\partial f_{12}}{\partial p_1} + p_2' \frac{\partial f_{12}}{\partial p_2}\right),$$

$$(19.)\quad \frac{\partial f_{11}}{\partial p_2} - \frac{\partial f_{12}}{\partial p_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f_{01}}{\partial p_2' \partial p_1'} - \frac{\partial^2 f_{02}}{\partial p_1' \partial p_1'}\right),$$

$$(20.)\quad \frac{\partial f_{21}}{\partial p_2} - \frac{\partial f_{22}}{\partial p_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f_{01}}{\partial p_2' \partial p_2'} - \frac{\partial^2 f_{02}}{\partial p_1' \partial p_2'}\right),$$

$$(21.)\quad \frac{\partial f_{01}}{\partial p_2} - \frac{\partial f_{02}}{\partial p_1} = \frac{1}{2}\left(p_1' \frac{\partial^2 f_{01}}{\partial p_2' \partial p_1} + p_2' \frac{\partial^2 f_{01}}{\partial p_2' \partial p_2} - p_1' \frac{\partial^2 f_{02}}{\partial p_1' \partial p_1} - p_2' \frac{\partial^2 f_{02}}{\partial p_1' \partial p_2}\right),$$

und es soll nunmehr gezeigt werden, dass sich eine von t freie Function H

---

*) Die Gleichungen (17.), welche für $s = \sigma$ aus (13.) hervorgehen, waren, wie *A. Mayer* in seiner Arbeit „Die Existenzbedingungen eines kinetischen Potentials" (Berichte der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, 7. December 1896) bemerkt, in meiner Veröffentlichung (Berl. Akad. 30. Juli 1896) aus Versehen weggeblieben. Es mag hier noch ausdrücklich auf den von *Mayer* gegebenen Beweis des oben ausgesprochenen Satzes aufmerksam gemacht werden, der für $\nu = 1$ und beliebige n geführt ist und ausserdem das explicite Eintreten der Zeit in die Ausdrücke für die P gestattet; zugleich mag noch einer Andeutung in Betreff einer anderen Herleitung der von mir in der Einleitung aufgestellten Beziehungen Erwähnung geschehen.

der Grössen p_1, p_2, p'_1, p'_2 *finden lässt, welche den beiden Differentialgleichungen genügt*

$$P_1 = -\frac{\partial H}{\partial p_1} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial p'_1}\right) = -\frac{\partial H}{\partial p_1} + \frac{\partial^2 H}{\partial p'_1 \partial p_1} p'_1 + \frac{\partial^2 H}{\partial p'_1 \partial p_2} p'_2 + \frac{\partial^2 H}{\partial p'_1 \partial p'_1} p''_1 + \frac{\partial^2 H}{\partial p'_1 \partial p'_2} p''_2,$$

$$P_2 = -\frac{\partial H}{\partial p_2} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial p'_2}\right) = -\frac{\partial H}{\partial p_2} + \frac{\partial^2 H}{\partial p'_2 \partial p_1} p'_1 + \frac{\partial^2 H}{\partial p'_2 \partial p_2} p'_2 + \frac{\partial^2 H}{\partial p'_1 \partial p'_1} p''_1 + \frac{\partial^2 H}{\partial p'_2 \partial p'_2} p''_2,$$

oder nach (15.) *den Beziehungen*

$$(22.) \qquad \frac{\partial^2 H}{\partial p'_1 \partial p'_1} = f_{11}, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial p'_1 \partial p'_2} = f_{21} = f_{12}, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial p'_2 \partial p'_2} = f_{22},$$

$$(23.) \qquad \begin{cases} -\dfrac{\partial H}{\partial p_1} + \dfrac{\partial^2 H}{\partial p'_1 \partial p_1} p'_1 + \dfrac{\partial^2 H}{\partial p'_1 \partial p_2} p'_2 = f_{01}, \\ -\dfrac{\partial H}{\partial p_2} + \dfrac{\partial^2 H}{\partial p'_2 \partial p_1} p'_1 + \dfrac{\partial^2 H}{\partial p'_2 \partial p_2} p'_2 = f_{02}. \end{cases}$$

Nun folgt aber aus (16.) und (22.), wie leicht zu sehen, wenn

$$H_1 = \int f_{11} dp'_1 + \int \left[f_{21} - \int \frac{\partial f_{11}}{\partial p'_2} dp'_1 \right] dp'_2$$

und

$$H_2 = \int f_{22} dp'_2 + \int \left[f_{21} - \int \frac{\partial f_{22}}{\partial p'_1} dp'_2 \right] dp'_1$$

gesetzt wird,

$$H = \int H_1 dp'_1 + \int \left[H_2 - \int \frac{\partial H_1}{\partial p'_2} dp'_1 \right] dp'_2 + \omega_1 p'_1 + \omega_2 p'_2 + \omega,$$

worin die Functionen ω_1, ω_2, ω als reine Functionen von p_1 und p_2 so zu bestimmen sind, dass den Gleichungen (23.) Genüge geschieht, oder dass, wenn

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial p_2} - \frac{\partial \omega_2}{\partial p_1} = \Omega$$

gesetzt wird,

$$(24.) \qquad -\int \frac{\partial H_1}{\partial p_1} dp'_1 - \int \left[\frac{\partial H_2}{\partial p_1} - \int \frac{\partial^2 H_1}{\partial p_1 \partial p'_2} dp'_1 \right] dp'_2 + p'_1 \frac{\partial H_1}{\partial p_1} + p'_2 \frac{\partial H_1}{\partial p_2}$$
$$+ p'_2 \Omega - \frac{\partial \omega}{\partial p_1} = f_{01},$$

$$(25.) \qquad -\int \frac{\partial H_1}{\partial p_2} dp'_1 - \int \left[\frac{\partial H_2}{\partial p_2} - \int \frac{\partial^2 H_1}{\partial p_2 \partial p'_2} dp'_1 \right] dp'_2 + p'_1 \frac{\partial H_2}{\partial p_1} + p'_2 \frac{\partial H_2}{\partial p_2}$$
$$- p'_1 \Omega - \frac{\partial \omega}{\partial p_2} = f_{02}$$

wird; die Frage ist nun, ob, wenn nunmehr noch verlangt wird, dass auch die Gleichungen (17.)—(21.) erfüllt werden, sich Ω und ω aus den Glei-

chungen (24.) und (25.) in der That als reine Functionen von p_1 und p_2 ergeben. Setzen wir die Werthe von f_{01} und f_{02} aus den letzten Gleichungen in die Beziehungen (18.)—(21.) ein, so werden für Ω und ω, die wir zunächst noch als Functionen von p_1, p_2, p'_1, p'_2 betrachten, wenn wir zur Abkürzung

$$(26.)\qquad p'_2\Omega-\frac{\partial\omega}{\partial p_1}=M,\quad p'_1\Omega+\frac{\partial\omega}{\partial p_2}=N$$

setzen, welche Grössen sich eindeutig aus den Gleichungen (24.) und (25.) bestimmen, durch eine leichte Rechnung die Beziehungen folgen

$$(27.)\qquad \frac{\partial M}{\partial p'_2}-\frac{\partial N}{\partial p'_1}=0,\quad \frac{\partial}{\partial p'_1}\left(\frac{\partial M}{\partial p'_2}+\frac{\partial N}{\partial p'_1}\right)=0,\quad \frac{\partial}{\partial p'_2}\left(\frac{\partial M}{\partial p'_2}+\frac{\partial N}{\partial p'_1}\right)=0,$$

$$(28.)\qquad \frac{\partial M}{\partial p_2}+\frac{\partial N}{\partial p_1}=\frac{1}{2}\left[p'_1\frac{\partial^2 M}{\partial p'_2\partial p_1}+p'_2\frac{\partial^2 M}{\partial p'_2\partial p_2}+p'_1\frac{\partial^2 N}{\partial p'_1\partial p_1}+p'_2\frac{\partial^2 N}{\partial p'_1\partial p_2}\right],$$

und da sich aus (27.)

$$\frac{\partial M}{\partial p'_2}=\varphi(p_1,\ p_2),\quad \frac{\partial N}{\partial p'_1}=\varphi(p_1,\ p_2)$$

ergiebt, worin φ eine noch zu bestimmende reine Function von p_1 und p_2 bedeutet, so werden nur die Functionen

$$\varphi(p_1,\ p_2),\quad \psi(p'_1,\ p_1,\ p_2),\quad \chi(p'_2,\ p_1,\ p_2)$$

so zu bestimmen sein, dass die Werthe

$$(29.)\qquad M=p'_2\varphi(p_1,\ p_2)+\psi(p'_1,\ p_1,\ p_2),\quad N=p'_1\varphi(p_1,\ p_2)+\chi(p'_2,\ p_1,\ p_2)$$

die Gleichung (28.) befriedigen, also

$$\frac{\partial\psi(p'_1,\ p_1,\ p_2)}{\partial p_2}=-\frac{\partial\chi(p'_2,\ p_1,\ p_2)}{\partial p_1}$$

ist. Da sich nun hieraus, wenn $R(p_1,\ p_2)$ eine reine Function von p_1 und p_2 bedeutet,

$$\psi(p'_1,\ p_1,\ p_2)=\int R(p_1,\ p_2)dp_2+R_1(p_1,\ p_1),$$

$$\chi(p'_2,\ p_1,\ p_2)=-\int R(p_1,\ p_2)dp_1+R_2(p'_2,\ p_2)$$

ergiebt, so folgt aus (29.):

$$M=p'_2\varphi(p_1,\ p_2)+\int R(p_1,\ p_2)dp_2+R_1(p'_1,\ p_1),$$

$$N=p'_1\varphi(p_1,\ p_2)-\int R(p_1,\ p_2)dp_1+R_2(p'_2,\ p_2),$$

und sonach aus (26.):

$$(30.)\quad \begin{cases} p_2'\Omega - \dfrac{\partial\omega}{\partial p_1} = p_2'\varphi(p_1,\ p_2) + \int R(p_1,\ p_2)dp_2 + R_1(p_1',\ p_1), \\ p_1'\Omega + \dfrac{\partial\omega}{\partial p_2} = p_1'\varphi(p_1,\ p_2) - \int R(p_1,\ p_2)dp_1 + R_2(p_2',\ p_2). \end{cases}$$

Um nun zu zeigen, dass sich Ω und ω als reine Functionen von p_1 und p_2 bestimmen, differentiire man die erste der Gleichungen (30.) partiell nach p_2, die zweite nach p_1 und addire, so folgt

$$p_2'\frac{\partial\Omega}{\partial p_2} + p_1'\frac{\partial\Omega}{\partial p_1} = p_2'\frac{\partial\varphi}{\partial p_2} + p_1'\frac{\partial\varphi}{\partial p_1}$$

und somit

$$\Omega = \varphi(p_1,\ p_2) + c,$$

also eine reine Function von p_1, p_2, woraus sich dann auch ω als eine ebensolche Function ergiebt, indem nach (30.)

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial p_1\partial p_1'} = \frac{\partial R_1(p_1',\ p_1)}{\partial p_1'},\quad \frac{\partial^2\omega}{\partial p_2\partial p_2'} = \frac{\partial R_2(p_2',\ p_2)}{\partial p_2'}$$

ist, und wie durch Differentiation der Gleichungen (24.) und (25.) ersichtlich, mit Benutzung der oben gefundenen Ausdrücke für H_1 und H_2 und der Beziehung (17.)

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial p_1\partial p_1'} = \frac{\partial^2\omega}{\partial p_2\partial p_2'} = 0$$

folgt.

XI.

Analytische Transformationen des kinetischen Potentials; verborgene Bewegung und unvollständige Probleme.

Helmholtz hat in seiner Arbeit „Ueber die physikalische Bedeutung des Princips der kleinsten Wirkung" zwei Fälle von Bewegungsgleichungen hervorgehoben, in denen eine wesentliche Verminderung in der Anzahl der Coordinaten eintritt, und zwar nicht dadurch, dass wie gewöhnlich die Bewegungsfreiheit des Systems durch feste Verbindungen eingeschränkt ist, die sich durch Gleichungen zwischen den Coordinaten ausdrücken, sondern durch die specielle Eigenschaft des kinetischen Potentials und die Natur der ***Lagrange***schen Bewegungsgleichungen. Zunächst nimmt er an, dass das kinetische Potential

$$H = -T-U,$$

worin T die lebendige Kraft und U die Kräftefunction bedeutet, von einer

Anzahl der von einander unabhängigen Coordinaten $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$ frei ist, so dass, wenn diese — um gleich hier Bezeichnungen zu gebrauchen, die ich im Folgenden beibehalte — mit $p_1, p_2, \ldots, p_\varrho$ bezeichnet werden, die zugehörigen *Lagrange*schen Gleichungen

$$-\frac{\partial H}{\partial p_r}+\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p'_r} = P_r,$$

wenn ausserdem $P_r = 0$ angenommen wird, in

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p'_r} = 0 \qquad (r=1,2,\ldots,\varrho)$$

übergehen, während sich die anderen Bewegungsgleichungen in der Form

$$-\frac{\partial H}{\partial \mathfrak{p}_s}+\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial \mathfrak{p}'_s} = \mathfrak{P}_s \qquad (s=1,2,\ldots,\sigma)$$

darstellen, wenn

$$\mathfrak{p}_s = p_{\varrho+s}, \quad \mathfrak{P}_r = P_{\varrho+\sigma}, \quad \varrho+\sigma=\mu$$

ist. *Helmholtz* zeigt nun, dass, wenn aus den ϱ Gleichungen

$$\frac{\partial H}{\partial p'_r} = c_r,$$

worin die Grössen c_r Integrationsconstanten bedeuten, $p'_1, p'_2, \ldots, p'_\varrho$ durch $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\sigma, \mathfrak{p}'_1, \ldots, \mathfrak{p}'_\sigma$ ausgedrückt und in die anderen Bewegungsgleichungen eingesetzt werden, diese letzteren, von den p_r und p'_r frei, wenn

$$\mathfrak{H} = (H)-c_1(p'_1)-c_2(p'_2)-\cdots-c_\varrho(p'_\varrho)$$

gesetzt wird, worin die eingeklammerten Grössen die Werthe nach Vollzug der Substitution bedeuten sollen, in

$$-\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \mathfrak{p}_s}+\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \mathfrak{p}'_s} = \mathfrak{P}_s \qquad (s=1,2,\ldots,\sigma)$$

übergehen, also die *Lagrange*sche Form und somit auch die Gültigkeit des *Hamilton*schen Princips erhalten bleibt. Aber das kinetische Potential $\mathfrak{H}$ wird jetzt, da die Substitutionsgleichungen die Grössen p'_r und $\mathfrak{p}'_s$ in der ersten Dimension enthalten, in den $\mathfrak{p}'_s$ nicht bloss von der zweiten Dimension sein, sondern auch Glieder ersten Grades einschliessen — und „dieser in der Mechanik wägbarer Körper gegebenen Analogie gemäss" nennt *Helmholtz* auch andere Fälle physikalischer Vorgänge, in denen das kinetische Potential auch Glieder, die nach den Geschwindigkeiten linear sind, enthält, *Fälle mit verborgener Bewegung*, um anzudeuten — und dies ist eigentlich der von *Hertz* seiner Mechanik zu Grunde gelegte Gedanke — dass

diese physikalischen Vorgänge zu Stande kommen können als Bewegungen wägbarer Körper, von denen einige nicht sichtbar sind und deren Einfluss dem algebraischen Eliminationsprocesse entspricht.

Ferner betrachtet *Helmholtz* noch einen Fall, welcher die Eliminationsbedingungen der monocyklischen Systeme in sich schliesst, nämlich denjenigen, in dem wieder die äusseren Kräfte P_r dauernd gleich Null sind, und im kinetischen Potential die ersten Ableitungen der Coordinaten p_r in der zweiten Dimension nur mit einander multiplicirt vorkommen, also

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p'_r \partial \mathfrak{p}'_s} = 0$$

ist; unter diesen Umständen sind Bewegungen des Systems möglich, bei denen

$$p_1 = c_1, \quad p_2 = c_2, \quad \ldots, \quad p_\varrho = c_\varrho$$

ist, worin $c_1, c_2, \ldots, c_\varrho$ Constanten bedeuten, also alle $p'_r = 0$ sind, und die Bewegungsgleichungen für diese Klasse von Bewegungen vereinfachen sich dadurch, dass dann auch alle

$$\frac{\partial H}{\partial p'_r} = 0$$

werden. Die ersten ϱ *Lagrange*schen Gleichungen nehmen dann die Form an

$$\frac{\partial H}{\partial p_r} = 0,$$

aus denen die p_r als Functionen der $\mathfrak{p}_s$ und $\mathfrak{p}'_s$ ausgerechnet und in das kinetische Potential eingesetzt, das dann mit $(H) = \mathfrak{H}$ bezeichnet werden möge, die weiteren σ Bewegungsgleichungen in die Form überführen

$$-\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \mathfrak{p}_s} + \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \mathfrak{p}'_s} = \mathfrak{P}_s,$$

worin das kinetische Potential je nach der Beschaffenheit von H in Bezug auf die p_r eine beliebig complicirte Function der $\mathfrak{p}'_s$ darstellen wird, und solche Probleme bezeichnet *Helmholtz* in der Mechanik wägbarer Massen als *unvollständige Probleme.*

Die beiden in Betracht gezogenen Fälle lassen sich dahin zusammenfassen, dass die zugehörigen *Lagrange*schen Gleichungen

$$-\frac{\partial H}{\partial p_r} + \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p'_r} = 0$$

in die beiden einfachsten Annahmen

$$\frac{\partial H}{\partial p_r} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial H}{\partial p'_r} = c_r$$

zerfallen.

Ich will nun das Eliminationsproblem der Coordinaten zwischen den *Lagrange*schen Bewegungsgleichungen ganz allgemein auch für die von mir erweiterten *Lagrange*schen Formen angreifen, jedoch der Einfachheit der Darstellung wegen die Annahme machen, dass das kinetische Potential H nur von den Coordinaten und deren ersten Ableitungen abhänge, im Uebrigen aber eine willkürliche, von der Zeit freie Function dieser Grössen ist; die Ausdehnung auf den Fall, dass das kinetische Potential die Ableitungen der Coordinaten in beliebig hoher Ordnung enthält, wird unmittelbar ersichtlich sein.

Suchen wir zunächst die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass die linken Seiten der ersten ϱ *Lagrange*schen Bewegungsgleichungen sich als vollständige nach der Zeit genommene Differentialquotienten einer Function der Coordinaten und deren Ableitungen darstellen lassen, dass also

$$-\frac{\partial H}{\partial p_r}+\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p'_r}=\frac{dK_r}{dt} \quad \text{oder} \quad -\frac{\partial H}{\partial p_r}=\frac{d}{dt}\left\{K_r-\frac{\partial H}{\partial p'_r}\right\}$$

ist, so wird

$$K_r-\frac{\partial H}{\partial p'_r} = -\omega_r(p_1, \ldots, p_\varrho, \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\sigma),$$

da $\frac{\partial H}{\partial p_r}$ die zweiten Ableitungen der Coordinaten nicht enthält, von den ersten Ableitungen derselben frei sein müssen, und somit $\frac{\partial H}{\partial p_r}$ als totaler nach t genommener Differentialquotient einer reinen Function der Coordinaten eine lineare Function der ersten Ableitungen derselben von der Form sein

$$(1.)\qquad \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{\partial \omega_r}{\partial p_1}p'_1+\cdots+\frac{\partial \omega_r}{\partial p_\varrho}p'_\varrho+\frac{\partial \omega_r}{\partial \mathfrak{p}_1}\mathfrak{p}'_1+\cdots+\frac{\partial \omega_r}{\partial \mathfrak{p}_\sigma}\mathfrak{p}'_\sigma,$$

woraus sich unmittelbar, wenn r_1 und r_2 zwei Zahlen aus der Reihe $1, 2, \ldots, \varrho$ bedeuten,

$$(2.)\qquad \frac{\partial^2 \omega_{r_1}}{\partial p_{r_2}\partial p_r} = \frac{\partial^2 \omega_{r_2}}{\partial p_{r_1}\partial p_r}, \quad \frac{\partial^2 \omega_{r_1}}{\partial p_{r_2}\partial \mathfrak{p}_s} = \frac{\partial^2 \omega_{r_2}}{\partial p_{r_1}\partial \mathfrak{p}_s}$$

also

$$(3.)\qquad \frac{\partial \omega_{r_1}}{\partial p_{r_2}} = \frac{\partial \omega_{r_2}}{\partial p_{r_1}}+c_{r_1 r_2}$$

ergiebt, worin $c_{r_1 r_2}$ Constanten bedeuten, für welche $c_{r_2 r_1} = -c_{r_1 r_2}$ ist.

Multiplicirt man nun die Gleichung (1.) mit dp_r und addirt die so erhaltenen Gleichungen für $r = 1, 2, \ldots, \varrho$, so folgt

$$\frac{\partial H}{\partial p_1}dp_1 + \frac{\partial H}{\partial p_2}dp_2 + \cdots + \frac{\partial H}{\partial p_\varrho}dp_\varrho$$
$$= p_1'\left\{\frac{\partial \omega_1}{\partial p_1}dp_1 + \cdots + \frac{\partial \omega_\varrho}{\partial p_1}dp_\varrho\right\} + \cdots + p_\varrho'\left\{\frac{\partial \omega_1}{\partial p_\varrho}dp_1 + \cdots + \frac{\partial \omega_\varrho}{\partial p_\varrho}dp_\varrho\right\}$$
$$+\mathfrak{p}_1'\left\{\frac{\partial \omega_1}{\partial \mathfrak{p}_1}dp_1 + \cdots + \frac{\partial \omega_\varrho}{\partial \mathfrak{p}_1}dp_\varrho\right\} + \cdots + \mathfrak{p}_\sigma'\left\{\frac{\partial \omega_1}{\partial \mathfrak{p}_\sigma}dp_1 + \cdots + \frac{\partial \omega_\varrho}{\partial \mathfrak{p}_\sigma}dp_\varrho\right\}$$

oder vermöge (3.) durch Integration

$$H = p_1'\{\omega_1 + c_{21}p_2 + c_{31}p_3 + \cdots + c_{\varrho 1}p_\varrho\} + \cdots + p_\varrho'\{\omega_\varrho + c_{1\varrho}p_1 + c_{2\varrho}p_2 + \cdots + c_{\varrho-1\varrho}p_{\varrho-1}\}$$
$$+\mathfrak{p}_1'\int\left(\frac{\partial \omega_1}{\partial \mathfrak{p}_1}dp_1 + \cdots + \frac{\partial \omega_\varrho}{\partial \mathfrak{p}_1}dp_\varrho\right) + \cdots + \mathfrak{p}_\sigma'\int\left(\frac{\partial \omega_1}{\partial \mathfrak{p}_\sigma}dp_1 + \cdots + \frac{\partial \omega_\varrho}{\partial \mathfrak{p}_\sigma}dp_\varrho\right)$$
$$+\Omega(\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\sigma, \mathfrak{p}_1', \ldots, \mathfrak{p}_\sigma', p_1', \ldots, p_\varrho'),$$

worin Ω eine willkürliche Function der eingeschlossenen Grössen bedeutet und die Coefficienten von $\mathfrak{p}_1', \ldots, \mathfrak{p}_\sigma'$ vermöge der Gleichungen (2.) Integrale von vollständigen Differentialausdrücken in den Variablen $p_1, \ldots, p_\varrho$ darstellen. Setzt man endlich

$$\omega_r - c_{r1}p_1 - \cdots - c_{rr-1}p_{r-1} - c_{rr+1}p_{r+1} - \cdots - c_{r\varrho}p_\varrho = \overline{\omega}_r,$$

so werdne $\overline{\omega}_r$ *wiederum Functionen von* $p_1, \ldots, p_\varrho, \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\sigma$ *bedeuten, welche nach* (3.) *der Bedingung genügen*

$$\text{(4.)} \qquad \frac{\partial \overline{\omega}_{r_1}}{\partial p_{r_2}} - \frac{\partial \overline{\omega}_{r_2}}{\partial p_{r_1}} = C_{r_1 r_2},$$

worin $C_{r_1 r_2}$ *willkürliche Constanten bedeuten, die der Beschränkung unterliegen, dass*

$$\text{(5.)} \qquad C_{r_2 r_1} = -C_{r_1 r_2}$$

ist, und es ergiebt sich für das kinetische Potential H als nothwendige Bedingung dafür, dass die ersten ϱ *Lagrangeschen Gleichungen in vollständige nach der Zeit genommene Differentialquotienten übergehen, die Form*

$$\text{(6.)} \quad \begin{cases} H = p_1'\overline{\omega}_1 + \cdots + p_\varrho'\overline{\omega}_\varrho + \mathfrak{p}_1'\int\left(\frac{\partial \overline{\omega}_1}{\partial \mathfrak{p}_1}dp_1 + \cdots + \frac{\partial \overline{\omega}_\varrho}{\partial \mathfrak{p}_1}dp_\varrho\right) + \cdots \\ + \mathfrak{p}_\sigma'\int\left(\frac{\partial \overline{\omega}_1}{\partial \mathfrak{p}_\sigma}dp_1 + \cdots + \frac{\partial \overline{\omega}_\varrho}{\partial \mathfrak{p}_\sigma}dp_\varrho\right) + \Omega(\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\sigma, \mathfrak{p}_1', \ldots, \mathfrak{p}_\sigma', p_1', \ldots, p_\varrho'), \end{cases}$$

und diese Form ist auch die hinreichende.

Denn aus (6.) folgt unmittelbar

$$\frac{\partial H}{\partial p_r} = p_1'\frac{\partial \bar{\omega}_1}{\partial p_r}+\cdots+p_\varrho'\frac{\partial \bar{\omega}_\varrho}{\partial p_r}+\mathfrak{p}_1'\frac{\partial \bar{\omega}_r}{\partial \mathfrak{p}_1}+\cdots+\mathfrak{p}_\sigma'\frac{\partial \bar{\omega}_r}{\partial \mathfrak{p}_\sigma}, \qquad \frac{\partial H}{\partial p_r'} = \bar{\omega}_r+\frac{\partial \Omega}{\partial p_r'},$$

also

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \bar{H}}{\partial p_r'} = \frac{\partial \bar{\omega}_r}{\partial p_1}p_1'+\cdots+\frac{\partial \bar{\omega}_r}{\partial p_\varrho}p_\varrho'+\frac{\partial \bar{\omega}_r}{\partial \mathfrak{p}_1}\mathfrak{p}_1'+\cdots+\frac{\partial \bar{\omega}_r}{\partial \mathfrak{p}_\sigma}\mathfrak{p}_\sigma'+\frac{d}{dt}\frac{\partial \Omega}{\partial p_r'},$$

und es gehen somit nach (4.) die ersten ϱ *Lagrange*schen Gleichungen in

$$C_{r1}p_1'+C_{r2}p_2'+\cdots+C_{rr-1}p_{r-1}'+C_{rr+1}p_{r+1}'+\cdots+C_{r\varrho}p_\varrho'+\frac{d}{dt}\frac{\partial \Omega}{\partial p_r'} = 0$$

oder

$$(7.)\quad \frac{d}{dt}\left\{C_{r1}p_1+\cdots+C_{rr-1}p_{r-1}+C_{rr+1}p_{r+1}+\cdots+C_{r\varrho}p_\varrho+\frac{\partial \Omega}{\partial p_r'}\right\} = 0$$

über, deren Integral

$$(8.)\quad C_{r1}p_1+\cdots+C_{rr-1}p_{r-1}+C_{rr+1}p_{r+1}+\cdots+C_{r\varrho}p_\varrho+\frac{\partial \Omega}{\partial p_r'} = h_r$$

liefert, worin h_r eine Integrationsconstante bedeutet.

Sollen nun mit Hülfe von (8.) die ϱ Coordinaten $p_1, \ldots, p_\varrho$ und deren erste Ableitungen aus den weiteren σ Bewegungsgleichungen

$$(9.)\qquad -\frac{\partial H}{\partial \mathfrak{p}_s}+\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial \mathfrak{p}_s'} = \mathfrak{P}_s$$

eliminirt werden, so sind zwei und nur zwei Annahmen statthaft:

a) wir nehmen an, die Gleichungen (8.) sind von den Coordinaten $p_1, \ldots, p_\varrho$ unabhängig, und entwickeln die Werthe von $p_1', \ldots, p_\varrho'$ aus denselben, so wird, da diese ϱ Coordinaten in Ω nicht enthalten sind,

$$C_{r1} = \cdots = C_{rr-1} = C_{rr+1} = \cdots C_{r\varrho} = 0$$

sein, so dass die Gleichungen (4.) in

$$(10.)\qquad \frac{\partial \bar{\omega}_{r_1}}{\partial p_{r_2}} = \frac{\partial \bar{\omega}_{r_2}}{\partial p_{r_1}}$$

übergehen, und es mögen die aus den Gleichungen

$$(11.)\qquad \frac{\partial \Omega}{\partial p_r'} = h_r \qquad (r=1, 2, \ldots, \varrho)$$

sich ergebenden Werthe von $p_1', \ldots, p_\varrho'$ durch

$$(12.)\quad p_1' = \Omega_1(\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\sigma, \mathfrak{p}_1', \ldots, \mathfrak{p}_\sigma'), \ldots, p_\varrho' = \Omega_\varrho(\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\sigma, \mathfrak{p}_1', \ldots, \mathfrak{p}_\sigma')$$

dargestellt werden. Bildet man nun aus (6.)

$$\frac{\partial H}{\partial \mathfrak{p}_s} = p_1' \frac{\partial \bar{\omega}_1}{\partial \mathfrak{p}_s} + \cdots + p_\varrho' \frac{\partial \bar{\omega}_\varrho}{\partial \mathfrak{p}_s} + \mathfrak{p}_1' \int \left(\frac{\partial^2 \bar{\omega}_1}{\partial \mathfrak{p}_1 \partial \mathfrak{p}_s} dp_1 + \cdots + \frac{\partial^2 \bar{\omega}_\varrho}{\partial \mathfrak{p}_1 \partial \mathfrak{p}_s} dp_\varrho \right) + \cdots$$
$$+ \mathfrak{p}_\sigma' \int \left(\frac{\partial^2 \bar{\omega}_1}{\partial \mathfrak{p}_\sigma \partial \mathfrak{p}_s} dp_1 + \cdots + \frac{\partial^2 \bar{\omega}_\varrho}{\partial \mathfrak{p}_\sigma \partial \mathfrak{p}_s} dp_\varrho \right) + \frac{\partial \Omega}{\partial \mathfrak{p}_s},$$

$$\frac{\partial H}{\partial \mathfrak{p}_s'} = \int \left(\frac{\partial \bar{\omega}_1}{\partial \mathfrak{p}_s} dp_1 + \cdots + \frac{\partial \bar{\omega}_\varrho}{\partial \mathfrak{p}_s} dp_\varrho \right) + \frac{\partial \Omega}{\partial \mathfrak{p}_s'},$$

also

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial \mathfrak{p}_s'} = p_1' \frac{\partial \bar{\omega}_1}{\partial \mathfrak{p}_s} + \cdots + p_\varrho' \frac{\partial \bar{\omega}_\varrho}{\partial \mathfrak{p}_s} + \mathfrak{p}_1' \int \left(\frac{\partial^2 \bar{\omega}_1}{\partial \mathfrak{p}_s \partial \mathfrak{p}_1} dp_1 + \cdots + \frac{\partial^2 \bar{\omega}_\varrho}{\partial \mathfrak{p}_s \partial \mathfrak{p}_1} dp_\varrho \right) + \cdots$$
$$+ \mathfrak{p}_\sigma' \int \left(\frac{\partial^2 \bar{\omega}_1}{\partial \mathfrak{p}_s \partial \mathfrak{p}_\sigma} dp_1 + \cdots + \frac{\partial^2 \bar{\omega}_\varrho}{\partial \mathfrak{p}_s \partial \mathfrak{p}_\sigma} dp_\varrho \right) + \frac{d}{dt} \frac{\partial \Omega}{\partial \mathfrak{p}_s'},$$

so gehen zunächst die Gleichungen (9.) in

$$(13.) \qquad - \frac{\partial \Omega}{\partial \mathfrak{p}_s} + \frac{d}{dt} \frac{\partial \Omega}{\partial \mathfrak{p}_s'} = \mathfrak{P}_s$$

über, worin Ω eine Function von $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\sigma, \mathfrak{p}_1', \ldots, \mathfrak{p}_\sigma', p_1', \ldots, p_\varrho'$ ist, oder nach Substitution der Werthe (12.) für $p_1', \ldots, p_\varrho'$ in

$$(14.) \qquad - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mathfrak{p}_s} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mathfrak{p}_s'} \right) = \mathfrak{P}_s,$$

worin die Klammern die Werthe der eingeklammerten Grössen nach Vollzug der Substitutionen bedeuten sollen. Da aber nach (11.)

$$\frac{\partial (\Omega)}{\partial \mathfrak{p}_s} = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mathfrak{p}_s} \right) + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial p_1'} \right) \frac{\partial \Omega_1}{\partial \mathfrak{p}_s} + \cdots + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial p_\varrho'} \right) \frac{\partial \Omega_\varrho}{\partial \mathfrak{p}_s} = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mathfrak{p}_s} \right) + h_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial \mathfrak{p}_s} + \cdots + h_\varrho \frac{\partial \Omega_\varrho}{\partial \mathfrak{p}_s},$$
$$\frac{\partial (\Omega)}{\partial \mathfrak{p}_s'} = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mathfrak{p}_s'} \right) + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial p_1'} \right) \frac{\partial \Omega_1}{\partial \mathfrak{p}_s'} + \cdots + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial p_\varrho'} \right) \frac{\partial \Omega_\varrho}{\partial \mathfrak{p}_s'} = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mathfrak{p}_s'} \right) + h_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial \mathfrak{p}_s'} + \cdots + h_\varrho \frac{\partial \Omega_\varrho}{\partial \mathfrak{p}_s'},$$

so gehen die Gleichungen (14.), wenn

$$(15.) \qquad \mathfrak{H} = (\Omega) - h_1 \Omega_1 - h_2 \Omega_2 - \cdots - h_\varrho \Omega_\varrho$$

gesetzt wird, worin also $\mathfrak{H}$ eine reine Function der $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\sigma, \mathfrak{p}_1', \ldots, \mathfrak{p}_\sigma'$ bedeutet, in

$$(16.) \qquad - \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \mathfrak{p}_s} + \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \mathfrak{p}_s'} = \mathfrak{P}_s$$

über, und es behalten somit die *Lagrange*schen Bewegungsgleichungen ihre ursprüngliche Form, während das kinetische Potential $\mathfrak{H}$ eine ganz anders gestaltete Function der Coordinaten $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\sigma$ und deren ersten Ableitungen wird, als es das gegebene Potential H war.

Fassen wir zunächst den ersten Theil des sich ergebenden Satzes zusammen, so finden wir,

dass die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die den Coordinaten $p_1, \ldots, p_\varrho$ entsprechenden Lagrangeschen Bewegungsgleichungen vollständige nach der Zeit genommene Ableitungen von Functionen aller Coordinaten und deren ersten Ableitungen sind, die jedoch die Coordinaten $p_1, \ldots, p_\varrho$ selbst nicht enthalten, die ist, dass das kinetische Potential die Form hat

$$(17.)\quad \begin{cases} H = p_1'\bar{\omega}_1+\cdots+p_\varrho'\bar{\omega}_\varrho+\mathfrak{p}_1'\int\left(\frac{\partial\bar{\omega}_1}{\partial\mathfrak{p}_1}dp_1+\cdots+\frac{\partial\bar{\omega}_\varrho}{\partial\mathfrak{p}_1}dp_\varrho\right)+\cdots \\ +\mathfrak{p}_\sigma'\int\left(\frac{\partial\bar{\omega}_1}{\partial\mathfrak{p}_\sigma}dp_1+\cdots+\frac{\partial\bar{\omega}_\varrho}{\partial\mathfrak{p}_\sigma}dp_\varrho\right)+\Omega(\mathfrak{p}_1,\ldots,\mathfrak{p}_\sigma,\mathfrak{p}_1',\ldots,\mathfrak{p}_\sigma',p_1',\ldots,p_\varrho'), \end{cases}$$

worin Ω eine beliebige Function der eingeklammerten Grössen ist, und $\bar{\omega}_1, \ldots, \bar{\omega}_\varrho$ beliebige Functionen von $p_1, \ldots, p_\varrho, \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\sigma$ bedeuten, die nur der Bedingung unterliegen

$$(18.)\quad \frac{\partial\bar{\omega}_{r_1}}{\partial p_{r_2}} = \frac{\partial\bar{\omega}_{r_2}}{\partial p_{r_1}}.$$

Dann gehen stets die weiteren σ Bewegungsgleichungen, wenn aus den ϱ ersten, welche die Form annehmen

$$(19.)\quad \frac{\partial\Omega}{\partial p_1'} = h_1, \quad \frac{\partial\Omega}{\partial p_2'} = h_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial\Omega}{\partial p_\varrho'} = h_\varrho,$$

die Grössen $p_1', p_2', \ldots, p_\varrho'$ als Functionen von $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\sigma, \mathfrak{p}_1', \ldots, \mathfrak{p}_\sigma'$ ermittelt und substituirt werden und

$$(20.)\quad \mathfrak{H} = (\Omega)-h_1(p_1')-h_2(p_2')-\cdots-h_\varrho(p_\varrho')$$

gesetzt wird, wiederum in die Lagrangesche Form

$$(21.)\quad -\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial\mathfrak{p}_s}+\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial\mathfrak{p}_s'} = \mathfrak{P}_s$$

über.

Fügt man noch die Bedingung hinzu, dass H von den Coordinaten $p_1, p_2, \ldots, p_\varrho$ frei sein soll, dass also nach (18.)

$$\frac{\partial H}{\partial p_r} = p_1'\frac{\partial\bar{\omega}_r}{\partial p_1}+p_2'\frac{\partial\bar{\omega}_r}{\partial p_2}+\cdots+p_\varrho'\frac{\partial\bar{\omega}_r}{\partial p_\varrho}+\mathfrak{p}_1'\frac{\partial\bar{\omega}_r}{\partial\mathfrak{p}_1}+\mathfrak{p}_2'\frac{\partial\bar{\omega}_r}{\partial\mathfrak{p}_2}+\cdots+\mathfrak{p}_\sigma'\frac{\partial\bar{\omega}_r}{\partial\mathfrak{p}_\sigma}$$

identisch verschwindet, so folgt, dass die Grössen $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \ldots, \bar{\omega}_\varrho$ constant sein müssen.

Für den Fall, dass das kinetische Potential in seiner ursprünglichen Form lineare Glieder in den Ableitungen $p_1', \ldots, p_\varrho', \mathfrak{p}_1', \ldots, \mathfrak{p}_\sigma'$ nicht besitzt — wie dies für die Annahme $H = -T-U$ unter der Voraussetzung, dass die ursprünglichen Bedingungsgleichungen die Zeit nicht explicite ent-

halten, der Fall ist — ergiebt sich aus (17.) unmittelbar, dass die Grössen $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \dots, \bar{\omega}_\varrho$ constant und somit H selbst von $p_1, p_2, \dots, p_\varrho$ unabhängig sein muss, während auch umgekehrt, wenn dies der Fall, also $\frac{\partial H}{\partial p_r}$ identisch verschwindet, die ersten ϱ *Lagrange*schen Gleichungen die vollständige Differentialform annehmen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p'_r} = 0;$$

es folgt somit,

dass für den Fall des kinetischen Potentials in der Mechanik wägbarer Massen der von Helmholtz hervorgehobene Fall der verborgenen Bewegung, für welchen das kinetische Potential von einigen der Coordinaten unabhängig sein soll, der einzige ist, für den die zugehörigen Lagrangeschen Gleichungen in vollständige nach der Zeit genommene Differentialquotienten übergehen und — was dann stets der Fall ist — eine solche Elimination der Coordinaten gestatten, dass die resultirenden Bewegungsgleichungen wiederum die Lagrangesche Form annehmen.

Der oben für beliebige kinetische Potentiale entwickelte Satz liefert also zunächst eine Verallgemeinerung der verborgenen Bewegung nach einer Richtung hin.

Gehen wir nun zu dem zweiten Theile der Untersuchung über, indem wir wiederum die nothwendige und hinreichende Form (6.) des kinetischen Potentials H dafür zu Grunde legen, dass die ersten ϱ *Lagrange*schen Gleichungen in vollständige nach der Zeit genommene Differentialquotienten übergehen, und

b) annehmen, die Gleichungen (8.) seien von den $p'_1, \dots, p'_\varrho$ unabhängig; es handelt sich dann darum, die Coordinaten $p_1, p_2, \dots, p_\varrho$ aus diesen Gleichungen zu berechnen und in die weiteren σ Bewegungsgleichungen einzusetzen. Aus der gemachten Annahme folgt unmittelbar, dass

$$(22.)\quad \begin{cases} \Omega = p'_1\varphi_1(\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_\sigma, \mathfrak{p}'_1, \dots, \mathfrak{p}'_\sigma) + \dots + p'_\varrho\varphi_\varrho(\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_\sigma, \mathfrak{p}'_1, \dots, \mathfrak{p}'_\sigma) \\ \qquad + \varphi(\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_\sigma, \mathfrak{p}'_1, \dots, \mathfrak{p}'_\sigma), \end{cases}$$

und das kinetische Potential nach (6.) somit die Form annimmt:

$$(23.)\quad \begin{cases} H = p'_1(\bar{\omega}_1 + \varphi_1) + \dots + p'_\varrho(\bar{\omega}_\varrho + \varphi_\varrho) + \varphi \\ + \mathfrak{p}'_1 \int \left(\frac{\partial \bar{\omega}_1}{\partial \mathfrak{p}_1} dp_1 + \dots + \frac{\partial \bar{\omega}_\varrho}{\partial \mathfrak{p}_1} dp_\varrho \right) + \dots + \mathfrak{p}'_\sigma \int \left(\frac{\partial \bar{\omega}_1}{\partial \mathfrak{p}_\sigma} dp_1 + \dots + \frac{\partial \bar{\omega}_\varrho}{\partial \mathfrak{p}_\sigma} dp_\varrho \right), \end{cases}$$

worin $\bar{\omega}_1, \ldots, \bar{\omega}_\varrho$ Functionen von $p_1, \ldots, p_\varrho, \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\sigma$ sind, welche den Bedingungen (4.) unterliegen.

Bildet man nun

$$\frac{\partial H}{\partial \mathfrak{p}_s} = p_1'\Big(\frac{\partial \bar{\omega}_1}{\partial \mathfrak{p}_s} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \mathfrak{p}_s}\Big) + \cdots + p_\varrho'\Big(\frac{\partial \bar{\omega}_\varrho}{\partial \mathfrak{p}_s} + \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial \mathfrak{p}_s}\Big) + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathfrak{p}_s}$$
$$+ \mathfrak{p}_1' \int \Big(\frac{\partial^2 \bar{\omega}_1}{\partial \mathfrak{p}_1 \partial \mathfrak{p}_s} dp_1 + \cdots + \frac{\partial^2 \bar{\omega}_\varrho}{\partial \mathfrak{p}_1 \partial \mathfrak{p}_s} dp_\varrho\Big) + \cdots + \mathfrak{p}_\sigma' \int \Big(\frac{\partial^2 \bar{\omega}_1}{\partial \mathfrak{p}_\sigma \partial \mathfrak{p}_s} dp_1 + \cdots + \frac{\partial^2 \bar{\omega}_\varrho}{\partial \mathfrak{p}_\sigma \partial \mathfrak{p}_s} dp_\varrho\Big),$$
$$\frac{\partial H}{\partial \mathfrak{p}_s'} = p_1' \frac{\partial \varphi_1}{\partial \mathfrak{p}_s'} + \cdots + p_\varrho' \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial \mathfrak{p}_s'} + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathfrak{p}_s'} + \int \Big(\frac{\partial \bar{\omega}_1}{\partial \mathfrak{p}_s} dp_1 + \cdots + \frac{\partial \bar{\omega}_\varrho}{\partial \mathfrak{p}_s} dp_\varrho\Big),$$

also

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial \mathfrak{p}_s'} = p_1' \frac{d}{dt}\frac{\partial \varphi_1}{\partial \mathfrak{p}_s'} + \cdots + p_\varrho' \frac{d}{dt}\frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial \mathfrak{p}_s'} + \frac{d}{dt}\frac{\partial \varphi}{\partial \mathfrak{p}_s'} + p_1'' \frac{\partial \varphi_1}{\partial \mathfrak{p}_s'} + \cdots + p_\varrho'' \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial \mathfrak{p}_s'}$$
$$+ \frac{\partial \bar{\omega}_1}{\partial \mathfrak{p}_s} p_1' + \cdots + \frac{\partial \bar{\omega}_\varrho}{\partial \mathfrak{p}_s} p_\varrho' + \mathfrak{p}_1' \int \Big(\frac{\partial^2 \bar{\omega}_1}{\partial \mathfrak{p}_s \partial \mathfrak{p}_1} dp_1 + \cdots + \frac{\partial^2 \bar{\omega}_\varrho}{\partial \mathfrak{p}_s \partial \mathfrak{p}_1} dp_\varrho\Big) + \cdots$$
$$+ \mathfrak{p}_\sigma' \int \Big(\frac{\partial^2 \bar{\omega}_1}{\partial \mathfrak{p}_s \partial \mathfrak{p}_\sigma} dp_1 + \cdots + \frac{\partial^2 \bar{\omega}_\varrho}{\partial \mathfrak{p}_s \partial \mathfrak{p}_\sigma} dp_\varrho\Big),$$

so geht die zweite Reihe der σ *Lagrange*schen Gleichungen, wenn

$$p_1'\varphi_1 + p_2'\varphi_2 + \cdots + p_\varrho'\varphi_\varrho + \varphi = \Phi \tag{24.}$$

gesetzt wird, in

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial \mathfrak{p}_s} + \frac{d}{dt}\frac{\partial \Phi}{\partial \mathfrak{p}_s'} = \mathfrak{P}_s \tag{25.}$$

über, und es entsteht nun die Frage, ob es Functionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\varrho, \varphi$ von $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\sigma, \mathfrak{p}_1', \ldots, \mathfrak{p}_\sigma'$ giebt von der Beschaffenheit, dass, wenn aus den ϱ ersten Gleichungen, die nach (8.) und (22.) die Form annehmen

$$\left\{ \begin{aligned} & C_{r1}p_1 + \cdots + C_{r\,r-1}p_{r-1} + C_{r\,r+1}p_{r+1} + \cdots + C_{r\varrho}p_\varrho \\ & \qquad = h_r - \varphi_r(\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\sigma, \mathfrak{p}_1', \ldots \mathfrak{p}_\sigma'), \end{aligned} \right. \quad (r = 1, 2, \ldots, \varrho) \tag{26.}$$

die Grössen $p_1', \ldots, p_\varrho'$ durch $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\sigma, \mathfrak{p}_1', \ldots, \mathfrak{p}_\sigma', \mathfrak{p}_1'', \ldots, \mathfrak{p}_\sigma''$ ausgedrückt und in (25.) eingesetzt werden, die resultirende Gleichung

$$-\Big(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathfrak{p}_s}\Big) + \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathfrak{p}_s'}\Big) = \mathfrak{P}_s \tag{27.}$$

wiederum die *Lagrange*sche Form annimmt

$$-\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \mathfrak{p}_s} + \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \mathfrak{p}_s'} = \mathfrak{P}_s. \tag{28.}$$

Dass dies aber auf unendlich mannigfache Weise möglich ist, kann leicht erkannt werden; sei $\varrho = 2$, $\sigma = 1$, so dass, wenn $C_{12} = 1$, $C_{21} = -1$

gesetzt wird, die Gleichung (26.) die Beziehungen liefert

$$p_2' = -\frac{\partial\varphi_1}{\partial\mathfrak{p}_1}\mathfrak{p}_1' - \frac{\partial\varphi_1}{\partial\mathfrak{p}_1'}\mathfrak{p}_1'', \quad p_1' = \frac{\partial\varphi_2}{\partial\mathfrak{p}_1}\mathfrak{p}_1' + \frac{\partial\varphi_2}{\partial\mathfrak{p}_1'}\mathfrak{p}_1'',$$

so erhält man für

$$\Phi = p_1'\varphi_1 + p_2'\varphi_2 + \varphi$$

statt (27.) als Form der letzten *Lagrange*schen Gleichung

$$(29.)\quad \begin{cases} 2\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\mathfrak{p}_1'}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\mathfrak{p}_1} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial\mathfrak{p}_1'}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\mathfrak{p}_1}\right)\mathfrak{p}_1'' + \mathfrak{p}_1'\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\mathfrak{p}_1'}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\mathfrak{p}_1} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial\mathfrak{p}_1'}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\mathfrak{p}_1}\right) \\ \qquad\qquad - \frac{\partial\varphi}{\partial\mathfrak{p}_1} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mathfrak{p}_1'}\right) = \mathfrak{P}_1, \end{cases}$$

so dass, um der Form (28.) zu entsprechen, wenn

$$(30.)\quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial\mathfrak{p}_1'}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\mathfrak{p}_1} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial\mathfrak{p}_1'}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\mathfrak{p}_1} = f(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_1')$$

gesetzt wird, sich eine Function $F(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_1')$ bestimmen lassen muss, welche die Gleichung

$$(31.)\quad 2f\mathfrak{p}_1'' + \mathfrak{p}_1'\frac{df}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial\mathfrak{p}_1} + \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial\mathfrak{p}_1'}$$

identisch befriedigt, und dies ist in der That möglich, da, welches auch die Function $f(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_1')$ sein mag, der Gleichung durch den Ausdruck

$$(32.)\quad F(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_1') = \mathfrak{p}_1'\int f d\mathfrak{p}_1' + \mathfrak{p}_1'\psi(\mathfrak{p}_1) + c,$$

worin c eine Constante und $\psi(\mathfrak{p}_1)$ eine beliebige Function von $\mathfrak{p}_1$ bedeutet, Genüge geschieht. Fassen wir nun die für diesen Fall erlangten Resultate zusammen, so ergiebt sich,

dass die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die beiden Lagrangeschen Gleichungen

$$(33.)\quad -\frac{\partial H}{\partial p_1} + \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_1'} = 0, \quad -\frac{\partial H}{\partial p_2} + \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_2'} = 0$$

in vollständige, nach der Zeit genommene Differentialquotienten von Functionen der Coordinaten p_1, p_2, $\mathfrak{p}_1$ und deren Ableitungen übergehen, die jedoch von p_1' und p_2' unabhängig sind, die ist, dass das kinetiche Potential die Form hat

$$(34.)\quad H = p_1'(\bar{\omega}_1 + \varphi_1) + p_2'(\bar{\omega}_2 + \varphi_2) + \varphi + \mathfrak{p}_1'\int\left(\frac{\partial\bar{\omega}_1}{\partial\mathfrak{p}_1}dp_1 + \frac{\partial\bar{\omega}_2}{\partial\mathfrak{p}_1}dp_2\right),$$

worin $\bar{\omega}_1$ und $\bar{\omega}_2$ beliebige Functionen von p_1, p_2, $\mathfrak{p}_1$ bedeuten, die der Bedingung unterliegen, dass

$$(35.)\quad \frac{\partial\bar{\omega}_1}{\partial p_2} = \frac{\partial\bar{\omega}_2}{\partial p_1}$$

ist, und worin $\varphi_1, \varphi_2, \varphi$ ***beliebige Functionen von*** $\mathfrak{p}_1$ ***und*** $\mathfrak{p}'_1$ ***darstellen; in diesem Falle wird die Elimination der Coordinaten*** p_1, p_2 ***und deren Ableitungen aus der dritten Lagrangeschen Gleichung diese wiederum in die Form***

$$(36.) \qquad -\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \mathfrak{p}_1} + \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \mathfrak{p}'_1} = \mathfrak{P}_1$$

überführen, worin das kinetische Potential

$$(37.) \qquad \mathfrak{H} = \mathfrak{p}'_1 \int f(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}'_1) d\mathfrak{p}'_1 + \mathfrak{p}'_1 \psi(\mathfrak{p}_1) + \varphi(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}'_1)$$

ist, wenn

$$(38.) \qquad \frac{\partial \varphi_1}{\partial \mathfrak{p}'_1}\frac{\partial \varphi_2}{\partial \mathfrak{p}_1} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial \mathfrak{p}'_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial \mathfrak{p}_1} = f(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}'_1)$$

gesetzt wird, und ψ ***eine beliebige Function bedeutet.***

Nachdem damit die Annahme, dass die ersten ϱ *Lagrange*schen Gleichungen vollständige nach der Zeit genommene Differentialquotienten darstellen, erledigt ist, sollen nunmehr die beiden einzigen Fälle in Betracht gezogen werden, in denen noch eine Elimination der Coordinaten möglich ist, und die dadurch definirt sind, dass entweder in den ersten ϱ Gleichungen die Grössen $p_1, \ldots, p_\varrho, p'_1, \ldots, p'_\varrho$ nicht explicite vorkommen und die Werthe von $p''_1, \ldots, p''_\varrho$ aus diesen ermittelt und in die weiteren σ Bewegungsgleichungen eingesetzt werden, oder dass die zweiten Ableitungen von $p_1, \ldots, p_\varrho$ in den ersten ϱ Gleichungen nicht vorkommen.

1) Sind die Gleichungen

$$-\frac{\partial H}{\partial p_r} + \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p'_r} = 0$$

oder

$$(39.) \quad -\frac{\partial H}{\partial p_r} + \sum_1^\varrho {}_\delta \frac{\partial^2 H}{\partial p'_r \partial p_\delta} p'_\delta + \sum_1^\varrho {}_\delta \frac{\partial^2 H}{\partial p'_r \partial p'_\delta} p''_\delta + \sum_1^\sigma {}_\varepsilon \frac{\partial^2 H}{\partial p'_r \partial \mathfrak{p}_\varepsilon} \mathfrak{p}'_\varepsilon + \sum_1^\sigma {}_\varepsilon \frac{\partial^2 H}{\partial p'_r \partial \mathfrak{p}'_\varepsilon} \mathfrak{p}''_\varepsilon = 0$$

von den Coordinaten p und deren ersten Ableitungen frei, so müssen es offenbar auch die Grössen

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p'_r \partial p'_\delta} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 H}{\partial p'_r \partial \mathfrak{p}'_\varepsilon}$$

sein und also die Form haben

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p'_r \partial p'_\delta} = \omega_{r\delta}(\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\sigma, \mathfrak{p}'_1, \ldots, \mathfrak{p}'_\sigma),$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p'_r \partial \mathfrak{p}'_\varepsilon} = \Omega_{r\varepsilon}(\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\sigma, \mathfrak{p}'_1, \ldots, \mathfrak{p}'_\sigma),$$

und somit, da

$$\frac{\partial^3 H}{\partial p'_r \partial p'_\delta \partial \mathfrak{p}'_\varepsilon} = \frac{\partial \omega_{r\delta}(\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\sigma, \mathfrak{p}'_1, \ldots, \mathfrak{p}'_\sigma)}{\partial \mathfrak{p}'_\varepsilon} = \frac{\partial \Omega_{r\varepsilon}(\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\sigma, \mathfrak{p}'_1, \ldots, \mathfrak{p}'_\sigma)}{\partial p'_\delta} = 0$$

ist, $\omega_{r\delta}$ von $\mathfrak{p}'_\varepsilon$ unabhängig und daher

$$\text{(40.)} \qquad \frac{\partial^2 H}{\partial p'_r \partial p'_\delta} = \omega_{r\delta}(\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\sigma)$$

sein. Da aber auch der übrige Theil von (39.) von den Ableitungen der ϱ Coordinaten frei sein muss, also für $\lambda = 1, 2, \ldots, \varrho$ der nach p'_λ genommene Differentialquotient

$$-\frac{\partial^2 H}{\partial p_r \partial p'_\lambda} + \frac{\partial^2 H}{\partial p'_r \partial p_\lambda} + \sum_1^\varrho{}_\delta \frac{\partial^3 H}{\partial p'_r \partial p_\delta \partial p'_\lambda} p'_\delta + \sum_1^\sigma{}_\varepsilon \frac{\partial^3 H}{\partial p'_r \partial \mathfrak{p}_\varepsilon \partial p'_\lambda} \mathfrak{p}'_\varepsilon = 0$$

identisch befriedigt sein muss, so folgt

$$-\frac{\partial^2 H}{\partial p_r \partial p'_\lambda} + \frac{\partial^2 H}{\partial p'_r \partial p_\lambda} + \sum_1^\sigma{}_\varepsilon \frac{\partial \omega_{r\lambda}}{\partial \mathfrak{p}_\varepsilon} \mathfrak{p}'_\varepsilon = 0,$$

oder da nach (40.) $\omega_{r\lambda} = \omega_{\lambda r}$ ist, identisch

$$\text{(41.)} \qquad \frac{\partial^2 H}{\partial p_r \partial p'_\lambda} = \frac{\partial^2 H}{\partial p_\lambda \partial p'_r}, \quad \sum_1^\sigma{}_\varepsilon \frac{\partial \omega_{r\lambda}}{\partial \mathfrak{p}_\varepsilon} \mathfrak{p}'_\varepsilon = 0$$

und daraus $\omega_{r\lambda} = 2c_{r\lambda}$, worin $c_{r\lambda} = c_{\lambda r}$ eine Constante bedeutet, so dass nach (40.) sich für das kinetische Potential

$$\text{(42.)} \begin{cases} H = \sum_1^\varrho{}_{r,\delta} c_{r\delta} p'_r p'_\delta + \sum_1^\varrho{}_\delta p'_\delta \nu_\delta(p_1, \ldots, p_\varrho, \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\sigma, \mathfrak{p}'_1, \ldots, \mathfrak{p}'_\sigma) \\ \qquad + N(p_1, \ldots, p_\varrho, \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\sigma, \mathfrak{p}'_1, \ldots, \mathfrak{p}'_\sigma) \end{cases}$$

ergiebt, worin die Functionen ν der ersten der Gleichungen (41.) gemäss zunächst der Bedingung

$$\text{(43.)} \qquad \frac{\partial \nu_\delta}{\partial p_r} = \frac{\partial \nu_r}{\partial p_\delta}$$

genügen, und die ersten ϱ Bewegungsgleichungen die Form annehmen

$$\text{(44.)} \begin{cases} \sum_1^\varrho{}_\delta c_{r\delta} p''_\delta - \frac{\partial N(p_1, \ldots, p_\varrho, \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\sigma, \mathfrak{p}'_1, \ldots, \mathfrak{p}'_\sigma)}{\partial p_r} \\ \quad + \sum_1^\sigma{}_\eta \frac{\partial \nu_r(p_1, \ldots, p_\varrho, \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\sigma, \mathfrak{p}'_1, \ldots, \mathfrak{p}'_\sigma)}{\partial \mathfrak{p}_\eta} \mathfrak{p}'_\eta \\ \quad + \sum_1^\sigma{}_\eta \frac{\partial \nu_r(p_1, \ldots, p_\varrho, \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\sigma, \mathfrak{p}'_1, \ldots, \mathfrak{p}'_\sigma)}{\partial \mathfrak{p}'_\eta} \mathfrak{p}''_\eta = 0, \end{cases}$$

die aber noch nicht von p frei ist. Damit dies der Fall ist, muss zunächst der Coefficient von $\mathfrak{p}''_\eta$ von dieser Grösse unabhängig und somit

$$\text{(45.)} \quad \nu_r = R_r(\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\sigma, \mathfrak{p}'_1, \ldots, \mathfrak{p}'_\sigma) + Q_r(p_1, \ldots, p_\varrho, \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\sigma)$$

sein, worin die Functionen Q_r der Gleichung (43.) zufolge der Bedingung unterliegen

$$(46.) \qquad \frac{\partial Q_{r_1}}{\partial p_{r_2}} = \frac{\partial Q_{r_2}}{\partial p_{r_1}};$$

ist dies erfüllt, so müssen noch die beiden mittleren Posten der Gleichung (44.) von $p_1, \dots, p_\varrho$ frei sein und daher mit Benutzung von (45.)

$$-\frac{\partial N}{\partial p_r} + \sum_1^\sigma{}_\eta \frac{\partial Q_r}{\partial \mathfrak{p}_\eta} \mathfrak{p}'_\eta = T_r(\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_\sigma, \mathfrak{p}'_1, \dots, \mathfrak{p}'_\sigma)$$

oder

$$(47.) \quad \begin{cases} N = \sum_1^\sigma{}_\eta \mathfrak{p}'_\eta \int \left(\frac{\partial Q_1}{\partial \mathfrak{p}_\eta} dp_1 + \frac{\partial Q_2}{\partial \mathfrak{p}_\eta} dp_2 + \dots + \frac{\partial Q_\varrho}{\partial \mathfrak{p}_\eta} dp_\varrho \right) \\ \qquad -p_1 T_1 - p_2 T_2 - \dots - p_\varrho T_\varrho + U(\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_\sigma, \mathfrak{p}'_1, \dots, \mathfrak{p}'_\sigma), \end{cases}$$

worin unter dem Integral vermöge (46.) ein vollständiges Differential nach den Variablen $p_1, \dots, p_\varrho$ steht. Setzen wir aus (45.) und (47.) die Werthe von ν_r und N in den Ausdruck (42.) ein, so ergiebt sich als nothwendige Bedingung dafür, dass die ersten ϱ *Lagrange*schen Gleichungen von den Grössen $p_1, \dots, p_\varrho, p'_1, \dots, p'_\varrho$ frei sein sollen, die folgende Form des kinetischen Potentials

$$(48.) \quad \begin{cases} H = \sum_1^\varrho{}_{r,\delta} c_{r\delta} p'_r p'_\delta + \sum_1^\varrho{}_\delta p'_\delta (R_\delta + Q_\delta) + \sum_1^\sigma{}_\eta \mathfrak{p}'_\eta \int \left(\frac{\partial Q_1}{\partial \mathfrak{p}_\eta} dp_1 + \dots + \frac{\partial Q_\varrho}{\partial \mathfrak{p}_\eta} dp_\varrho \right) \\ \qquad - \sum_1^\varrho{}_r p_r T_r + U, \end{cases}$$

worin alle hierin vorkommenden Functionen willkürlich, nur die Q der Bedingung (46.) unterworfen sind. Da aber aus (48.) umgekehrt

$$\frac{\partial H}{\partial p_r} = \sum_1^\varrho{}_\delta p'_\delta \frac{\partial Q_\delta}{\partial p_r} + \sum_1^\sigma{}_\eta \mathfrak{p}'_\eta \frac{\partial Q_r}{\partial \mathfrak{p}_\eta} - T_r,$$

$$\frac{\partial H}{\partial p'_r} = 2 \sum_1^\varrho{}_\delta c_{r\delta} p'_\delta + R_r + Q_r,$$

also

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial p'_r} = 2 \sum_1^\varrho{}_\delta c_{r\delta} p''_\delta + \sum_1^\sigma{}_s \frac{\partial R_r}{\partial \mathfrak{p}_s} \mathfrak{p}'_s + \sum_1^\sigma{}_s \frac{\partial R_r}{\partial \mathfrak{p}'_s} \mathfrak{p}''_s + \sum_1^\varrho{}_\delta \frac{\partial Q_r}{\partial p_\delta} p'_\delta + \sum_1^\sigma{}_s \frac{\partial Q_r}{\partial \mathfrak{p}_s} \mathfrak{p}'_s$$

sich ergiebt, so nehmen die ersten ϱ Bewegungsgleichungen in Folge der Beziehung (46.) die Form an

$$(49.) \quad \begin{cases} 2 \sum_1^\varrho{}_\delta c_{r\delta} p''_\delta + \sum_1^\sigma{}_s \frac{\partial R_r(\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}'_1, \dots)}{\partial \mathfrak{p}_s} \mathfrak{p}'_s + \sum_1^\sigma{}_s \frac{\partial R_r(\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}'_1, \dots)}{\partial \mathfrak{p}'_s} \mathfrak{p}''_s \\ \qquad + T_r(\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}'_1, \dots) = 0, \end{cases}$$

worin $p_1, \dots, p_\varrho, p'_1, \dots, p'_\varrho$ fehlen, und wir finden somit

dass die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die ersten ϱ Lagrangeschen Gleichungen von den Coordinaten $p_1, p_2, \dots, p_\varrho$ und deren ersten Ableitungen frei sind, die ist, dass das kinetische Potential die durch (48.) ***dargestellte Form hat.***

Setzt man die gefundene Form von H in die zweite Reihe der Bewegungsgleichungen

$$-\frac{\partial H}{\partial \mathfrak{p}_s}+\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial \mathfrak{p}'_s} = \mathfrak{P}_s \qquad (s=1,2,\dots,\sigma)$$

ein, so folgt wegen

$$\frac{\partial H}{\partial \mathfrak{p}_s} = \sum_{1}^{\varrho}{}_{\delta}\, p'_\delta\Big(\frac{\partial R_\delta}{\partial \mathfrak{p}_s}+\frac{\partial Q_\delta}{\partial \mathfrak{p}_s}\Big)+\sum_{1}^{\sigma}{}_{\eta}\,\mathfrak{p}'_\eta\int\Big(\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \mathfrak{p}_\eta \partial \mathfrak{p}_s}dp_1+\dots+\frac{\partial^2 Q_\varrho}{\partial \mathfrak{p}_\eta \partial \mathfrak{p}_s}dp_\varrho\Big)$$
$$-\sum_{1}^{\varrho}{}_{r}\, p_r\frac{\partial T_r}{\partial \mathfrak{p}_s}+\frac{\partial U}{\partial \mathfrak{p}_s},$$

$$\frac{\partial H}{\partial \mathfrak{p}'_s} = \sum_{1}^{\varrho}{}_{\delta}\, p'_\delta\frac{\partial R_\delta}{\partial \mathfrak{p}'_s}+\int\Big(\frac{\partial Q_1}{\partial \mathfrak{p}_s}dp_1+\dots+\frac{\partial Q_\varrho}{\partial \mathfrak{p}_s}dp_\varrho\Big)-\sum_{1}^{\varrho}{}_{r}\, p_r\frac{\partial T_r}{\partial \mathfrak{p}'_s}+\frac{\partial U}{\partial \mathfrak{p}'_s}$$

und somit

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial \mathfrak{p}'_s} = \sum_{1}^{\varrho}{}_{\delta}\, p''_\delta\frac{\partial R_\delta}{\partial \mathfrak{p}'_s}+\sum_{1}^{\varrho}{}_{\delta}\, p'_\delta\frac{d}{dt}\frac{\partial R_\delta}{\partial \mathfrak{p}'_s}+\frac{\partial Q_1}{\partial \mathfrak{p}_s}p'_1+\dots+\frac{\partial Q_\varrho}{\partial \mathfrak{p}_s}p'_\varrho$$
$$+\sum_{1}^{\sigma}{}_{\eta}\,\mathfrak{p}'_\eta\int\Big(\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \mathfrak{p}_\eta \partial \mathfrak{p}_s}dp_1+\dots+\frac{\partial^2 Q_\varrho}{\partial \mathfrak{p}_\eta \partial \mathfrak{p}_s}dp_\varrho\Big)-\sum_{1}^{\varrho}{}_{r}\, p'_r\frac{\partial T_r}{\partial \mathfrak{p}'_s}-\sum_{1}^{\varrho}{}_{r}\, p_r\frac{d}{dt}\frac{\partial T_r}{\partial \mathfrak{p}'_s}+\frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \mathfrak{p}'_s}$$

die Beziehung

$$(50.)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_{1}^{\varrho}{}_{\delta}\, p''_\delta\frac{\partial R_\delta}{\partial \mathfrak{p}'_s}+\sum_{1}^{\varrho}{}_{\delta}\, p'_\delta\Big(-\frac{\partial R_\delta}{\partial \mathfrak{p}_s}+\frac{d}{dt}\frac{\partial R_\delta}{\partial \mathfrak{p}'_s}\Big)-\sum_{1}^{\varrho}{}_{r}\, p'_r\frac{\partial T_r}{\partial \mathfrak{p}'_s}\\ &\qquad -\sum_{1}^{\varrho}{}_{r}\, p_r\Big(-\frac{\partial T_r}{\partial \mathfrak{p}_s}+\frac{d}{dt}\frac{\partial T_r}{\partial \mathfrak{p}'_s}\Big)-\frac{\partial U}{\partial \mathfrak{p}_s}+\frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \mathfrak{p}'_s} = \mathfrak{P}_s \end{aligned}\right.$$

statt der weiteren *Lagrange*schen Gleichungen, in welche nunmehr die aus (49.) sich ergebenden Werthe von $p''_1, p''_2, \dots, p''_\varrho$ einzusetzen sind. Da aber diese Substitution die Grössen p und p' selbst nicht wieder einführt, und die zweite Reihe der σ *Lagrange*schen Gleichungen nur die Coordinaten $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_\sigma$ und deren Ableitungen enthalten soll, so dürfen die Grössen $p_1, \dots, p_\varrho, p'_1, \dots, p'_\varrho$ in (50.) gar nicht vorkommen, und es müssen somit die Beziehungen

$$(51.)\qquad -\frac{\partial T_r}{\partial \mathfrak{p}_s}+\frac{d}{dt}\frac{\partial T_r}{\partial \mathfrak{p}'_s} = 0$$

und

$$(52.)\qquad -\frac{\partial R_r}{\partial \mathfrak{p}_s}+\frac{d}{dt}\frac{\partial R_r}{\partial \mathfrak{p}'}-\frac{\partial T_r}{\partial \mathfrak{p}'_s} = 0$$

identisch befriedigt sein. Da aber T die zweiten Ableitungen der Coordinaten $\mathfrak{p}_s$ nicht enthält, so erfordert die identische Beziehung (51.), dass

$$(53.)\quad \begin{cases} T_r = T_{1r}(\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\sigma)\mathfrak{p}'_1 + T_{2r}(\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\sigma)\mathfrak{p}'_2 + \cdots \\ \qquad\qquad + T_{\sigma r}(\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\sigma)\mathfrak{p}'_\sigma + \overline{T}_r(\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\sigma) \end{cases}$$

und wegen

$$\frac{\partial T_r}{\partial \mathfrak{p}'_s} = T_{sr}(\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\sigma)$$

weiter aus (51.)

$$-\frac{\partial T_{1r}}{\partial \mathfrak{p}_s}\mathfrak{p}'_1 - \cdots - \frac{\partial T_{\sigma r}}{\partial \mathfrak{p}_s}\mathfrak{p}'_\sigma - \frac{\partial \overline{T}_r}{\partial \mathfrak{p}_s} + \frac{\partial T_{sr}}{\partial \mathfrak{p}_1}\mathfrak{p}'_1 + \cdots + \frac{\partial T_{sr}}{\partial \mathfrak{p}_\sigma}\mathfrak{p}'_\sigma = 0,$$

welche identische Beziehung die Bedingungen nach sich zieht

$$(54.)\qquad \overline{T}_r = c_r \quad \text{und} \quad \frac{\partial T_{s_1 r}}{\partial \mathfrak{p}_s} = \frac{\partial T_{sr}}{\partial \mathfrak{p}_{s_1}},$$

durch welche somit (51.) identisch erfüllt ist. Aber die Identität (52.) verlangt vermöge (53.) die Beziehung

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R_r}{\partial \mathfrak{p}'_s} = \frac{\partial R_r}{\partial \mathfrak{p}_s} + T_{sr},$$

woraus wiederum, da die rechte Seite die zweiten Ableitungen der Coordinaten nicht enthält,

$$(55.)\quad R_r = R_{1r}(\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\sigma)\mathfrak{p}'_1 + \cdots + R_{\sigma r}(\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\sigma)\mathfrak{p}'_\sigma + \overline{R}_r(\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\sigma)$$

und genau wie oben

$$(56.)\qquad \frac{\partial R_{s_1 r}}{\partial \mathfrak{p}_s} = \frac{\partial R_{sr}}{\partial \mathfrak{p}_{s_1}}, \quad T_{sr} + \frac{\partial \overline{R}_r}{\partial \mathfrak{p}_s} = 0$$

folgt, so dass die Bewegungsgleichungen (50.) die Form annehmen

$$(57.)\qquad \sum_1^\varrho{}_\delta\, p''_\delta R_{s\delta} - \frac{\partial U}{\partial \mathfrak{p}_s} + \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \mathfrak{p}'_s} = \mathfrak{P}_s,$$

während das kinetische Potential (48.) in

$$(58.)\quad \begin{cases} H = \sum_1^\varrho{}_{r,\delta}\, c_{r\delta}p'_r p'_\delta + \sum_1^\varrho{}_\delta\, p'_\delta(R_{1\delta}\mathfrak{p}'_1 + \cdots + R_{\sigma\delta}\mathfrak{p}'_\sigma + Q_\delta) \\ + \sum_1^\sigma{}_\eta\, \mathfrak{p}'_\eta \int\left(\frac{\partial Q_1}{\partial \mathfrak{p}_\eta}dp_1 + \cdots + \frac{\partial Q_\varrho}{\partial \mathfrak{p}_\eta}dp_\varrho\right) - \sum_1^\varrho{}_r\, p_r(T_{1r}\mathfrak{p}'_1 + \cdots + T_{\sigma r}\mathfrak{p}'_\sigma + c_r) + U \end{cases}$$

übergeht. Setzt man endlich in die Gleichungen (57.) die aus (49.) oder vermöge (53.), (55.) und (56.) aus

$$(59.)\quad 2\sum_1^\varrho{}_\delta\, c_{r\delta}p''_\delta + \sum_1^\sigma{}_s\, \mathfrak{p}'_s\left(\frac{\partial R_{1r}}{\partial \mathfrak{p}_s}\mathfrak{p}'_1 + \cdots + \frac{\partial R_{\sigma r}}{\partial \mathfrak{p}_s}\mathfrak{p}'_\sigma\right) + \sum_1^\sigma{}_s\, R_{sr}\mathfrak{p}''_s + c_r = 0$$

oder endlich nach (56.) aus

$$(60.) \qquad 2\sum_1^{\varrho}{}_{\delta}\, c_{r\delta}p''_{\delta} + \frac{d}{dt}\sum_1^{\sigma}{}_{\eta}\, R_{\eta r}\mathfrak{p}'_{\eta} + c_r = 0$$

sich ergebenden Werthe von $p''_1, p''_2, \ldots, p''_{\varrho}$

$$p''_1 = C_{11}\frac{d}{dt}\sum_1^{\sigma}{}_{\eta}\, R_{\eta 1}\mathfrak{p}'_{\eta} + C_{12}\frac{d}{dt}\sum_1^{\sigma}{}_{\eta}\, R_{\eta 2}\mathfrak{p}'_{\eta} + \cdots + C_{1\varrho}\frac{d}{dt}\sum_1^{\sigma}{}_{\eta}\, R_{\eta\varrho}\mathfrak{p}'_{\eta} + C_1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$p''_{\varrho} = C_{\varrho 1}\frac{d}{dt}\sum_1^{\sigma}{}_{\eta}\, R_{\eta 1}\mathfrak{p}'_{\eta} + C_{\varrho 2}\frac{d}{dt}\sum_1^{\sigma}{}_{\eta}\, R_{\eta 2}\mathfrak{p}'_{\eta} + \cdots + C_{\varrho\varrho}\frac{d}{dt}\sum_1^{\sigma}{}_{\eta}\, R_{\eta\varrho}\mathfrak{p}'_{\eta} + C_{\varrho},$$

worin, da $c_{rs} = c_{sr}$ war, auch $C_{rs} = C_{sr}$ ist, in die Gleichung (57.) ein, so zeigt eine leichte Rechnung, dass, wenn

$$(61.) \quad \begin{cases} W = \sum_1^{\sigma}{}_{\nu}\, \frac{1}{2}\mathfrak{p}'^2_{\nu}\{(C_{11}R_{\nu 1} + C_{21}R_{\nu 2} + \cdots + C_{\varrho 1}R_{\nu\varrho})R_{\nu 1} \\ +(C_{12}R_{\nu 1} + C_{22}R_{\nu 2} + \cdots + C_{\varrho 2}R_{\nu\varrho})R_{\nu 2} + \cdots + (C_{1\varrho}R_{\nu 1} + C_{2\varrho}R_{\nu 2} + \cdots + C_{\varrho\varrho}R_{\nu\varrho})R_{\nu\varrho}\} \\ \qquad - \sum_1^{\varrho}{}_{\mu}\, C_{\mu}\int(R_{1\mu}d\mathfrak{p}_1 + R_{2\mu}d\mathfrak{p}_2 + \cdots + R_{\sigma\mu}d\mathfrak{p}_{\sigma}) \end{cases}$$

gesetzt wird, worin unter den Integralen der Gleichung (56.) zufolge vollständige Differentialausdrücke stehen,

$$\sum_1^{\varrho}{}_{\delta}\, p''_{\delta}R_{s\delta} = -\frac{\partial W}{\partial \mathfrak{p}_s} + \frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial \mathfrak{p}'_s}$$

wird, und die zweite Reihe der *Lagrange*schen Gleichungen, wenn

$$U + W = \mathfrak{H}$$

gesetzt wird, nach (57.) in

$$-\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \mathfrak{p}_s} + \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \mathfrak{p}'_s} = \mathfrak{P}_s$$

übergeht.

Fassen wir die gewonnenen Resultate zusammen, so ergiebt sich der folgende Satz:

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die ersten ϱ Lagrangeschen Gleichungen von den Coordinaten $p_1, p_2, \ldots, p_{\varrho}$ und deren ersten Ableitungen frei sind, ist die, dass das kinetische Potential die Form hat

$$H = \sum_1^{\varrho}{}_{r,\delta}\, c_{r\delta}p'_r p'_{\delta} + \sum_1^{\varrho}{}_{\delta}\, p'_{\delta}(R_{\delta} + Q_{\delta}) + \sum_1^{\sigma}{}_{\eta}\, \mathfrak{p}'_{\eta}\int\left(\frac{\partial Q_1}{\partial \mathfrak{p}_{\eta}}dp_1 + \cdots + \frac{\partial Q_{\varrho}}{\partial \mathfrak{p}_{\eta}}dp_{\varrho}\right)$$
$$- \sum_1^{\varrho}{}_{r}\, p_r T_r + U,$$

worin die Functionen R, T, U willkürliche Functionen von $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_{\sigma}, \mathfrak{p}'_1, \ldots, \mathfrak{p}'_{\sigma}$,

Q Functionen von $p_1, \ldots, p_\varrho$, $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\sigma$ sind, die nur der Bedingung unterliegen, dass

$$\frac{\partial Q_{r_1}}{\partial p_{r_2}} = \frac{\partial Q_{r_2}}{\partial p_{r_1}}$$

ist, und ausserdem $c_{r\delta} = c_{\delta r}$ ist.

Fügt man ferner die Forderung hinzu, dass auch die weiteren Lagrangeschen Gleichungen von $p_1, \ldots, p_\varrho$ und deren ersten Ableitungen unabhängig sind, so ergiebt sich als nothwendige und hinreichende Bedingung die Form des kinetischen Potentials

$$H = \sum_1^\varrho{}_{r,\delta} c_{r\delta} p'_r p'_\delta + \sum_1^\varrho{}_\delta p'_\delta (R_{1\delta}\mathfrak{p}'_1 + \cdots + R_{\sigma\delta}\mathfrak{p}'_\sigma + Q_\delta)$$
$$+ \sum_1^\sigma{}_\eta \mathfrak{p}'_\eta \int \Big(\frac{\partial Q_1}{\partial \mathfrak{p}_\eta} dp_1 + \cdots + \frac{\partial Q_\varrho}{\partial \mathfrak{p}_\eta} dp_\varrho \Big) - \sum_1^\varrho{}_r p_r (T_{1r}\mathfrak{p}'_1 + \cdots + T_{\sigma r}\mathfrak{p}'_\sigma + c_r) + U,$$

worin c_r Constanten, die T_{sr} und R_{sr} willkürliche Functionen von $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\sigma$ bedeuten, welche nur der Bedingung unterliegen, dass

$$\frac{\partial T_{s_1 r}}{\partial \mathfrak{p}_s} = \frac{\partial T_{sr}}{\partial \mathfrak{p}_{s_1}}, \quad \frac{\partial R_{s_1 r}}{\partial \mathfrak{p}_s} = \frac{\partial R_{sr}}{\partial \mathfrak{p}_{s_1}}$$

ist. In diesem Falle liefert die Elimination der Grössen $p''_1, \ldots, p''_\varrho$ zwischen den sämmtlichen Bewegungsgleichungen für die letzten σ dieser Gleichungen in den Coordinaten $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\sigma$ und deren Ableitungen wiederum Gleichungen der Lagrangeschen Form

$$-\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \mathfrak{p}_s} + \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \mathfrak{p}'_s} = \mathfrak{P}_s,$$

worin das kinetische Potential die Form hat

$$\mathfrak{H} = U + \sum_1^\sigma{}_\nu \tfrac{1}{2}\mathfrak{p}'^2_\nu \{(C_{11}R_{\nu 1} + \cdots + C_{\varrho 1}R_{\nu\varrho})R_{\nu 1} + \cdots + (C_{1\varrho}R_{\nu 1} + \cdots + C_{\varrho\varrho}R_{\nu\varrho})R_{\nu\varrho}\}$$
$$- \sum_1^\varrho{}_\mu C_\mu \int (R_{1\mu}d\mathfrak{p}_1 + \cdots + R_{\sigma\mu}d\mathfrak{p}_\sigma),$$

und U eine beliebige Function von $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\sigma$, $\mathfrak{p}'_1, \ldots, \mathfrak{p}'_\sigma$, ferner $R_{\alpha\beta}$ willkürliche Functionen von $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\sigma$, welche nur der Bedingung unterliegen, dass

$$\frac{\partial R_{\alpha\beta}}{\partial \mathfrak{p}_\gamma} = \frac{\partial R_{\gamma\beta}}{\partial \mathfrak{p}_\alpha},$$

C_{mn} und C_l willkürliche Constante bedeuten, von denen die ersteren der Bedingung $C_{mn} = C_{nm}$ unterworfen sind.

Sind

2) die ersten ϱ *Lagrange*schen Gleichungen von den Grössen $p''_1, \ldots, p''_\varrho$ frei, so wird unter der Voraussetzung der Ausschliessung der Integration

der Gleichungen nur die Annahme zulässig sein, dass diese Gleichungen ausserdem noch entweder von den ϱ Coordinaten oder von deren ersten Ableitungen unabhängig sind.

Die Unabhängigkeit der ϱ Bewegungsgleichungen

$$-\frac{\partial H}{\partial p_r}+\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p'_r} = 0$$

von den zweiten Ableitungen der Coordinaten $p_1, p_2, \dots, p_\varrho$, fordert zunächst für das kinetische Potential die Form

$$(62.)\quad \begin{cases} H = \varphi_1(p_1, \dots, p_\varrho, \mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_\sigma, \mathfrak{p}'_1, \dots, \mathfrak{p}'_\sigma)p'_1+\cdots \\ \qquad +\varphi_\varrho(p_1, \dots, p_\varrho, \mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_\sigma, \mathfrak{p}'_1, \dots, \mathfrak{p}'_\sigma)p'_\varrho \\ \qquad\qquad +\varphi(p_1, \dots, p_\varrho, \mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_\sigma, \mathfrak{p}'_1, \dots, \mathfrak{p}'_\sigma) \end{cases}$$

und führt die obigen Bewegungsgleichungen in

$$(63.)\quad \begin{cases} \left(\frac{\partial\varphi_r}{\partial p_1}-\frac{\partial\varphi_1}{\partial p_r}\right)p'_1+\cdots+\left(\frac{\partial\varphi_r}{\partial p_\varrho}-\frac{\partial\varphi_\varrho}{\partial p_r}\right)p'_\varrho-\frac{\partial\varphi}{\partial p_r}+\frac{\partial\varphi_r}{\partial\mathfrak{p}_1}\mathfrak{p}'_1+\cdots+\frac{\partial\varphi_r}{\partial\mathfrak{p}_\sigma}\mathfrak{p}'_\sigma \\ \qquad +\frac{\partial\varphi_r}{\partial\mathfrak{p}'_1}\mathfrak{p}''_1+\cdots+\frac{\partial\varphi_r}{\partial\mathfrak{p}'_\sigma}\mathfrak{p}''_\sigma = 0 \end{cases}$$

über. Sollen nun diese Gleichungen

a) von den Coordinaten $p_1, \dots, p_\varrho$ unabhängig sein, so muss dies auch für die Coefficienten von $\mathfrak{p}''_s$ stattfinden, und es wird daher φ_r die Form haben

$$(64.)\quad \varphi_r = \omega_r(\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_\sigma, \mathfrak{p}'_1, \dots, \mathfrak{p}'_\sigma)+\Omega_r(p_1, \dots, p_\varrho, \mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_\sigma),$$

und die Bewegungsgleichungen (63.) werden in

$$\left(\frac{\partial\Omega_r}{\partial p_1}-\frac{\partial\Omega_1}{\partial p_r}\right)p'_1+\cdots+\left(\frac{\partial\Omega_r}{\partial p_\varrho}-\frac{\partial\Omega_1}{\partial p_r}\right)p'_\varrho-\frac{\partial\varphi}{\partial p_r}+\frac{\partial\omega_r}{\partial\mathfrak{p}_1}\mathfrak{p}'_1+\cdots+\frac{\partial\omega_r}{\partial\mathfrak{p}_\sigma}\mathfrak{p}'_\sigma$$
$$+\frac{\partial\Omega_r}{\partial\mathfrak{p}_1}\mathfrak{p}'_1+\cdots+\frac{\partial\Omega_r}{\partial\mathfrak{p}_\sigma}\mathfrak{p}'_\sigma+\frac{\partial\omega_r}{\partial\mathfrak{p}'_1}\mathfrak{p}''_1+\cdots+\frac{\partial\omega_r}{\partial\mathfrak{p}'_\sigma}\mathfrak{p}''_\sigma = 0$$

übergehen; da nun aber die Coefficienten von $p'_1, \dots, p'_\varrho$ für sich ebenso wie der übrig bleibende Theil der Gleichung von den ϱ ersten Coordinaten unabhängig sein müssen, so wird die letzte Gleichung, wenn

$$(65.)\quad \frac{\partial\Omega_r}{\partial p_{r_1}}-\frac{\partial\Omega_{r_1}}{\partial p_r} = \omega_{rr_1}(\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_\sigma)$$

und

$$(66.)\quad -\frac{\partial\varphi}{\partial p_r}+\frac{\partial\Omega_r}{\partial\mathfrak{p}_1}\mathfrak{p}'_1+\cdots+\frac{\partial\Omega_r}{\partial\mathfrak{p}_\sigma}\mathfrak{p}'_\sigma = \overline{\Omega}_r(\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_\sigma, \mathfrak{p}'_1, \dots, \mathfrak{p}'_\sigma)$$

also

$$(67.)\quad \begin{cases} \varphi = \mathfrak{p}_1'\int\left(\frac{\partial\Omega_1}{\partial\mathfrak{p}_1}dp_1+\frac{\partial\Omega_2}{\partial\mathfrak{p}_1}dp_2+\cdots+\frac{\partial\Omega_\varrho}{\partial\mathfrak{p}_1}dp_\varrho\right)+\cdots \\ \quad +\mathfrak{p}_\sigma'\int\left(\frac{\partial\Omega_1}{\partial\mathfrak{p}_\sigma}dp_1+\frac{\partial\Omega_2}{\partial\mathfrak{p}_\sigma}dp_2+\cdots+\frac{\partial\Omega_\varrho}{\partial\mathfrak{p}_\sigma}dp_\varrho\right) \\ \quad -\overline{\Omega}_1p_1-\overline{\Omega}_2p_2-\cdots-\overline{\Omega}_\varrho p_\varrho+\psi(\mathfrak{p}_1,\ \ldots,\ \mathfrak{p}_\sigma,\ \mathfrak{p}_1',\ \ldots,\ \mathfrak{p}_\sigma') \end{cases}$$

gesetzt wird, und zugleich berücksichtigt wird, dass nach (66.)

$$\frac{\partial^2\Omega_r}{\partial\mathfrak{p}_s\partial p_{r_1}} = \frac{\partial^2\Omega_{r_1}}{\partial\mathfrak{p}_s\partial p_r},$$

also nach (65.)

$$\omega_{rr_1} = c_{rr_1}$$

ist, worin $c_{rr_1} = -c_{r_1r}$ eine Constante bedeutet und $c_{r_1r_1} = 0$ ist, in

$$(68.)\quad c_{r1}p_1'+\cdots+c_{r\varrho}p_\varrho'+\overline{\Omega}_r+\frac{\partial\omega_r}{\partial\mathfrak{p}_1}\mathfrak{p}_1'+\cdots+\frac{\partial\omega_r}{\partial\mathfrak{p}_\sigma}\mathfrak{p}_\sigma'+\frac{\partial\omega_r}{\partial\mathfrak{p}_1'}\mathfrak{p}_1''+\cdots+\frac{\partial\omega_r}{\partial\mathfrak{p}_\sigma'}\mathfrak{p}_\sigma'' = 0$$

übergehen, die nun in der That von $p_1, \ldots, p_\varrho$ frei ist.

Da nun mit Einführung eben dieser Grössen das kinetische Potential vermöge (62.) die Form annimmt

$$(69.)\quad \begin{cases} H = (\omega_1+\Omega_1)p_1'+\cdots+(\omega_\varrho+\Omega_\varrho)p_\varrho'+\sum_1^\sigma{}_\iota\,\mathfrak{p}_\iota'\int\left(\frac{\partial\Omega_1}{\partial\mathfrak{p}_\iota}dp_1+\cdots+\frac{\partial\Omega_\varrho}{\partial\mathfrak{p}_\iota}dp_\varrho\right) \\ \qquad\qquad -\overline{\Omega}_1p_1-\cdots-\overline{\Omega}_\varrho p_\varrho+\psi, \end{cases}$$

welche, wie unmittelbar zu sehen, ***nicht nur die nothwendige sondern auch die hinreichende Bedingung dafür ist, dass die ersten ϱ Lagrangeschen Gleichungen von den Coordinaten $p_1, \ldots, p_\varrho$ und deren zweiten Ableitungen unabhängig sind,*** so gehen die weiteren σ Bewegungsgleichungen, da aus (69.)

$$\frac{\partial H}{\partial\mathfrak{p}_s} = \left(\frac{\partial\omega_1}{\partial\mathfrak{p}_s}+\frac{\partial\Omega_1}{\partial\mathfrak{p}_s}\right)p_1'+\cdots+\left(\frac{\partial\omega_\varrho}{\partial\mathfrak{p}_s}+\frac{\partial\Omega_\varrho}{\partial\mathfrak{p}_s}\right)p_\varrho'$$

$$+\sum_1^\sigma{}_\iota\,\mathfrak{p}_\iota'\int\left(\frac{\partial^2\Omega_1}{\partial\mathfrak{p}_\iota\partial\mathfrak{p}_s}dp_1+\cdots+\frac{\partial^2\Omega_\varrho}{\partial\mathfrak{p}_\iota\partial\mathfrak{p}_s}dp_\varrho\right)-p_1\frac{\partial\overline{\Omega}_1}{\partial\mathfrak{p}_s}-\cdots-p_\varrho\frac{\partial\overline{\Omega}_\varrho}{\partial\mathfrak{p}_s}+\frac{\partial\psi}{\partial\mathfrak{p}_s},$$

ferner

$$\frac{\partial H}{\partial\mathfrak{p}_s'} = \frac{\partial\omega_1}{\partial\mathfrak{p}_s'}p_1'+\cdots+\frac{\partial\omega_\varrho}{\partial\mathfrak{p}_s'}p_\varrho'+\int\left(\frac{\partial\Omega_1}{\partial\mathfrak{p}_s}dp_1+\cdots+\frac{\partial\Omega_\varrho}{\partial\mathfrak{p}_s}dp_\varrho\right)$$

$$-p_1\frac{\partial\overline{\Omega}_1}{\partial\mathfrak{p}_s'}-\cdots-p_\varrho\frac{\partial\overline{\Omega}_\varrho}{\partial\mathfrak{p}_s'}+\frac{\partial\psi}{\partial\mathfrak{p}_s'}$$

also

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial \mathfrak{p}'_s} = \frac{\partial \omega_1}{\partial \mathfrak{p}'_s}p''_1+\cdots+\frac{\partial \omega_\varrho}{\partial \mathfrak{p}'_s}p''_\varrho+p'_1\frac{d}{dt}\frac{\partial \omega_1}{\partial \mathfrak{p}'_s}+\cdots+p'_\varrho\frac{d}{dt}\frac{\partial \omega_\varrho}{\partial \mathfrak{p}'_s}+\frac{\partial \Omega_1}{\partial \mathfrak{p}_s}p'_1+\cdots$$
$$+\frac{\partial \Omega_\varrho}{\partial \mathfrak{p}_s}p'_\varrho+\sum_1^\sigma{}_t\,\mathfrak{p}'_t\int\Big(\frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial \mathfrak{p}_s\partial \mathfrak{p}_t}dp_1+\cdots+\frac{\partial^2 \Omega_\varrho}{\partial \mathfrak{p}_s\partial \mathfrak{p}_t}dp_\varrho\Big)$$
$$-p_1\frac{d}{dt}\frac{\partial \bar{\Omega}_1}{\partial \mathfrak{p}'_s}-\cdots-p_\varrho\frac{d}{dt}\frac{\partial \bar{\Omega}_\varrho}{\partial \mathfrak{p}'_s}-p'_1\frac{\partial \bar{\Omega}_1}{\partial \mathfrak{p}'_s}-\cdots-p'_\varrho\frac{\partial \bar{\Omega}_\varrho}{\partial \mathfrak{p}'_s}+\frac{d}{dt}\frac{\partial \psi}{\partial \mathfrak{p}'_s}$$

folgt, über in

$$70.)\quad\begin{cases}\dfrac{\partial \omega_1}{\partial \mathfrak{p}'_s}p''_1+\cdots+\dfrac{\partial \omega_\varrho}{\partial \mathfrak{p}'_s}p''_\varrho+p'_1\Big(-\dfrac{\partial \omega_1}{\partial \mathfrak{p}_s}+\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \omega_1}{\partial \mathfrak{p}'_s}\Big)+\cdots\\ \qquad +p'_\varrho\Big(-\dfrac{\partial \omega_\varrho}{\partial \mathfrak{p}_s}+\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \omega_\varrho}{\partial \mathfrak{p}'_s}\Big)-p_1\Big(-\dfrac{\partial \bar{\Omega}_1}{\partial \mathfrak{p}_s}+\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \bar{\Omega}_1}{\partial \mathfrak{p}'_s}\Big)\\ -\cdots-p_\varrho\Big(-\dfrac{\partial \bar{\Omega}_\varrho}{\partial \mathfrak{p}_s}+\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \bar{\Omega}_\varrho}{\partial \mathfrak{p}'_s}\Big)-p'_1\dfrac{\partial \bar{\Omega}_1}{\partial \mathfrak{p}'_s}-\cdots-p'_\varrho\dfrac{\partial \bar{\Omega}_\varrho}{\partial \mathfrak{p}'_s}+\Big(-\dfrac{\partial \psi}{\partial \mathfrak{p}_s}+\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \psi}{\partial \mathfrak{p}'_s}\Big)=\mathfrak{P}_s.\end{cases}$$

Sollen nun die Grössen $p_1, \ldots, p_\varrho$ und deren Ableitungen aus (68.) und (70.) eliminirt werden können, so muss (70.) von $p_1, \ldots, p_\varrho$ selbst frei sein, also

$$-\frac{\partial \bar{\Omega}_r}{\partial \mathfrak{p}_s}+\frac{d}{dt}\frac{\partial \bar{\Omega}_r}{\partial \mathfrak{p}'_s} = 0$$

identisch erfüllt sein, woraus, wie leicht zu sehen, unmittelbar sich ergiebt, dass

$$\bar{\Omega}_r = \Phi_{1r}(\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\sigma)\mathfrak{p}'_1+\cdots+\Phi_{\sigma r}(\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\sigma)\mathfrak{p}'_\sigma+C_r$$

sein muss, worin C_r eine Constante und

$$(71.)\qquad \frac{\partial \Phi_{sr}}{\partial \mathfrak{p}_{s_1}} = \frac{\partial \Phi_{s_1 r}}{\partial \mathfrak{p}_s}$$

ist, und es gehen somit die beiden Gleichungen (68.) und (70.) in

$$(72.)\quad\begin{cases}c_{r1}p'_1+\cdots+c_{r\varrho}p'_\varrho+\mathfrak{p}'_1\Big(\dfrac{\partial \omega_r}{\partial \mathfrak{p}_1}+\Phi_{1r}\Big)+\cdots+\mathfrak{p}'_\sigma\Big(\dfrac{\partial \omega_r}{\partial \mathfrak{p}_\sigma}+\Phi_{\sigma r}\Big)\\ \qquad\qquad +\dfrac{\partial \omega_r}{\partial \mathfrak{p}'_1}\mathfrak{p}''_1+\cdots+\dfrac{\partial \omega_r}{\partial \mathfrak{p}'_\sigma}\mathfrak{p}''_\sigma = 0\end{cases}$$

und

$$(73.)\quad\begin{cases}\dfrac{\partial \omega_1}{\partial \mathfrak{p}'_s}p''_1+\cdots+\dfrac{\partial \omega_\varrho}{\partial \mathfrak{p}'_s}p''_\varrho+p'_1\Big(-\dfrac{\partial \omega_1}{\partial \mathfrak{p}_s}+\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \omega_1}{\partial \mathfrak{p}'_s}\Big)+\cdots\\ +p'_\varrho\Big(-\dfrac{\partial \omega_\varrho}{\partial \mathfrak{p}_s}+\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \omega_\varrho}{\partial \mathfrak{p}'_s}\Big)-p'_1\Phi_{s1}-\cdots-p'_\varrho\Phi_{s\varrho}+\Big(-\dfrac{\partial \psi}{\partial \mathfrak{p}_s}+\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \psi}{\partial \mathfrak{p}'_s}\Big)=\mathfrak{P}_s\end{cases}$$

über, während das kinetische Potential H nach (69.) die Form annimmt

$$(74.)\quad\begin{cases}H = (\omega_1+\Omega_1)p'_1+\cdots+(\omega_\varrho+\Omega_\varrho)p'_\varrho+\sum_1^\sigma{}_t\,\mathfrak{p}'_t\int\Big(\dfrac{\partial \Omega_1}{\partial \mathfrak{p}_t}dp_1+\cdots+\dfrac{\partial \Omega_\varrho}{\partial \mathfrak{p}_t}dp_\varrho\Big)\\ \qquad -p_1(\Phi_{11}\mathfrak{p}'_1+\cdots+\Phi_{\sigma 1}\mathfrak{p}'_\sigma+C_1)-\cdots-p_\varrho(\Phi_{1\varrho}\mathfrak{p}'_1+\cdots+\Phi_{\sigma\varrho}\mathfrak{p}'_\sigma+C_\varrho)+\psi;\end{cases}$$

setzt man nun die Werthe von $p'_1, \ldots, p'_\varrho$ und die daraus hergeleiteten von

$p''_1, \ldots, p''_\varrho$ aus (72.) in die σ Gleichungen (73.) ein, so ist zu untersuchen, ob diese Gleichungen wieder die *Lagrange*sche Form annehmen und welches ihr kinetisches Potential ist. Um zunächst die geringste Anzahl willkürlicher Functionen in den drei letzten Gleichungen zu haben, setze man

$$(74.)\quad \int(\Phi_{1r}d\mathfrak{p}_1+\Phi_{2r}d\mathfrak{p}_2+\cdots+\Phi_{\sigma r}d\mathfrak{p}_\sigma) = \Phi_r(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_\sigma),$$

was der Gleichung (71.) zufolge erlaubt ist, wonach die ϱ Gleichungen (72.) in

$$(75.)\qquad c_{r1}p'_1+\cdots+c_{r\varrho}p'_\varrho = -\frac{d(\omega_r+\Phi_r)}{dt}$$

übergehen, während (73.) in die Form gesetzt werden kann

$$(76.)\quad \begin{cases} -\dfrac{\partial(p'_1\omega_1+\cdots+p'_\varrho\omega_\varrho)}{\partial\mathfrak{p}_s}+\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial(p'_1\omega_1+\cdots+p'_\varrho\omega_\varrho)}{\partial\mathfrak{p}'_s}-p'_1\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial\mathfrak{p}_s}-\cdots-p'_\varrho\dfrac{\partial\Phi_\varrho}{\partial\mathfrak{p}_s} \\ \qquad -\dfrac{\partial\psi}{\partial\mathfrak{p}_s}+\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\psi}{\partial\mathfrak{p}'_s} = \mathfrak{P}_s, \end{cases}$$

und das kinetische Potential die Form annimmt

$$(77.)\quad \begin{cases} H = (\omega_1+\Omega_1)p'_1+\cdots+(\omega_\varrho+\Omega_\varrho)p'_\varrho+\sum_1^\sigma{}_\iota\,\mathfrak{p}'_\iota\displaystyle\int\Big(\frac{\partial\Omega_1}{\partial\mathfrak{p}_\iota}dp_1+\cdots+\frac{\partial\Omega_\varrho}{\partial\mathfrak{p}_\iota}dp_\varrho\Big) \\ \qquad -p_1\Big(\dfrac{d\Phi_1}{dt}+C_1\Big)-\cdots-p_\varrho\Big(\dfrac{d\Phi_\varrho}{dt}+C_\varrho\Big)+\psi. \end{cases}$$

Da sich aber die Gleichung (75.) auf die Gestalt bringen lässt

$$\frac{d}{dt}(c_{r1}p_1+\cdots+c_{r\varrho}p_\varrho+\omega_r+\Phi_r) = 0,$$

worin Φ_r eine Function von $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\sigma$, ω_r eine solche von $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\sigma$, $\mathfrak{p}'_1, \ldots, \mathfrak{p}'_\sigma$ ist, so werden wir auf den oben behandelten Fall geführt, in welchem die linken Seiten der ersten ϱ *Lagrange*schen Gleichungen sich als vollständige nach t genommene Differentialquotienten darstellen lassen, in welchen die Basis des Differentials von $p'_1, \ldots, p'_\varrho$ unabhängig ist, und für diese Formen war gezeigt worden, dass z. B. für $\varrho = 2$, $\sigma = 1$ die letzte Bewegungsgleichung wieder die *Lagrange*sche Form annimmt.

Wir finden somit,

dass die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass ϱ Lagrange sche Gleichungen von den zweiten Ableitungen der Coordinaten $p_1, \ldots, p_\varrho$ und von diesen selbst unabhängig sind, dass ferner die sämmtlichen anderen Bewegungsgleichungen die Coordinaten $p_1, \ldots, p_\varrho$ ebenfalls nicht enthalten, die ist, dass das kinetische Potential die Form besitzt

$$H = (\omega_1+\Omega_1)p'_1+\cdots+(\omega_\varrho+\Omega_\varrho)p'_\varrho+\sum_1^\sigma{}_\iota\,\mathfrak{p}'_\iota\int\Big(\frac{\partial\Omega_1}{\partial\mathfrak{p}_\iota}dp_1+\cdots+\frac{\partial\Omega_\varrho}{\partial\mathfrak{p}_\iota}dp_\varrho\Big)$$
$$-p_1\Big(\frac{d\Phi_1}{dt}+C_1\Big)-\cdots-p_\varrho\Big(\frac{d\Phi_\varrho}{dt}+C_\varrho\Big)+\psi,$$

worin $C_1, \ldots, C_\varrho$ *Constanten,* $\omega_1, \ldots, \omega_\varrho$ *und* ψ *Functionen von* $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\sigma$, $\mathfrak{p}'_1, \ldots, \mathfrak{p}'_\sigma$, $\Phi_1, \ldots, \Phi_\varrho$ *Functionen von* $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\sigma$, $\Omega_1, \ldots, \Omega_\varrho$ *Functionen von* $p_1, \ldots, p_\varrho$ $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\sigma$ *bedeuten, die der Bedingung unterworfen sind, dass*

$$\frac{\partial \Omega_r}{\partial p_{r_1}} - \frac{\partial \Omega_{r_1}}{\partial p_r} = c_{rr_1}$$

ist, worin c_{rr_1} *Constanten darstellen. In diesem Falle gehen die ersten* ϱ *Lagrangeschen Gleichungen in die vollständigen Differentialausdrücke*

$$\frac{d}{dt}[c_{r1}p_1 + \cdots + c_{r\varrho}p_\varrho + \omega_r + \Phi_r] = 0$$

über, während die Reihe der folgenden Bewegungsgleichungen die Gestalt annimmt

$$-\frac{\partial(p'_1\omega_1 + \cdots + p'_\varrho\omega_\varrho)}{\partial \mathfrak{p}_s} + \frac{d}{dt}\frac{\partial(p'_1\omega_1 + \cdots + p'_\varrho\omega_\varrho)}{\partial \mathfrak{p}'_s} - p'_1\frac{\partial \Phi_1}{\partial \mathfrak{p}_s} - \cdots - p'_\varrho\frac{\partial \Phi_\varrho}{\partial \mathfrak{p}_s}$$
$$-\frac{\partial \psi}{\partial \mathfrak{p}_s} + \frac{d}{dt}\frac{\partial \psi}{\partial \mathfrak{p}'_s} = \mathfrak{P}_s,$$

und diese Gleichungen lassen sich z. B. für $\varrho = 2$ *und* $\sigma = 1$, *wie früher gezeigt worden, auf die Lagrangesche Normalform*

$$-\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \mathfrak{p}_1} + \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \mathfrak{p}'_1} = \mathfrak{P}_1$$

reduciren.

Die Unabhängigkeit der ϱ *Lagrange*schen Gleichungen von den Grössen $p''_1, \ldots, p''_\varrho$ hatte die Form (62.) für das kinetische Potential erfordert, und es blieb nur noch der Fall zu betrachten übrig, dass

b) eben diese Gleichungen von den Grössen $p'_1, p'_2, \ldots, p'_\varrho$ unabhängig sind und eine Elimination der Werthe der Coordinaten $p_1, \ldots, p_\varrho$ und der daraus hervorgehenden Ableitungen derselben aus der folgenden Reihe der Bewegungsgleichungen vollzogen wird.

Aus der Form (63.) der ersten ϱ Bewegungsgleichungen folgt, dass die Unabhängigkeit derselben von den Grössen $p'_1, \ldots, p'_\varrho$ die Bedingungen nach sich zieht

$$(78.)\qquad \frac{\partial \varphi_r}{\partial p_1} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial p_r}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial \varphi_r}{\partial p_\varrho} = \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial p_r},$$

und daher diese Gleichungen selbst die Form annehmen

$$(79.)\qquad -\frac{\partial \varphi}{\partial p_r} + \frac{\partial \varphi_r}{\partial \mathfrak{p}_1}\mathfrak{p}'_1 + \cdots + \frac{\partial \varphi_r}{\partial \mathfrak{p}_\sigma}\mathfrak{p}'_\sigma + \frac{\partial \varphi_r}{\partial \mathfrak{p}'_1}\mathfrak{p}''_1 + \cdots + \frac{\partial \varphi_r}{\partial \mathfrak{p}'_\sigma}\mathfrak{p}''_\sigma = 0,$$

worin die Functionen $\varphi_1, \ldots, \varphi_\varrho$, φ von den Grössen $p_1, \ldots, p_\varrho$, $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\sigma$, $\mathfrak{p}'_1, \ldots, \mathfrak{p}'_\sigma$ abhängen, und das kinetische Potential die Form besitzt

$$(80.)\qquad H = \varphi_1 p'_1 + \cdots + \varphi_\varrho p'_\varrho + \varphi.$$

Um zu sehen, ob diese Form des kinetischen Potentials durch Elimination der Grössen $p_1, \ldots, p_\varrho$ und deren ersten und zweiten Ableitungen wieder auf Gleichungen in den Coordinaten $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\sigma$ von der *Lagrange*schen Form führt, untersuchen wir den Fall $\varrho = 1$, $\sigma = 1$, für welchen das Potential

$$\text{(81.)} \qquad H = p_1'\varphi_1(p_1, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_1') + \varphi(p_1, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_1')$$

die erste *Lagrange*sche Gleichung in der Form liefert

$$\text{(82.)} \qquad -\frac{\partial \varphi}{\partial p_1} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \mathfrak{p}_1}\mathfrak{p}_1' + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \mathfrak{p}_1'}\mathfrak{p}_1'' = 0,$$

aus welcher p_1 als Function von $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_1'$, $\mathfrak{p}_1''$

$$\text{(83.)} \qquad p_1 = \omega(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_1'')$$

und daraus

$$\text{(84.)} \qquad p_1' = \frac{\partial \omega}{\partial \mathfrak{p}_1}\mathfrak{p}_1' + \frac{\partial \omega}{\partial \mathfrak{p}_1'}\mathfrak{p}_1'' + \frac{\partial \omega}{\partial \mathfrak{p}_1''}\mathfrak{p}_1'''$$

und

$$\text{(85.)} \qquad \begin{cases} p_1'' = \mathfrak{p}_1'\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial \mathfrak{p}_1^2}\mathfrak{p}_1' + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \mathfrak{p}_1 \partial \mathfrak{p}_1'}\mathfrak{p}_1'' + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \mathfrak{p}_1 \partial \mathfrak{p}_1''}\mathfrak{p}_1'''\right) + \frac{\partial \omega}{\partial \mathfrak{p}_1}\mathfrak{p}_1'' \\ \quad + \mathfrak{p}_1''\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial \mathfrak{p}_1' \partial \mathfrak{p}_1}\mathfrak{p}_1' + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \mathfrak{p}_1'^2}\mathfrak{p}_1'' + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \mathfrak{p}_1' \partial \mathfrak{p}_1''}\mathfrak{p}_1'''\right) + \frac{\partial \omega}{\partial \mathfrak{p}_1'}\mathfrak{p}_1''' \\ \quad + \mathfrak{p}_1'''\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial \mathfrak{p}_1'' \partial \mathfrak{p}_1}\mathfrak{p}_1' + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \mathfrak{p}_1'' \partial \mathfrak{p}_1'}\mathfrak{p}_1'' + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \mathfrak{p}_1''^2}\mathfrak{p}_1'''\right) + \frac{\partial \omega}{\partial \mathfrak{p}_1''}\mathfrak{p}_1'''' \end{cases}$$

sich ergeben mag. Setzt man die Werthe (83.), (84.), (85.) in die zweite Bewegungsgleichung

$$-\frac{\partial H}{\partial \mathfrak{p}_1} + \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial \mathfrak{p}_1'} = \mathfrak{P}_1$$

oder in

$$\text{(86.)} \qquad \begin{cases} -p_1'\frac{\partial \varphi_1}{\partial \mathfrak{p}_1} - \frac{\partial \varphi}{\partial \mathfrak{p}_1} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \mathfrak{p}_1'}p_1'' + p_1'\left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \mathfrak{p}_1' \partial p_1}p_1' + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \mathfrak{p}_1' \partial \mathfrak{p}_1}\mathfrak{p}_1' + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \mathfrak{p}_1'^2}\mathfrak{p}_1''\right) \\ \qquad + \frac{d}{dt}\frac{\partial \varphi}{\partial \mathfrak{p}_1'} = \mathfrak{P}_1 \end{cases}$$

ein, so muss jedenfalls, wenn diese nach der Substitution wieder die *Lagrange*sche Form

$$-\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \mathfrak{p}_1} + \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \mathfrak{p}_1'} = \mathfrak{P}_1$$

annehmen soll, worin $\mathfrak{H}$ eine Function von $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_1'$ ist, der durch Substitution des Werthes (85.) eintretende Coefficient von $\mathfrak{p}_1''''$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \mathfrak{p}_1'}\frac{\partial \omega}{\partial \mathfrak{p}_1''} = 0$$

sein müssen, also, wie aus der Form von (82.) hervorgeht,

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \mathfrak{p}_1'} = 0 \quad \text{und} \quad p_1 = \omega(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_1'),$$

so dass das kinetische Potential die Form annimmt

$$(87.) \qquad H = p_1'\varphi_1(p_1, \mathfrak{p}_1) + \varphi(p_1, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_1'),$$

und aus der Gleichung (82.)

$$(88.) \qquad -\frac{\partial \varphi}{\partial p_1} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \mathfrak{p}_1}\mathfrak{p}_1' = 0$$

die Werthe von

$$p_1 = \omega(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_1'), \quad p_1' = \frac{\partial \omega}{\partial \mathfrak{p}_1}\mathfrak{p}_1' + \frac{\partial \omega}{\partial \mathfrak{p}_1'}\mathfrak{p}_1''$$

auszurechnen und in die Gleichung (86.)

$$(89.) \qquad -p_1'\frac{\partial \varphi_1}{\partial \mathfrak{p}_1} - \frac{\partial \varphi}{\partial \mathfrak{p}_1} + \frac{d}{dt}\frac{\partial \varphi}{\partial \mathfrak{p}_1'} = \mathfrak{P}_1$$

einzusetzen sind. Bezeichnet man das Resultat der Substitution, wie bereits oben geschehen, durch

$$(90.) \quad -\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \mathfrak{p}_1}\right)\left(\frac{\partial \omega}{\partial \mathfrak{p}_1}\mathfrak{p}_1' + \frac{\partial \omega}{\partial \mathfrak{p}_1'}\mathfrak{p}_1''\right) - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \mathfrak{p}_1}\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \mathfrak{p}_1'}\right) = \mathfrak{P}_1,$$

und bemerkt, dass

$$\frac{\partial(\varphi)}{\partial \mathfrak{p}_1} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \mathfrak{p}_1}\right) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_1}\right)\frac{\partial \omega}{\partial \mathfrak{p}_1},$$

$$\frac{\partial(\varphi)}{\partial \mathfrak{p}_1'} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \mathfrak{p}_1'}\right) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_1}\right)\frac{\partial \omega}{\partial \mathfrak{p}_1'},$$

und dass nach (88.)

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_1}\right) = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \mathfrak{p}_1}\right)\mathfrak{p}_1'$$

identisch erfüllt wird, so liefern die beiden letzten Gleichungen

$$-\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \mathfrak{p}_1}\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \mathfrak{p}_1'}\right) = -\frac{\partial(\varphi)}{\partial \mathfrak{p}_1} + \frac{d}{dt}\frac{\partial(\varphi)}{\partial \mathfrak{p}_1'} + \mathfrak{p}_1'\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \mathfrak{p}_1}\right)\frac{\partial \omega}{\partial \mathfrak{p}_1} - \frac{d}{dt}\left[\mathfrak{p}_1'\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \mathfrak{p}_1}\right)\frac{\partial \omega}{\partial \mathfrak{p}_1'}\right],$$

und es geht (90.) über in

$$(91.) \quad -\frac{\partial(\varphi)}{\partial \mathfrak{p}_1} + \frac{d}{dt}\frac{\partial(\varphi)}{\partial \mathfrak{p}_1'} - \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \mathfrak{p}_1}\right)\frac{\partial \omega}{\partial \mathfrak{p}_1'}\mathfrak{p}_1'' - \frac{d}{dt}\left[\mathfrak{p}_1'\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \mathfrak{p}_1}\right)\frac{\partial \omega}{\partial \mathfrak{p}_1'}\right] = \mathfrak{P}_1.$$

Da sich aber nach (31.) und (32.)

$$\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \mathfrak{p}_1}\right)\frac{\partial \omega}{\partial \mathfrak{p}_1'}\mathfrak{p}_1'' + \frac{d}{dt}\left[\mathfrak{p}_1'\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \mathfrak{p}_1}\right)\frac{\partial \omega}{\partial \mathfrak{p}_1'}\right] = 2\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \mathfrak{p}_1}\right)\frac{\partial \omega}{\partial \mathfrak{p}_1'}\mathfrak{p}_1'' + \mathfrak{p}_1'\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \mathfrak{p}_1}\right)\frac{\partial \omega}{\partial \mathfrak{p}_1'}\right]$$

in die Form setzen lässt

$$-\frac{\partial F}{\partial \mathfrak{p}_1}+\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \mathfrak{p}'_1},$$

worin

$$F = \mathfrak{p}'_1\int\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \mathfrak{p}_1}\right)\frac{\partial \omega}{\partial \mathfrak{p}'_1}d\mathfrak{p}'_1+\mathfrak{p}'_1\psi(\mathfrak{p}_1)$$

ist, so finden wir,

dass die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die eine der beiden Lagrangeschen Gleichungen von den Grössen p'_1 und p''_1 unabhängig ist, für das kinetische Potential die Form

$$H = \varphi_1(p_1,\ \mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}'_1)p'_1+\varphi(p_1,\ \mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}'_1)$$

erfordert; soll nun die Elimination von p_1 aus der ersten und zweiten Bewegungsgleichung wieder eine Gleichung der Lagrangeschen Form ergeben, so ist unter der Voraussetzung, dass eine der äusseren Kräfte Null ist, nothwendig und hinreichend, dass φ_1 von $\mathfrak{p}'_1$ unabhängig ist, und zwar nimmt dann die zweite Differentialgleichung die Lagrangesche Form

$$-\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \mathfrak{p}_1}+\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \mathfrak{p}'_1} = \mathfrak{P}_1$$

an, worin

$$\mathfrak{H} = (\varphi)+\mathfrak{p}'_1\int\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \mathfrak{p}_1}\right)\frac{\partial p_1}{\partial \mathfrak{p}'_1}d\mathfrak{p}'_1$$

ist, und die eingeklammerten Ausdrücke die Werthe derselben nach Substitution des aus der ersten Bewegungsgleichung hergeleiteten Werthes von p_1 als Function von $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}'_1$ bedeuten.

Somit sind alle Fälle untersucht, in denen die Beschaffenheit einer Reihe von Bewegungsgleichungen eines Systems, in welchen die äusseren Kräfte Null sind, die Elimination von Coordinaten und deren Ableitungen gestattet, ohne particuläre Integrale zu kennen, und daher auch alle Fälle der erweiterten verborgenen Bewegung und unvollständigen Probleme ermittelt, welche kinetische Potentiale voraussetzen, die nur von den Coordinaten und deren ersten Ableitungen, im Uebrigen aber beliebig von diesen Grössen abhängen. Die Behandlung selbst zeigt, wie die Untersuchung auf kinetische Potentiale auszudehnen ist, welche beliebig hohe Ableitungen der Coordinaten enthalten, wie sie bisher den obigen Untersuchungen zu Grunde gelegt wurden.

(Fortsetzung folgt.)

Neuer Beweis der Existenz eines Integrals einer linearen homogenen Differentialgleichung.

(Nach einer Mittheilung von *Paul Günther*.)

(Von Herrn *M. Hamburger*.)

Mein leider allzufrüh der Wissenschaft entrissener Freund *Paul Günther* theilte mir zur Zeit mit, dass der von Herrn *Fuchs* im 66. Bande dieses Journals S. 122 ff. gegebene Beweis für die Existenz eines Integrals einer linearen homogenen Differentialgleichung einer Vereinfachung fähig sei, indem an Stelle der a. a. O. S. 123 angewandten Hülfsgleichung eine andere eingeführt wird, deren allgemeines Integral unmittelbar angegeben werden kann. Es sei mir gestattet, die erwähnte Mittheilung im Folgenden auszuführen.

Es sei

$$(1.)\qquad \frac{d^n y}{dx^n} = p_1 \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + p_2 \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \cdots + p_n y$$

eine lineare homogene Differentialgleichung $n$ter Ordnung, deren Coefficienten in der Umgebung eines Punktes x_0 eindeutige endliche und stetige Functionen von x sind, sei ferner a der x_0 zunächst liegende singuläre Punkt, in welchem eine oder mehrere der Functionen p unstetig werden oder sich verzweigen, und r beliebig wenig kleiner als $|a-x_0|$, der absolute Betrag von $a-x_0$.

Innerhalb des Kreises um den Punkt x_0 mit dem Radius r seien $M_1, M_2, \dots, M_n$ die Maxima der absoluten Beträge der Functionen resp. $p_1, p_2, \dots, p_n$. Es ist dann für $x = x_0$

$$\left|\frac{d^\varkappa p_\lambda}{dx^\varkappa}\right| < 1.2.3\dots\varkappa \frac{M_\lambda}{r^\varkappa} \qquad (\lambda = 1, 2, \dots, n)$$

und

$$\left|\frac{d^\varkappa}{dx^\varkappa}\frac{M_\lambda}{\left(1-\frac{x-x_0}{r}\right)^\lambda}\right| = \lambda(\lambda+1)\dots(\lambda+\varkappa-1)\frac{M_\lambda}{r^\varkappa} \qquad (\lambda = 1, 2, \dots, n)$$

folglich

$$\left|\frac{d^\varkappa p_\lambda}{dx^\varkappa}\right|_{x=x_0} < \left|\frac{d^\varkappa}{dx^\varkappa}\frac{M_\lambda}{\left(1-\frac{x-x_0}{r}\right)^\lambda}\right|_{x=x_0}.$$

Die sämmtlichen Ableitungen einer der Differentialgleichung (1.) genügenden Function y lassen sich auf die Form bringen

$$\frac{d^\alpha y}{dx^\alpha} = \mathfrak{A}_{\alpha 1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\mathfrak{A}_{\alpha 2}(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\cdots+\mathfrak{A}_{\alpha n}(x)y,$$

worin die Grössen $\mathfrak{A}$ sich aus den Grössen p und deren Ableitungen durch die Operationen der Addition und Multiplication zusammensetzen. Bilden wir nun die Differentialgleichung

$$(2.)\quad \frac{d^n u}{dx^n} = \frac{M_1}{1-\frac{x-x_0}{r}}\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}+\frac{M_2}{\left(1-\frac{x-x_0}{r}\right)^2}\frac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}}+\cdots+\frac{M_n}{\left(1-\frac{x-x_0}{r}\right)^n}u,$$

so lassen sich die sämmtlichen Ableitungen einer derselben genügenden Function u in der ähnlichen Form

$$\frac{d^\alpha u}{dx^\alpha} = \mathfrak{B}_{\alpha 1}\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}+\mathfrak{B}_{\alpha 2}\frac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}}+\cdots+\mathfrak{B}_{\alpha n}u$$

darstellen. Die Grössen $\mathfrak{B}$ gehen aus den entsprechenden Grössen $\mathfrak{A}$ hervor, indem man an die Stelle der Function p_λ und ihrer Ableitungen die Function $\frac{M_\lambda}{1-\frac{x-x_0}{r}}$ und deren Ableitungen setzt. Daraus folgt, dass

$$\mathfrak{B}_{\alpha 1}(x_0) > \mathfrak{A}_{\alpha 1}(x_0),\quad \mathfrak{B}_{\alpha 2}(x_0) > \mathfrak{A}_{\alpha 2}(x_0),\quad \ldots,\quad \mathfrak{B}_{\alpha n}(x_0) > \mathfrak{A}_{\alpha n}(x_0)$$

ist. Das allgemeine Integral der Gleichung (2.) ist aber bekannt, nämlich

$$u = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} c_\alpha\left(1-\frac{x-x_0}{r}\right)^{s_\alpha},$$

wo $s_1 \ldots s_n$ die Wurzeln der Gleichung

$$s(s-1)\ldots(s-n+1) = -M_1 rs(s-1)\ldots(s-n+2)+M_2 r^2 s(s-1)\ldots(s-n+3)-\cdots$$
$$+(-1)^{n-1}M_{n-1}r^{n-1}s+(-1)^n M_n r^n$$

sind. Im Falle, dass mehrere Wurzeln einander gleich sind, z. B. λ_σ Wurzeln gleich s_σ, ein Fall, der übrigens durch eine passende Wahl der M stets vermieden werden kann, lautet die zu ihr gehörige Gruppe von Integralen

$$u_1 = \left(1-\frac{x-x_0}{r}\right)^{s_\sigma},\quad u_2 = \left(1-\frac{x-x_0}{r}\right)^{s_\sigma}\log\left(1-\frac{x-x_0}{r}\right),\quad \ldots,$$
$$u_\sigma = \left(1-\frac{x-x_0}{r}\right)^{s_\sigma}\left[\log\left(1-\frac{x-x_0}{r}\right)\right]^{s_\sigma-1}.$$

In jedem Falle lässt sich das allgemeine Integral von (2.) in einer nach ganzen positiven Potenzen von $x-x_0$ fortschreitenden Reihe entwickeln, die convergent ist, so lange $|x-x_0|<r$ ist. Es genügt also der Differentialgleichung (2.) eine in diesem Bereiche eindeutige endliche und stetige Function u von der Beschaffenheit, dass $u, \frac{du}{dx}, \frac{d^2u}{dx^2}, \dots, \frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}$ beliebige positive Werthe erhalten können. Folglich existirt auch eine in demselben Bereiche eindeutige endliche und stetige Function y, die der Differentialgleichung (1.) genügt, derart, dass $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ für $x = x_0$ beliebig gegebene Werthe annehmen.

Bemerkung zur vorstehenden Mittheilung des Herrn *Hamburger*.

(Von Herrn *L. Fuchs*.)

In meiner Arbeit „zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten", welche ich vor Ablauf des Jahres 1864 vollendete und im Januar 1865 zur Publication im Osterprogramm der städtischen Gewerbeschule zu Berlin desselben Jahres einlieferte, und welche in diesem Journal Bd. 66 wieder abgedruckt worden ist, habe ich in der ersten Nummer den Bereich fixirt, innerhalb dessen die Integrale einer Differentialgleichung

$$\frac{d^m y}{dx^m} = p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + p_2 \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \cdots + p_m y,$$

deren Coefficienten innerhalb eines einfach zusammenhangenden Flächentheils T der x-Ebene nur in einer endlichen Anzahl von singulären Punkten unstetig werden, im Uebrigen aber innerhalb dieser Fläche eindeutig und continuirlich sind, sich nach ganzen positiven Potenzen entwickeln lassen.

Wenn es sich nur darum handelte zu zeigen, dass für eine *hinlänglich kleine* Umgebung eines von den singulären Stellen verschiedenen Punktes x_0 der Fläche T eine convergirende nach positiven ganzen Potenzen von $x-x_0$ fortschreitende Reihe y von der Art existirt, dass $y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}$ für $x = x_0$ beliebig vorgeschriebene Werthe annehmen, und dass sie der Differentialgleichung Genüge leistet, so konnten wir uns auf den für beliebige Differentialgleichungen von *Cauchy* gelieferten Existenzbeweis berufen.

Es handelte sich vielmehr darum zu lehren, dass für die *linearen* Differentialgleichungen die singulären Punkte der Coefficienten die einzigen singulären Stellen der Integrale derselben sind; mit anderen Worten, dass die Reihe y innerhalb eines x_0 als Mittelpunkt umgebenden bis *zum nächsten*

singulären Punkte a heranreichenden Kreises convergirt. Hierzu war erforderlich, in Anlehnung an die ***Cauchy***sche Methode (méthode des limites) die Hülfsdifferentialgleichung (Gl. (3.) No. 1 der citirten Abhandlung) so zu wählen, dass für diese die Darstellbarkeit des entsprechenden Integrals innerhalb eines x_0 umgebenden ***bis a heranreichenden*** Kreises durch eine convergente nach ganzen positiven Potenzen von $x-x_0$ fortschreitende Reihe zur Evidenz gebracht werden kann, woraus alsdann nach der Methode von ***Cauchy*** dasselbe für die vorgelegte Differentialgleichung erschlossen wird.

In jüngster Zeit hat ein amerikanischer Schriftsteller*) bei Gelegenheit der Besprechung des Buches des Herrn ***Heffter*** über lineare Differentialgleichungen und des Handbuches des Herrn ***Schlesinger*** die Aufgabe übernommen, das was ich in der Theorie der linearen Differentialgleichungen erstrebt habe, zu verkleinern. Unter anderem will derselbe unter Berufung auf eine Stelle in einer Arbeit des Herrn ***Thomé,*** dieses Journal Bd. 66 p. 322 in Bezug auf den Existenzbeweis für die Integrale linearer Differentialgleichungen mir die Priorität streitig machen. Die vorstehende Arbeit von ***Günther,*** welche eine Abänderung der von mir angewendeten Hülfsdifferentialgleichung enthält, giebt mir Veranlassung hier ausdrücklich zu constatiren, dass mir vor dem Erscheinen meiner Programmarbeit über das oben erwähnte Merkmal, welches die linearen Differentialgleichungen von den nicht linearen unterscheidet, oder über den Beweis der Convergenz von y innerhalb eines x_0 umgebenden bis ***zum nächsten singulären Punkte heranreichenden*** Kreises weder eine Publication, noch auf einem anderen Wege eine Mittheilung von irgend einem anderen Mathematiker bekannt geworden ist.

Es ist übrigens hier nicht der Ort auf die Art näher einzugehen, wie derselbe Verfasser auch nach anderen Seiten hin durch Zusammenstellung von Schriften anderer Autoren, welche später als die meinigen publicirt worden sind, mit den letzteren sich historische Daten nach Belieben construirt.

---

*) Bulletin of the American Mathematical Society November 1896 Ser. II Vol. III No. 2 und Januar 1897 Ser. II Vol. III No. 4.

J 161

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

von

L. Fuchs.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich Preussischer Behörden.

Band 118.

Heft I u. II.

Ausgegeben den 20. Mai.

Berlin,
S.W. Anhaltstrasse 12.
Druck und Verlag von Georg Reimer.
1897.

Jährlich circa 6 Hefte. Vier Hefte bilden einen Band. Preis pro Band M. 12.—.

Band 118. Heft I u. II.

Inhaltsverzeichniss.

Sendungen von Beiträgen für das Journal erbittet die Redaction **ausschliesslich unter der Adresse:**

An die Redaction des Journals für die reine und angewandte Mathematik, Verlagsbuchhandlung von Georg Reimer. Berlin S.W., Anhaltstrasse 12.



Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

von

L. Fuchs.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich Preussischer Behörden.

Band 118.

Heft IV.

Ausgegeben den 23. October.

Berlin,
S.W. Anhaltstrasse 12.
Druck und Verlag von Georg Reimer.
1897.

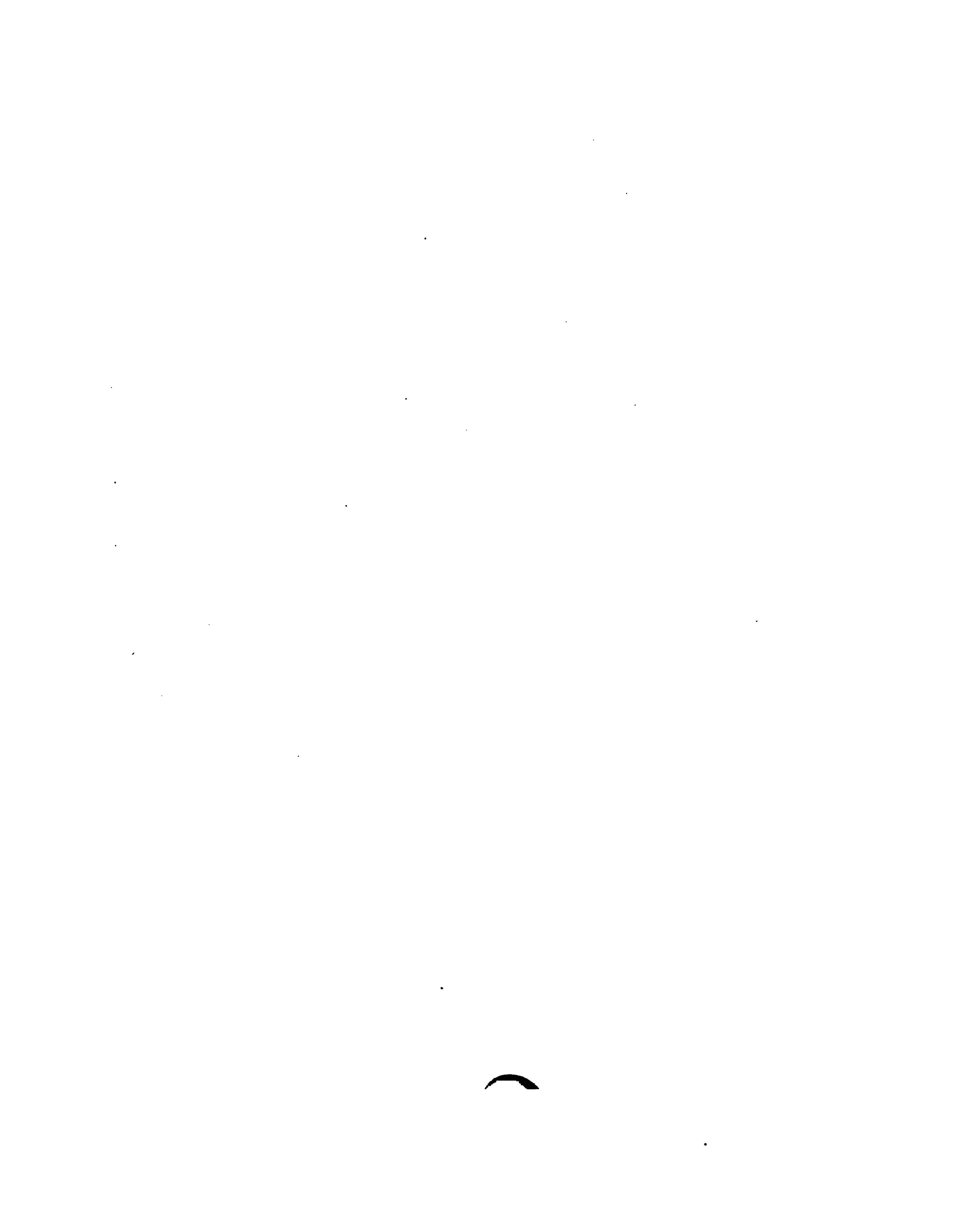
Jährlich circa 6 Hefte. Vier Hefte bilden einen Band. Preis pro Band M. 12.—.

Band 118. Heft IV.

Inhaltsverzeichniss.

Sendungen von Beiträgen für das Journal erbittet die Redaction **ausschliesslich** unter der Adresse:

An die Redaction des Journals für die reine und angewandte Mathematik, Verlagsbuchhandlung von Georg Reimer. Berlin S.W., Anhaltstrasse 12.






STORA

